УДК 517

©2010 р. І.В. Кальчук, Т.А. Степанюк

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

ПРО ЗВ'ЯЗОК ВЕЛИЧИН НАБЛИЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В МЕТРИКАХ C І L

Для довільних методів підсумовування рядів Фур'є, що задаються послідовністю функцій натурального аргументу, які залежать від дійсного параметра δ, в деяких випадках отримані рівності між верхніми межами відхилень в інтегральній метриці та відповідними верхніми межами в рівномірній метриці на класах диференційовних функцій

For the arbitrary methods of summation of Fourier series, which are specify by the sequence of functions of natural argument, which depend on an real parameter δ, on some occasion got equality between the upper boundary of deviation in integral metric and corresponding upper boundary in uniform metric on the classes of differentiable functions

1. Нехай[1] C, L_∞ та L — простори 2π-періодичних відповідно неперервних, вимірних істотно обмежених та сумовних на періоді функцій із нормами $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; $\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_t |f(t)|$ та $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ множина функцій, що залежать від $k = 0, 1, 2, \ldots$ і від параметра δ, що змінюється на деякій множині $E_\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, яка має принаймні одну граничну точку. Нехай також $\lambda_\delta(0) = 1 \ \ \forall \delta \in E_\Lambda$. Зазначимо, що у випадку, коли $\delta = n \in \mathbb{N}$, числа $\lambda_{n,k} := \lambda_\delta(k)$ є елементами числової прямокутної матриці $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ $(n, k = 0, 1, ...; \lambda_{n,0} = 1, n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$, а коли, крім того, $\lambda_{n,k} \equiv 0$,при $k > n$ — елементами числової трикутної матриці. За допомогою множини Λ кожній сумовній функції $f(x)$ з її рядом Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

поставимо у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2}\lambda_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \delta \in E_\Lambda.$$

Якщо цей ряд при кожному $\delta \in E_\Lambda$ є рядом Фур'є деякої функції, то будемо її позначати через $U_\delta(f; x; \Lambda)$, а у випадку, коли $\delta \in \mathbb{N}$ — через $U_n(f; x; \Lambda)$. Таким чином, множина Λ задає метод побудови операторів $U_\delta(f; \Lambda)$. У цьому випадку також говорять, що множина Λ визначає конкретний метод (Λ-метод) підсумовування рядів Фур'є.

Через W_p^r, $p = 1, \infty$, позначають множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\|f^{(r)}(t)\|_p \leq 1$ (див., наприклад, [1]).

Якщо послідовність $\{\lambda_\delta(k)\}_{k=\overline{0,\infty}}$ така, що ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\delta(k)\cos kt$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, тоді (аналогічно до [2, с. 46]) майже скрізь матиме місце рівність

$$U_\delta(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\delta(t; \Lambda)dt, \quad (1)$$

де

$$K_\delta(t; \Lambda) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\delta(k)\cos kt. \quad (2)$$

Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величини

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; U_\delta(\Lambda)\right)_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(x) - U_\delta(f; x; \Lambda)\|_X,$$

де X — нормований простір, $\mathfrak{N} \subseteq X$ — заданий клас функцій, $U_\delta(f; x; \Lambda)$, $\delta \in E_\Lambda$, —

[1]Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф25.1/043)

оператори, породжені конкретним методом $U_\delta(f;\Lambda)$ підсумовування рядів Фур'є, будемо називати, наслідуючи О.І. Степанця [3, с. 198], задачею Колмогорова–Нікольського.

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta)=\varphi(\mathfrak{N};U_\delta(f;\Lambda);\delta)$, така, що при $\delta\to\delta_0$ (де δ_0 — гранична точка множини E_Λ)

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N};U_\delta(\Lambda)\right)_X=\varphi\left(\delta\right)+o\left(\varphi\left(\delta\right)\right),$$

то кажуть, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ і методу $U_\delta(f,\Lambda)$.

В роботі С. М. Нікольського [4] було встановлене існування тісного зв'язку між величинами $\mathcal{E}(W^r_\infty;U_n(\Lambda))_C$ та $\mathcal{E}(W^r_1;U_n(\Lambda))_1$. Зокрема, він показав, що має місце нерівність

$$\mathcal{E}(W^r_1;U_n(\Lambda))_1\le\mathcal{E}(W^r_\infty;U_n(\Lambda))_C,\qquad(3)$$

яка для ряду важливих методів підсумовування перетворюється в точну або асимптотичну рівність.

С. Б. Стєчкін та С. А. Теляковський [5] розглянули довільні методи підсумовування рядів Фур'є і показали, що в більшості випадків величини $\mathcal{E}(W^r_\infty;U_n(\Lambda))_C$ та $\mathcal{E}(W^r_1;U_n(\Lambda))_1$ асимптотично рівні.

В. П. Моторний [6] встановив нерівності виду (3) для довільних методів підсумовування рядів Фур'є $U_n(f;\Lambda)$ на класах функцій $W^r_{\beta,1}H_\omega$, $W^r_{\beta,\infty}H_\omega$, а також вказав декілька випадків, коли нерівності перетворюються в точні або асимптотичні рівності. Зокрема, ним була доведена рівність

$$\mathcal{E}\left(W^r_1;U_n(\Lambda)\right)_1=\mathcal{E}\left(W^r_\infty;U_n(\Lambda)\right)_C,\qquad(4)$$

якщо $r\ge1$, за умови

$$K_n\left(t;\Lambda\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_{n,k}\cos kt\ge0.$$

Метою даної роботи є отримання аналогічної до (4) рівності для методів наближення $U_\delta(f;\Lambda)$, заданих за допомогою співвідношення (1).

Теорема 1. *Якщо ядро $K_\delta\left(t;\Lambda\right)$, що визначене формулою (2) сумовне та невід'ємне, то при $r\in\mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(W^r_1;U_\delta(\Lambda)\right)_1=\mathcal{E}\left(W^r_\infty;U_\delta(\Lambda)\right)_C\qquad(5)$$

Доведення. Покажемо спочатку справедливість нерівності

$$\mathcal{E}\left(W^r_1;U_\delta(\Lambda)\right)_1\le\mathcal{E}\left(W^r_\infty;U_\delta(\Lambda)\right)_C.\qquad(6)$$

Нехай функція f належить до класу W^r_1. Тоді, застосовуючи r разів метод інтегрування частинами до коефіцієнтів Фур'є функції f, отримаємо

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_1^{(r)}(t-x)\vartheta(t)dt,\qquad(7)$$

де $\vartheta(t)=f^{(r)}(t)$ і

$$D_1^{(r)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt+\frac{r\pi}{2})}{k^r}.$$

При цьому, на основі періодичності $f^{(r-1)}(t)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta(t)dt=0.\qquad(8)$$

Нехай тепер заданий метод підсумовування (1), який визначається послідовністю $\{\lambda_\delta(k)\}_{k=\overline{0,\infty}}$. Якщо $f\in W^r_1$, то після інтегрування частинами, отримаємо

$$U_\delta(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\delta^{(r)}(t;\Lambda)\vartheta(t)dt,\qquad(9)$$

де

$$K_\delta^{(r)}(t;\Lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_\delta(k)}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right).$$

З формул (7) і (9) випливає

$$f(x)-U_\delta(f;x;\Lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_\delta(t-x)\vartheta(t)dt,\qquad(10)$$

де $H_\delta(t)=D_1^{(r)}(t)-K^r_\delta(t)$, і

$$\|f(x)-U_\delta(f;x;\Lambda)\|_1=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}H_\delta(t-x)\vartheta(t)dt\right|dx.$$

Згідно з теоремою 3 із роботи [4, с. 215], будемо мати

$$\mathcal{E}\left(W_1^r; U_\delta(\Lambda)\right)_1 = \sup_{f\in W_1^r} \|f(x) - U_\delta(f;x;\Lambda)\|_1 =$$

$$= \sup_{\substack{\|\vartheta\|_1\le 1\\ \vartheta\perp 1}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} H_\delta(t-x)\vartheta(t)dt\right|dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\max_t \int_{-\pi}^{\pi} |H_\delta(x) - H_\delta(t+x)|dx. \qquad (11)$$

Згідно з наслідком 4 із роботи [4, с. 215] та рівності (10), отримаємо

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^r; U_\delta(\Lambda)\right)_C =$$

$$= \sup_{f\in W_\infty^r} \|f(x) - U_\delta(f;x;\Lambda)\|_C =$$

$$= \sup_{\substack{\|\vartheta\|_\infty\le 1\\ \vartheta\perp 1}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_\delta(t)\vartheta(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\min_{\lambda_0}\int_{-\pi}^{\pi} |H_\delta(t)+\lambda_0|dt. \qquad (12)$$

Але якими б не були λ_0 і t,

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|H_\delta(x)-H_\delta(t+x)|dx \le \int_{-\pi}^{\pi}|H_\delta(x)+\lambda_0|dx.$$

З останньої нерівності та рівностей (11) і (12) випливає справедливість нерівності (6).

Оскільки для довільного $r = 1, 2, \ldots$ і $k \le r+1$ згідно з [6, с. 20] виконується співвідношення

$$\sup_{f\in W_1^r} \omega_k(f;t)_1 = \sup_{f\in W_\infty^r} \omega_k(f;t)_C = \omega_k\left(\varphi_r;t\right),$$

де $\omega_k(f;t)$ — k-й модуль гладкості функції $f(t)$, а $\varphi_r(t)$ — r-й періодичний інтеграл функції $\operatorname{sign}\sin t$ із середнім значенням на періоді рівним нулю, то, із врахуванням рівності

$$f(x) - U_\delta(f;x;\Lambda) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\right)K_\delta\left(t;\Lambda\right)dt,$$

матимемо, що

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^r; U_\delta(f;\Lambda)\right)_C \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sup_{f\in W_\infty^r}\omega_2(f;x)K_\delta(t;\Lambda)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\omega_2(\varphi_r;t)K_\delta(t;\Lambda)dt.$$

Тоді, враховуючи рівність (8) із [7, с. 160], з останнього співвідношення отримаємо

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^r; U_\delta(f;\Lambda)\right)_C \le U_\delta\left(\psi_r;0;\Lambda\right) - \psi_r(0),$$

де

$$\psi_r(t) = \varphi_r\left(t + \frac{\pi}{2}(r-1)\right).$$

Оскільки $\varphi_r \in W_\infty^r$, то

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^r; U_\delta(f;\Lambda)\right)_C = U_\delta\left(\psi_r;0;\Lambda\right) - \psi_r(0).$$

Наші подальші міркування повністю збігаються з доведенням теореми 3 роботи [6]. Аналогічно розглядаючи функцію

$$f_r(t) = \frac{1}{4}\psi_{r-1}(t),$$

функціонал g, що визначається функцією $-\operatorname{sign} f_r(t)$, і оператор $A_g f_r$, який визначається наступним чином

$$A_g f_r = g\left(f_r(s+t)\right) = -\int_0^{2\pi} f_r(s+t)\operatorname{sign} f_r(s)ds,$$

отримаємо

$$U_\delta\left(A_g f_r;\Lambda;0\right) - A_g f_r(0) = \mathcal{E}\left(W_\infty^r; U_\delta(f;\Lambda)\right)_C.$$

Оскільки $f_r^{r-1}(t)$ є граничною точкою множини W_1^1, то з врахуванням співвідношення (6) отримаємо рівність (5). Теорему 1 доведено.

Наслідок. Якщо послідовність $\{\lambda_\delta(k)\}_{k=\overline{0,\infty}}$ опукла донизу, тобто $\Delta^2\lambda_\delta(k) \ge 0$, і монотонно прямує до нуля, то згідно з [8, с. 297–298] виконується рівність (5).

2. Застосовуючи доведену вище теорему, надалі для багатьох лінійних методів підсумовування, що задаються послідовністю функцій натурального аргументу, які залежать від деякого дійсного параметра, маючи результати, отримані для випадку рівномірної метрики, можна аналогічні результати отримати і в інтегральній метриці.

Нехай $f \in L$. Розглянемо для прикладу послідовність $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$, таку, що

$$\lambda_\delta(k) = \left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right] e^{-\frac{k}{\delta}},\ \delta > 0.$$

Тоді, згідно з рівністю (1), отримаємо вираз

$$B_\delta(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_\delta(t)dt,$$

який прийнято називати бігармонійним інтегралом Пуассона функції f, де

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right] e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt$$

— бігармонійне ядро Пуассона.

Поклавши $\delta = -\frac{1}{\ln\rho}$, $0 \le \rho < 1$, бігармонійний інтеграл Пуассона запишемо у вигляді

$$B_\rho(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Bigg(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^k\cos kt\Bigg)dt.$$

Означення. *Формальний ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ *називаєтьcя асимптотичним розкладом або асимптотикою функції* $f(\rho)$ *при* $\rho \to 1-0$, *якщо для довільного натурального* $\mathbb{N}$ *при* $\rho \to 1-0$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{N} g_n(\rho) + o\left(g_N(\rho)\right)$$

і для всіх n

$$|g_{n+1}(\rho)| = o\left(|g_n(\rho)|\right).$$

Коротко будемо це записувати наступним чином:

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

В роботі [9] були знайдені повні асимптотичні розклади по степенях $(1-\rho)$ при $\rho \to 1-0$ для величин

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^r, B_\rho\right)_C = \sup_{f\in W_\infty^r}\|f(x) - B_\rho(f,x)\|_C.$$

Використовуючи доведену вище теорему 1, запишемо аналогічні розклади для випадку інтегральної метрики.

Оскільки для бігармонійного інтеграла Пуассона виконуються умови теореми 1, то справедливими будуть наступні твердження:

Теорема 2. *При* $\rho \to 1-0$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}\left(W_1^1; B_\rho\right)_1 \cong \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{2}{\pi}(1-\rho)^2\ln\frac{1}{1-\rho} + \frac{2\ln 2 + 1}{\pi}(1-\rho)^2 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho} + \gamma_k(1-\rho)^k\right\},$$

де

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\Bigg(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\Bigg) - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-1}}.$$

Теорема 3. *Якщо* $r = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$, *то при* $\rho \to 1-0$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}\left(W_1^r; B_\rho\right)_1 \cong \left(\tilde{K}_{r-1} + \frac{1}{2}K_{r-2}\right)(1-\rho)^2 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\Big\{[\alpha_k^r + \alpha_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\alpha_{k-2}^{r-1}](1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho} + [\beta_k^r + \beta_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\beta_{k-2}^{r-1}](1-\rho)^k\Big\},$$

у якому

$$\alpha_k^n = \frac{(-1)^k}{k!}a_n^k,$$

$$\beta_k^n = \frac{(-1)^k}{k!}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{n-i}(0)a_i^k +$$

$$+a_n^k\left(\ln 2+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)+S_k^n\right\},$$

$$\varphi_n(0)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\pi}{2}K_n, & n=2l-1,\\ \frac{\pi}{2}\tilde{K}_n, & n=2l,\end{array}\right. \quad l\in\mathbb{N},$$

де K_n *і* $\tilde{K}_n$ *— відомі константи Фавара – Ахієзера – Крейна*

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\ n=0,1,2,...,$$

$$\tilde{K}_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ n\in\mathbb{N}.$$

$$S_k^n=\left\{\begin{array}{l}0, k\le n,\\ \sum\limits_{i=n+1}^{k}\frac{a_i^k}{2^{i-n}}+\sum\limits_{i=1}^{k-n}A_i^{k-1}a_n^{k-i}, k>n,\end{array}\right.$$

$$a_i^j=\left\{\begin{array}{l}0, i>j,\\ (-1)^j(j-1)!, i=1,\\ a_{i-1}^{j-1}-a_i^{j-1}(j-1), i\le j\le n,\\ a_{i-1}^{j-1}-a_i^{j-1}(j-2), n+1=i\le j,\\ -(i-n-1)a_{i-1}^{j-1}-\\ -a_i^{j-1}(j-i+n-1), n+1<i\le j,\end{array}\right.$$

$$A_k^n=(-1)^{k-1}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k}.$$

Теорема 4. *Якщо* $r=2l$, $l\in\mathbb{N}$, *то при* $\rho\to 1-$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}(W_1^r;B_\rho)_1\cong\left(\tilde{K}_{r-1}+\frac{1}{2}K_{r-2}\right)(1-\rho)^2+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left[\gamma_k^r+\gamma_{k-1}^{r-1}-\frac{1}{2}\gamma_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k,$$

в якому

$$\gamma_k^n=\frac{(-1)^k}{k!}\left\{\sum_{i=1}^{n}\psi_{n-i}(0)\,b_i^k+\sigma_k^n\right\},$$

$$\psi_n(0)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\pi}{4}K_n, & n=2l,\\ \frac{\pi}{4}\tilde{K}_n, & n=2l-1,\end{array}\right. \quad l\in\mathbb{N},$$

$$\sigma_k^n=\left\{\begin{array}{ll}0, & k\le n,\\ \sum\limits_{i=n+1}^{k}\frac{b_i^k}{2^{i-n}}, & k>n,\end{array}\right.$$

$$b_i^j=\left\{\begin{array}{l}0,\ \ i>j,\\ (-1)^j(j-1)!,\ \ i=1,\\ b_{i-1}^{j-1}-b_i^{j-1}(j-1),\ \ i\le j\le n,\\ b_{i-1}^{j-1}-b_i^{j-1}(j-2),\ \ n+1=i\le j,\\ -2(i-n-1)b_{i-1}^{j-1}-\\ -b_i^{j-1}(j-2i+2n),\ \ n+1<i\le j.\end{array}\right.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

3. *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.I. — 427 с.

4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 6. — 207–256.

5. *Стечкин С.Б., Теляковский С.А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1967. — **88**. — С. 20–29.

6. *Моторный В.П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Матем. заметки. — 1974. — **16**, № 1. — С. 15–26.

7. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. — М.: Мир, 1984. — 368 с.

8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.

9. *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 9. — С. 1213–1219.