УДК 517.956

©2010 р. І.М. Ісарюк, І.Д. Пукальський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ І ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено необхідні та достатні умови оптимального керування системою, що описується нелокальною крайовою задачею з обмеженим внутрішнім і фінальним керуваннями. Критерій якості задається сумою об'ємного і поверхневого інтегралів.

The necessary and sufficient conditions of optimal control of the system which is described by nonlocal boundary-value problem with limited internal and final control was established. Criterion of quality is determined by the sum of volume and surface integrals.

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються рівняннями параболічного типу, виникає при розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема при дослідженні процесів нагрівання і охолодження масивних елементів конструкцій, поширення полів температури або концентрації. Вивчення таких задач проводилося в [1 – 3].

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D – обмежена випукла область з $\mathbb{R}^n$, з межею ∂D. В області $Q = [0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t,x,p(x),q(x))$, $p(x)$ і $q(x)$, які реалізують мінімум функціоналу

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t,x,u,u_x,p)dx + \\ + \int_D F_2(x,u(t_1,x,p,q),\dots,u(t_N,x,p,q),q)dx \tag{1}$$

на класі функцій (u,p,q), із яких $(p,q) \in V \equiv \{p \in C^{(\alpha)}(D), p_1 \le p \le p_2, q \in C^{(2+\alpha)}(D), q_1 \le q \le q_2\}$, а $u(t,x,p,q)$ є розв'язком рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = \\ = f(t)\psi(p(x)), \tag{2}$$

що задовольняє початкову умову

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^N d_j(x)u(t_j,x) = \varphi(x,q), \tag{3}$$

а на бічній межі $\Gamma = [0,T) \times \partial D$ крайову умову

$$(Bu)(t,x)|_\Gamma \equiv \Big(\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + b_0(t,x)u\Big)\Big|_\Gamma = \\ = g(t,x). \tag{4}$$

Нехай для задачі (1) – (4) виконуються умови:

1^0. Коефіцієнти a_{ij}, $a_i \in C^{(\alpha)}(Q)$, $i \in \{0,\dots,n\}$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

де π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

2^0. Коефіцієнти $d_j \in C^{(2+\alpha)}(D)$, $j = \{1,\dots,N\}$, $b_k \in C^{(1+\alpha)}(\Gamma)$, $k = \overline{0,n}$, $\sum_{j=1}^N |d_j(x)| \le \mu < 1$, де μ – довільне число і вектор $\overrightarrow{b} = \{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ утворює з нормаллю $\overrightarrow{n}$ в точці $(t,x) \in \Gamma$ гострий кут.

3^0. Функції $f(t) \in C^{(\frac{\alpha}{2})}([0,T)$, $g(t,x) \in C^{(1+\alpha)}(\Gamma)$, $q_k \in C^{(2+\alpha)}(D)$, $p_k \in C^{(\alpha)}(D)$, $k = 1,2$.

4^0. Межа ∂D належить до класу $C^{(2+\alpha)}$.

5^0. $B\varphi|_{x\in\partial D} = g(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)g(t_j,x)$, $\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\frac{\partial d_j(x)}{\partial x_k}\Big)\Big|_\Gamma = 0$.

6^0. Функції $\psi(p(x)) \in C^{(\alpha)}(D)$, $\varphi(x,q) \in C^{(2+\alpha)}(D)$, $F_1(t,x,u,u_x,p) \in C^{(\alpha)}(Q)$, $F_2(x,u(t_1,x,p,q),\ldots,u(t_N,x,p,q),q) \in C^{(2+\alpha)}(D)$ і мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами u_x, p, q і $u(t_k,x,p,q)$ неперервні як функції від (t,x).

Існування та зображення розв'язку задачі (2) – (4). Розглянемо в області Q нелокальну крайову задачу (2) – (4). Нехай $f(t)\psi(p(x)) \equiv f_1(t,x)$, де $f_1(t,x) \in C^{(\alpha)}(Q)$. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1^0 – 5^0. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2) – (4) у просторі $C^{(2+\alpha)}(Q)$ і для нього справедлива нерівність*

$$\|u\|_{C^{(2+\alpha)}(Q)} \le c(\|f_1\|_{C^{(\alpha)}(Q)} + \|\varphi\|_{C^{(2+\alpha)}(D)} + \|g\|_{C^{(1+\alpha)}(\Gamma)}). \tag{5}$$

Доведення. Розв'язок задачі (2) – (4) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = \int_D E(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi + V(t,x), \tag{6}$$

де $E(t,x,\tau,\xi)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі

$$Lu(t,x) = f_1(t,x),$$

$$u(0,x) = \varphi(x,q), \quad Bu(t,x)|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

а $V(t,x)$ – розв'язок задачі з косою похідною

$$LV(t,x) = f_1(t,x),$$

$$V(0,x) = \varphi(x,q), \quad BV(t,x)|_\Gamma = g(t,x). \tag{8}$$

При виконанні умов 1^0 – 5^0 розв'язок задачі (8) існує і для нього правильна оцінка

$$\|V\|_{C^{(2+\alpha)}(Q)} \le c(\|f_1\|_{C^{(\alpha)}(Q)} + \|\varphi\|_{C^{(2+\alpha)}(D)} + \|g\|_{C^{(1+\alpha)}(\Gamma)}).$$

Задовольнивши нелокальну умову (3), одержимо

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)\int_D E(t_j,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi = -\sum_{j=1}^{N} d_j(x)V(t_j,x). \tag{10}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (10) відносно функції $u(0,x)$ шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$u^{(0)}(0,x) = -\sum_{j=1}^{N} d_j(x)V(t_j,x) \equiv F(x),$$

$$u^{(k)}(0,x) = F(x) - \sum_{j=1}^{N} d_j(x)\int_D E(t_j,x,0,\xi)u^{(k-1)}(0,\xi)d\xi.$$

Оскільки $E(t_j,x,0,\xi) \ge 0$, $0 \le \int_D E(t_j,x,0,\xi)d\xi \le 1$, то враховуючи обмеження 2^0, маємо

$$\Big|\sum_{j=1}^{N} d_j(x)\int_D E(t_j,x,0,\xi)d\xi\Big| \le \sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| \le \mu < 1.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$|u^{(k)}(0,x) - u^{(k-1)}(0,x)| \le \mu^k \|V\|_{C(Q)}.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (10) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$u(0,x) = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(u^{(k)}(0,x) - u^{(k-1)}(0,x))$$

і для нього справедлива оцінка

$$|u(0,x)| \le \frac{\mu}{1-\mu}\|V\|_{C(Q)}. \tag{11}$$

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2) – (4). Враховуючи обмеження $\mu < 1$ визначаємо розв'язок інтегрального рівняння (10) у вигляді

$$u(0,x) = F(x) + \int\limits_D R(x,y)F(y)dy, \qquad (12)$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)E(t_j,x,0,\xi) =$$

$$= -\int\limits_D \sum_{j=1}^{N} d_j(x)E(t_j,x,0,\xi)R(y,\xi)dy,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\int\limits_D R(x,y)dy \le \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Підставивши у рівність (12) замість $F(y)$ значення

$$F(y) = -\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\Big[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D G_1(t_j,y,\tau,\xi)\times$$

$$\times f_1(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_D G_1(t_j,y,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2(t_j,y,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S\Big], \qquad (13)$$

де (G_1, G_2) – функція Гріна задачі з косою похідною (8) із [2], і змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$u(0,x) = \sum_{j=1}^{N} \Big[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D \Gamma_1(t_j,x,\tau,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_D \Gamma_1(t_j,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_{\partial D} \Gamma_2(t_j,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S\Big],$$

де

$$\Gamma_m(t_j,x,\tau,\xi) = -d_j(x)G_m(t_j,x,\tau,\xi) -$$

$$- \int\limits_D R(x,y)d_j(y)G_m(t_j,y,\tau,\xi)dy, \quad m = 1,2.$$

Підставляючи значення $u(0,x)$ у поверхневий інтеграл рівності (6), змінивши порядок інтегрування, одержимо зображення

$$u(t,x) = \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_D G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \Big[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_{\partial D} Z_j^{(2)}(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S\Big],$$

де

$$Z_j^{(m)}(t,x,\tau,\xi) = \int\limits_D E(t,x,0,y)\Gamma_m(t_j,y,\tau,\xi)dy,$$

$$m = 1,2, j = \{1,\dots,N\}.$$

Враховуючи формулу для оцінки похідних функції Гріна $E(t,x,\tau,\xi)$ однорідної крайової задачі та співвідношення (10), маємо

$$\|u(0,x)\|_{C^{(2+\alpha)}(Q)} \le c(\|f_1\|_{C^{(\alpha)}(Q)} + \|\varphi\|_{C^{(2+\alpha)}(D)} +$$

$$+ \|g\|_{C^{(1+\alpha)}(\Gamma)}).$$

Тоді враховуючи зображення $u(t,x)$ формулою (6) і оцінку (14), одержуємо нерівність (5).

Критерій оптимальності розв'язку задачі (1) – (4). Позначимо через

$$\overrightarrow{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) =$$

$$= (u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, p),$$

$$\overrightarrow{\omega}=(u(t_1,x,p,q),u(t_2,x,p,q),\dots,$$
$$u(t_N,x,p,q),q)=(\omega_1,\dots,\omega_{N+1}),$$
$$\tilde{G}(t,x,0,\xi)\equiv G_1(t,x,0,\xi)+\sum_{j=1}^{N}Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi),$$
$$\lambda(\xi)=\int\limits_0^T f(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T dt\int\limits_D\frac{\partial F_1}{\partial u_0}(t,x,\overrightarrow{u})\times$$
$$\times G_1(t,x,\tau,\xi)dx+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^{t_j}f(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T dt\times$$
$$\times\int\limits_D\frac{\partial F_1}{\partial u_0}(t,x,\overrightarrow{u})Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^T f(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T dt\int\limits_D\frac{\partial F_1}{\partial u_i}(t,x,\overrightarrow{u})\times$$
$$\times\frac{\partial G_1}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi)dx+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^{t_j}f(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T dt\times$$
$$\times\int\limits_D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial u_i}(t,x,\overrightarrow{u})\frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi)dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^{t_j}f(\tau)d\tau\int\limits_D\frac{\partial F_2}{\partial\omega_j}(x,\overrightarrow{\omega},q)G_1(t_j,x,\tau,\xi)dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_0^{t_k}f(\tau)d\tau\int\limits_D\frac{\partial F_2}{\partial\omega_j}(x,\overrightarrow{\omega},q)\times$$
$$\times Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,\tau,\xi)dx,$$
$$\mu(\xi)\equiv\int\limits_0^T dt\Big[\int\limits_D\frac{\partial F_1}{\partial u_0}(t,x,\overrightarrow{u})\tilde{G}(t,x,0,\xi)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial u_i}(t,x,\overrightarrow{u})\frac{\partial\tilde{G}}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)\Big]dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_D\frac{\partial F_2}{\partial\omega_j}(x,\overrightarrow{\omega},q)\tilde{G}(t_j,x,0,\xi)dx,$$
$$H_\lambda(\xi,u_{n+1})\equiv\lambda(\xi)\psi(u_{N+1})+\int\limits_0^T F_1(t,\xi,\overrightarrow{u})dt,$$
$$H_\mu(\xi,\omega_{N+1})\equiv\mu(\xi)\varphi(\xi,\omega_{N+1})+F_2(\xi,\overrightarrow{\omega},q).$$

Правильні такі теореми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1^0 – 6^0. Тоді*

а) якщо функції H_λ і H_μ є монотонно зростаючими за аргументами u_{n+1} та ω_{N+1} відповідно, то оптимальними керуваннями будуть $p_1(x)$ і $q_1(x)$, а оптимальний розв'язок задачі (1) – (4) має вигляд

$$u(t,x,p,q)\equiv u(t,x,p_1,q_1);$$

б) якщо функція H_λ монотонно зростаюча за аргументом u_{n+1}, а H_μ є монотонно спадна за аргументом ω_{N+1}, то оптимальними керуваннями будуть $p_1(x)$ і $q_2(x)$, а оптимальний розв'язок задачі (1) – (4) має вигляд

$$u(t,x,p,q)\equiv u(t,x,p_1,q_2);$$

в) якщо функція H_λ монотонно спадна за аргументом u_{n+1}, а H_μ є монотонно зростаюча за аргументом ω_{N+1}, то оптимальними керуваннями будуть $p_2(x)$ і $q_1(x)$, а оптимальний розв'язок задачі (1) – (4) має вигляд

$$u(t,x,p,q)\equiv u(t,x,p_2,q_1);$$

г) якщо функції H_λ і H_μ є монотонно спадними за аргументами u_{n+1} та ω_{N+1} відповідно, то оптимальними керуваннями будуть $p_2(x)$ і $q_2(x)$, а оптимальний розв'язок задачі (1) – (4) має вигляд

$$u(t,x,p,q)\equiv u(t,x,p_2,q_2)$$

Доведення. Розглянемо випадок а). Нехай Δp – допустимий приріст керування $u_{n+1}(x)$, а Δq – допустимий приріст керування $\omega_{N+1}(x)$. Через Δu позначимо приріст функції $u(t,x,p,q)$. Тоді Δu в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u)(t,x)=f(t)\Delta\psi(u_{n+1}),$$
$$\Delta u(0,x)+\sum_{j=1}^{N}d_j(x)\Delta u(t_j,x,p,q)=$$
$$=\Delta\varphi(x,\omega_{N+1}),\qquad(15)$$

$$(B\Delta u)(t,x)|_\Gamma = 0.$$

Розглянемо приріст функціоналу:

$$\Delta I(p,q) = I(p+\Delta p, q) - I(p,q) +$$
$$+ I(p+\Delta p, q+\Delta q) - I(p+\Delta p, q) \equiv$$
$$\equiv \Delta_p I(p,q) + \Delta_q I(p,q).$$

Скористаємося формулою Тейлора, тоді

$$\Delta_p I(p,q) = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \Big[\frac{\partial F_1}{\partial u}\Delta_p u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial u_i}\Delta_p u_i +$$
$$+ o(|\Delta_p u|^2) + o(|\Delta_p u_i|^2) + o(|\Delta p|^2)\Big] dx +$$
$$+ \int\limits_D \Big(\sum_{j=1}^N \frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}\Delta_p \omega_j + o(|\Delta_p \omega_j|^2)\Big) dx, \quad (16)$$

а

$$\Delta_q I(p,q) = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \Big[\frac{\partial F_1}{\partial u}\Delta_q u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial u_i}\Delta_q u_i +$$
$$+ o(|\Delta_q u|^2) + o(|\Delta_q u_i|^2)\Big] dx + \int\limits_D \Big[\sum_{j=1}^N \frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}\Delta_q \omega_j +$$
$$+ \frac{\partial F_2}{\partial q}\Delta q + o(|\Delta_q \omega_j|^2) + o(|\Delta q|^2)\Big] dx. \quad (17)$$

Повний приріст функції $\Delta u(t,x,p,q)$ можна записати через частинні прирости наступним чином: $\Delta u(p,q) \equiv \Delta_p u(p,q) + \Delta_q u(p,q)$, де $\Delta_p u(p,q)$ – розв'язок однорідної крайової задачі

$$(L\Delta_p u)(t,x,p,q) = f(t)\Delta_p \psi(u_{n+1}),$$
$$\Delta_p u(0,x) + \sum_{j=1}^N d_j(x)\Delta_p u(t_j,x,p,q) = 0, \quad (18)$$
$$(B\Delta_p u)(t,x,p,q)|_\Gamma = 0,$$

і $\Delta_q u(p,q)$ – розв'язок однорідної крайової задачі

$$(L\Delta_q u)(t,x,p,q) = 0,$$
$$\Delta_q u(0,x) + \sum_{j=1}^N d_j(x)\Delta_q u(t_j,x,p,q) =$$
$$= \Delta_q \varphi(x,\omega_{N+1}), \quad (19)$$
$$(B\Delta_q u)(t,x,p,q)|_\Gamma = 0.$$

За теоремою 1, існує функція Гріна задач (18), (19) і приріст $\Delta u(t,x,p,q)$ зображається формулою

$$\Delta u(t,x,p,q) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi) f(\tau) \times$$
$$\times \Delta_p \psi(p(\xi)) d\xi + \sum_{j=1}^N \int\limits_0^{t_j} Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f(\tau) \times$$
$$\times \Delta_p \psi(p(\xi)) d\xi + \int\limits_D G_1(t,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^N \int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q) d\xi. \quad (20)$$

Знайдемо значення $\Delta u_i(t,x,p,q)$ і $\Delta\omega_j$:

$$\Delta u_i(t,x,p,q) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \frac{\partial G_1}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi) f(\tau) \times$$
$$\times \Delta_p \psi(p(\xi)) d\xi + \sum_{j=1}^N \int\limits_0^{t_j} \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi) f(\tau) \times$$
$$\times \Delta_p \psi(p(\xi)) d\xi + \int\limits_D \frac{\partial G_1}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q) d\xi, \quad (21)$$

$i \in \{1,\dots,n\}$,
і

$$\Delta\omega_j \equiv \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D G_1(t_j,x,\tau,\xi) f(\tau)\Delta_p \psi(p(\xi)) d\xi +$$
$$+ \sum_{k=1}^N \int\limits_0^{t_k} d\tau \int\limits_D Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,\tau,\xi) f(\tau) \times$$
$$\times \Delta_p \psi(p(\xi)) d\xi + \int\limits_D G_1(t_j,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q) d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{D} Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,0,\xi)\Delta_q\varphi(\xi,q)d\xi. \quad (22)$$

Підставивши формули (20) – (22) у (16), (17) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p,q)=\int\limits_D \Delta_p H_\lambda(\xi,p)\Delta p d\xi+$$

$$+\int\limits_D \Delta_q H_\mu(\xi,q)\Delta q d\xi. \quad (23)$$

Якщо $p=p_1(x)$, $q=q_1(x)$, H_λ і H_μ задовольняють умови теореми 2, то при досить малих Δp і Δq маємо, що $\Delta I(p_1,q_1)>0$.

Нехай $p_1(x)$ і $q_1(x)$ – оптимальні керування, тобто $\Delta I>0$. Перевіримо виконання умов теореми 2 а). Якщо функції H_λ та H_μ не є монотонно зростаючими за аргументами u_{n+1} і ω_{N+1} відповідно, то D_pH_λ і D_qH_μ – знакозмінні величини, тобто $D_pH_\lambda>0$ в $D^+\subset D$ і $D_qH_\mu>0$ в $D_1^+\subset D$, а $D_pH_\lambda<0$ і $D_qH_\mu<0$ в $D^-\subset D\setminus D^+$ і $D_1^-\subset D\setminus D_1^+$ відповідно.

Використавши теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(p,q)=D_pH_\lambda(x^+,p)\int\limits_{D^+}\Delta p d\xi-$$

$$-|D_pH_\lambda(x^-,p)|\int\limits_{D^-}\Delta p d\xi+D_qH_\mu(x^+,q)\times$$

$$\times\int\limits_{D_1^+}\Delta q d\xi-|D_qH_\mu(x^-,p)|\int\limits_{D_1^-}\Delta q d\xi.$$

При досить малих Δp і Δq знак ΔI визначається чотирма доданками суми. Різниця перших двох і наступних двох змінює знак в залежності від величин $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} D_1^-$, Δp і Δq. При досить малій $\operatorname{mes} D^+$ і $\Delta p>0$, $\Delta q>0$ маємо, що $\Delta I<0$ і навпаки, $\Delta I>0$, якщо мала $\operatorname{mes} D_1^-$ і $\Delta p>0$, $\Delta q>0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Випадки б) – в) доводяться аналогічно.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1^0 – 6^0 і функції $H_\lambda(x,p)$ і $H_\mu(x,q)$ не є монотонними за аргументами p і q відповідно. Для того, щоб керування $(p^{(0)},q^{(0)})\in V$ і відповідний розв'язок $u(t,x,p^{(0)},q^{(0)})$ крайової задачі (2) – (4) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

а) функція $H_\lambda(x,p)$ за аргументом p має в точці $p^{(0)}$ мінімальне значення;

б) функція $H_\mu(x,q)$ за аргументом q має в точці $q^{(0)}$ мінімальне значення;

в) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y}=(y_0,y_1,\dots,y_n,y_{n+1})$ і $(t,x)\in\overline{Q}$ виконується нерівність

$$K_1(t,x,\overrightarrow{u})=\sum_{ij=0}^{n+1}\frac{\partial^2F_1(t,x,\overrightarrow{u})}{\partial u_i\partial u_j}y_iy_j>0;$$

г) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{N+1})$ і $(t,x)\in\overline{Q}$ виконується нерівність

$$K_2(x,\overrightarrow{\xi})=\sum_{kl=1}^{N+1}\frac{\partial^2F_2(x,\overrightarrow{\omega})}{\partial\omega_k\partial\omega_l}\xi_k\xi_l>0.$$

Доведення. Достатність. Нехай виконуються умови 1) – 4). Запишемо приріст функціоналу за допомогою формули Тейлора

$$\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})=\int\limits_D\Big(D_pH_\lambda(x,p^{(0)})\Delta p+$$

$$+\frac{1}{2}K_1(t,x,\Delta_pu)+\frac{1}{2}K_1^*(t,x,\Delta_pu)\Big)dx+$$

$$+\int\limits_D\Big[D_qH_\mu(x,q^{(0)})\Delta q+\frac{1}{2}K_2(x,\Delta_q\omega)+$$

$$+\frac{1}{2}K_2^*(x,\Delta_q\omega)\Big]dx,$$

де

$$K_1(t,x,\Delta_pu)=\sum_{ij=0}^{n+1}\frac{\partial^2F_1}{\partial u_i\partial u_j}(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)})\Delta_pu_i\times$$

$$\times\Delta_pu_j+\lambda(t,x)D_{pp}^2f(t,x,p^{(0)})(\Delta p)^2,$$

$$K_1^*(t,x,\Delta_pu)=\sum_{ij=0}^{n+1}(D_{u_iu_j}^2F_1(t,x,\overrightarrow{\tilde{u}}^{(0)})-$$

$$-D_{u_iu_j}^2F_1(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)}))\Delta_pu_i\Delta_qu_j,$$

$$K_2(x,\Delta_q\omega)=\sum_{kl=1}^{N+1}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\omega_l\partial\omega_k}\Delta_q\omega_k\times$$
$$\times\Delta_q\omega_l+\mu(x)D^2_{qq}\varphi(x,q)\Delta q^2,$$
$$K_2^*(x,\Delta_q\omega)=\sum_{kl=1}^{N+1}(D^2_{\omega_k\omega_l}F_2(x,\overrightarrow{\tilde{\omega}}^{(0)})-$$
$$-D^2_{\omega_k\omega_l}F_2(x,\overrightarrow{\omega}^{(0)}))\Delta_q\omega_l\Delta_q\omega_k.$$

Позначимо через $\delta_1\equiv\inf\limits_{|y|=1}K_1(t,x,\overrightarrow{y})$ і $\delta_2\equiv\inf\limits_{|\xi|=1}K_2(x,\overrightarrow{\xi})$. За умовами в) і г) теореми маємо, що $\delta_1(t,x)>0$, $\delta_2(x)>0$ для всіх $x\in D$, $(t,x)\in\overline{Q}$. Тоді

$$K_1(t,x,\Delta_pu)\geq\delta_1(t,x)|\Delta_pu|^2;$$
$$K_1^*(t,x,\Delta_pu)\leq c|\Delta_pu|^{2+\alpha};\tag{24}$$
$$K_2(x,\Delta_q\omega)\geq\delta_2(x)|\Delta_q\omega|^2;$$
$$K_2^*(x,\Delta_q\omega)\leq c|\Delta_q\omega|^{2+\alpha}.\tag{25}$$

При досить малих Δp і Δq таких, що $|\Delta_pu|\leq\left(\frac{1}{2c}\delta_1(t,x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ і $|\Delta_q\omega|\leq\left(\frac{1}{2c}\delta_2(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, одержуємо оцінку функціоналу

$$\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})\geq\frac{1}{4}\int\limits_D\delta_1(t,x)|\Delta_pu|^2dx+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_D\delta_2(x)|\Delta_q\omega|^2dx.$$

Отже, $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ – оптимальні керування, а $u(t,x,p^{(0)},q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок.

Необхідність. Нехай $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ – оптимальні керування, тобто $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})>0$. Якщо припустити, що $D_pH_\lambda\neq0$ і $D_qH_\mu\neq0$, то $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})$ змінюватиме знак в залежності від знаку Δp і Δq, що суперечить наявності мінімуму функціоналу $I(p,q)$ в точці $(p^{(0)},q^{(0)})$. Визначимо поведінку величин D_pH_λ і D_qH_μ у околі точок $(p^{(0)},q^{(0)})$. Для цього запишемо приріст функціоналу у вигляді

$$\Delta I=\int\limits_D[D_pH_\lambda(x,p^{(0)+\theta\Delta p})\Delta p+o(|\Delta_pu|^2)]dx+$$
$$+\int\limits_D[D_qH_\mu(x,q^{(0)}+\theta\Delta q)\Delta q+o(|\Delta_q\omega_j|^2)]dx.$$

Для того, щоб виконувалася нерівність $\Delta I>0$, необхідно, щоб виконувалися такі нерівності: $D_pH_\lambda>0$ при $p>p^{(0)}$; $D_qH_\mu>0$ при $q>q^{(0)}$ і $D_pH_\lambda<0$ при $p<p^{(0)}$; $D_qH_\mu<0$ при $q<q^{(0)}$. Тому в точці $p^{(0)}$ функція $H_\lambda(x,p)$ досягає мінімального значення, а в точці $q^{(0)}$ функція $H_\mu(x,q)$ досягає мінімального значення.

Якщо $K_1(t,x,\Delta_pu)\leq0$ і $K_2(x,\Delta_q\omega)\leq0$ і в області Q, то за умовою 1) одержимо, що $\Delta I\leq0$, що неможливо.

Нехай $K_1(t,x,\Delta_pu)>0$ в області $Q^+\subset Q$ і $K_2(x,\Delta_q\omega)>0$ в $Q^+\subset Q$ та $K_1(t,x,\Delta_pu)=-|K_1(t,x,\Delta_pu)|<0$ і $K_2(x,\Delta_q\omega)=-|K_2(x,\Delta_q\omega)|<0$ в області $Q^-\subset Q\setminus Q^+$ і $D^-\subset D\setminus D^+$ відповідно. Використовуючи теорему про середнє для приросту ΔI, одержимо

$$\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})=\iint\limits_{Q^+}K_1(t,x,\Delta_pu)dtdx-$$
$$-\iint\limits_{Q^-}|K_1(t,x,\Delta_pu)|dtdx+$$
$$+\iint\limits_{Q}K_1^*(t,x,\Delta_pu)dtdx+$$
$$+\iint\limits_{D^+}K_2(x,\Delta_q\omega)dx-\iint\limits_{D^-}|K_2(x,\Delta_q\omega)|dx+$$
$$+\iint\limits_{D}K_2^*(x,\Delta_q\omega)dx=K_1(t^+,x^+,\Delta_pu^+)\times$$
$$\times\operatorname{mes}Q^+-|K_1(t^-,x^-,\Delta_pu^-)|\operatorname{mes}Q^-+$$
$$+\iint\limits_{Q^+}K_1^*(t,x,\Delta_pu)dtdx+K_2(x^+,\Delta_q\omega^+)\times$$
$$\times\operatorname{mes}D^+-|K_2(x^-,\Delta_q\omega^-)|\operatorname{mes}D^-+$$
$$+\iint\limits_{D}K_2^*(x,\Delta_q\omega)dx.$$

Різниці цих доданків змінюють знак ΔI в залежності від величини значень $\operatorname{mes}Q^+$, $\operatorname{mes}Q^-$, $\operatorname{mes}D^+$ і $\operatorname{mes}D^-$: при досить малій $\operatorname{mes}Q^-$ і $\operatorname{mes}D^-$ приріст функціоналу $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})>0$. Отже, при знакозмінних формах $K_1(t,x,\Delta_p u)$ і $K_2(x,\Delta_q \omega)$ функціонал не досягає мінімального значення.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* $1^0 - 6^0$. *Тоді*

1) якщо функція $H_\lambda(x,p)$ – монотонно спадна (зростаюча), а $H_\mu(x,q)$ задовольняє умови:

а) функція $H_\mu(x,q)$ за аргументом q має в точці $q^{(0)}$ мінімальне значення;

б) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_{N+1})$ і $(t,x) \in \overline{Q}$ виконується нерівність

$$K_2(x, \overrightarrow{\xi}) > 0,$$

то оптимальними керуваннями будуть p_2 (p_1) і $q^{(0)}$, а оптимальний розв'язок задачі (1) – (4) має вигляд

$$u(t,x,p,q) \equiv u(t,x,p_2,q^{(0)})$$

$$\Big(u(t,x,p,q) \equiv u(t,x,p_1,q^{(0)})\Big);$$

2) якщо функція $H_\mu(x,q)$ – монотонно зростаюча (спадна), а $H_\lambda(x,p)$ задовольняє умови:

а) функція $H_\lambda(x,p)$ за аргументом p має в точці $p^{(0)}$ мінімальне значення;

б) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y} = (y_0,y_1,\ldots,y_n,y_{n+1})$ і $(t,x) \in \overline{Q}$ виконується нерівність

$$K_1(t,x,\overrightarrow{y}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 F_1(t,x,\overrightarrow{u})}{\partial u_i \partial u_j} y_i y_j > 0,$$

то оптимальними керуваннями будуть $p^{(0)}$ і q_1 (q_2), а оптимальний розв'язок задачі (1) – (4) має вигляд

$$u(t,x,p,q) \equiv u(t,x,p^{(0)},q_1)$$

$$\Big(u(t,x,p,q) \equiv u(t,x,p^{(0)},q_2)\Big).$$

Доведення теореми 4 випливає із теорем 2 і 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – С. 443.

2. *Матийчук М.И.* Задача с косой производной для параболических уравнений с минимальной гладкостью и вырождениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – Вып. 40, № 4. – С. 907-921.

3. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

4. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина общих неоднородных граничных задач для параболических по И.Г. Петровскому систем. – К.: Препринт Ин-та матем. АН УССР, 1968. – 52 с.

5. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т матем. НАН України, 1999. – 176 с.

6. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.

7. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

8. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 478 с.