УДК 517

©2010 р. П.В. Задерей, Р.В. Товкач

Національний університет технологій та дизайну, Київ,
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

ДО НЕРІВНОСТІ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Встановлено оцінку відхилення функцій від їх сум Фур'є через найкращі наближення цих функцій.

We obtain the estimate for deviation of functions from their Fourier sums by the best approximation by trigonometric polynomials.

1. Нехай $\mathbb{R}^d$ – d-вимірний евклідовий простір з дійсними елементами $x=(x_1,\dots,x_d)$; $(x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$; $T^d=[0,2\pi)^d$, а $L_p(T^d)$, $1\le p\le\infty$ — простір вимірних 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x)$, $x\in T^d$, зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(T^d)}=\|f\|_p=\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{T^d}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

$$1\le p<\infty\ ,$$

$$\|f\|_\infty=\|f\|_{C(T^d)}=\|f\|_C=\max_{x\in T^d}|f(x)|.$$

Означимо через $\square_n$ і $\diamond_n$ множини векторів з цілочисельними координатами:

$$\square_n=\{k=(k_1,\dots,k_d):|k_j|\le n,\ k_j\in\mathbb{Z},$$
$$j=\overline{1,d}\},$$
$$\diamond_n=\{k=(k_1,\dots,k_d):$$
$$|k|=|k_1|+\dots+|k_d|\le n,\ k_j\in\mathbb{Z},\ j=\overline{1,d}\},$$

а через $\Gamma_n^\square$ і $\Gamma_n^\diamond$ означимо множини тригонометричних поліномів з гармоніками із $\square_n$ і $\diamond_n$, тобто

$$\Gamma_n^\square=\{t_n^\square(x):\ t_n^\square(x)=\sum_{k\in\square_n}a_ke^{i(k,x)},\quad a_k\in\mathbb{C}\},$$

$$\Gamma_n^\diamond=\{t_n^\diamond(x):\ t_n^\diamond(x)=\sum_{k\in\diamond_n}a_ke^{i(k,x)},\quad a_k\in\mathbb{C}\}.$$

Найкращим наближенням функцій $f\in L_p(T^d)$ в метриці $L_p(T^d)$ поліномами з $\Gamma_n^\square$ або $\Gamma_n^\diamond$ називають величини

$$E_n^\square(f)_p=\inf_{t_n^\square\in\Gamma_n^\square}\|f(x)-t_n^\square(x)\|_p,$$

$$E_n^\diamond(f)_p=\inf_{t_n^\diamond\in\Gamma_n^\diamond}\|f(x)-t_n^\diamond(x)\|_p.$$

При $d=1$

$$E_n(f)_p=\inf_{t_n\in\Gamma_n}\|f(x)-t_n(x)\|_p,$$

де $\Gamma_n=\{t_n(x):\ t_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}a_ke^{ikx},$ $k\in\mathbb{Z},\ a_k\in\mathbb{C}\}$.

Для $f\in L_p(T^d)$ введемо частинні суми ряду Фур'є:

$$S_n^\square(f;x)=\sum_{k\in\square_n}c_ke^{i(k,x)}, \tag{1}$$

$$S_n^\diamond(f;x)=\sum_{k\in\diamond_n}c_ke^{i(k,x)}, \tag{2}$$

де $c_k=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{T^d}f(t)e^{-i(k,t)}dt$ - коефіцієнти Фур'є функції f.

Через $\rho_n^\square(f)_p$ і $\rho_n^\diamond(f)_p$ будемо позначати величини

$$\rho_n^\square(f)_p=\|f(x)-S_n^\square(f;x)\|_p\ ,$$

$$\rho_n^\diamond(f)_p=\|f(x)-S_n^\diamond(f;x)\|_p\ .$$

При $d=1$

$$\rho_n(f)_p=\|f(x)-S_n(f;x)\|_p\ ,$$

$$S_n(f;x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

А. Лебег [1] довів нерівність

$$\rho_n(f)_p \le BE_n(f)_p \ln n\ , \quad p=1,\infty\ .$$

К.І. Осколков [2] встановив оцінку, яка більш точно враховує властивості послідовності $\{E_n(f)_p\}$, $p=1,\infty$, а саме

$$\rho_n(f)_p \le B\sum_{k=0}^{n}\frac{E_{n+k}(f)_p}{k+1}, \quad p=1,\infty\ .$$

С.П. Байбородов [3] для функцій $f(\cdot)\in L_p(T^d)$, $1\le p\le\infty$, показав, що

$$\rho_n^{\square}(f)_p \le B(d)\sum_{k=0}^{s} E_{n+k}^{\square}(f)_p\frac{\ln^{d-1}(k+2)}{k+1}\ ,$$

де

$$s=\min(n,[e^\theta])\ ,\theta=\begin{cases}1/(p-1), 1\le p\le 2,\\ p-1,\quad 2\le p\le\infty.\end{cases}$$

2. Нами доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $f\in C(T^d)$ і її частинна сума визначається формулою (2). Тоді*

$$\rho_n^{\diamond}(f)_p \le B(d)\sum_{k=0}^{n} E_{n+k}^{\diamond}(f)_p\frac{\ln^{d-1}(k+2)}{k+1}\ ,$$

$$p=1,\infty\ . \tag{3}$$

Доведення. При встановленні цієї теореми будемо використовувати ідеї доведення теореми 1 з роботи [2]. Для цього введемо деякі позначення і визначення. Нехай $\mu=\max\{k:\ k\le 2n-1,\ \ E_k^{\diamond}(f)_C>0\}$ і визначимо натуральні числа $n_0,n_1,\dots,n_p$ наступним чином:

$$n_0=n;\ n_{\nu+1}=\min\{k:\ \ E_k^{\diamond}(f)_\infty\le\frac{1}{2}E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty\},$$

$$\nu=0,1,\dots,p-1\ ,$$

де $p=\max\{k:\quad E_{n_k}^{\diamond}(f)_\infty > E_\mu^{\diamond}(f)_\infty\}$, $n_{p+1}=\mu+1$.

Відмітимо такі властивості послідовності $\{n_\nu\}$, $\nu=\overline{0,p+1}$ (див.[2]), які випливають з її означення:

$$n_0=n<n_1<\dots<n_p<n_{p+1}=\mu+1\le 2n; \tag{4}$$

$$E_{n_{\nu+1}}^{\diamond}(f)_\infty\le\frac{1}{2}E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty,\ \nu=0,1,\dots,p-1; \tag{5}$$

$$E_k^{\diamond}(f)_\infty\ge\frac{1}{2}E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty\ , \tag{6}$$

якщо $k+1\le n_{\nu+1},\ \ \nu=0,1,\dots,p.$

Для сум

$$\delta_k=\sum_{\nu:\ n_{\nu+1}\ge k+1}E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty \tag{7}$$

справедлива оцінка

$$\delta_k\le B(d)E_k^{\diamond}(f)_\infty\ ,\quad k=n,\ n+1,\dots,\mu\ , \tag{8}$$

яка випливає із властивостей (4)-(6).

Нехай $\widehat{t}_{n_\nu}^{\diamond}\in\Gamma_{n_\nu}^{\diamond}$ — поліном найкращого наближення функції $f\in C(T^d)$, а

$$V_n^{\diamond}(f;x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}S_k^{\diamond}(f;x)$$

— суми Валле Пуссена [4]. В роботі [5] встановлено, що

$$\|f(x)-V_n^{\diamond}(f;x)\|_C\le B(d)E_n^{\diamond}(f)_\infty\ . \tag{9}$$

При $d=1$ така нерівність була встановлена Валле Пуссеном [4].

Тепер, відповідно до (9), будемо мати

$$\delta_n^{\diamond}(f)_\infty\le\|f(x)-V_n^{\diamond}(f;x)\|_C+$$

$$+\|V_n^{\diamond}(f;x)-S_n^{\diamond}(f;x)\|_C\le$$

$$\le B(d)E_n^{\diamond}(f)_\infty+\|V_n^{\diamond}(f;x)-S_n^{\diamond}(f;x)\|_C\ . \tag{10}$$

Оскільки

$$V_n^{\diamond}(f;x)-S_n^{\diamond}(f;x)=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{2n-k+1}{n+1}\sum_{|l|=k}c_l e^{i(l,x)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\times$$

$$\times \int\limits_{T^d} f(x-u) \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} e^{i(l,u)} du =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{(2\pi)^d} \times$$

$$\times \int\limits_{T^d} f(x-u) \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} e^{i(l,u)} du \ ,$$

то, позначивши через $t_{n_\nu}^{\diamond *}(u)$ поліном найкращого наближення з гармоніками з $\diamond_{n_\nu}$ для функції $f(x)$ та врахувавши ортогональність системи $\{e^{i(l,u)}\}$, знайдемо

$$V_n^\diamond(f;x) - S_n^\diamond(f;x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{T^d} \left[f(x-u) - t_{n_\nu}^{\diamond *}(x-u) \right] \times$$

$$\times \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} e^{i(l,u)} du \ .$$

Далі, використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, будемо мати

$$\|V_n^\diamond(f;x) - S_n^\diamond(f;x)\|_C \le \sum_{\nu=0}^{p} E_{n_\nu}^\diamond(f)_\infty \frac{1}{(2\pi)^d} I_\nu \ , \tag{11}$$

де

$$I_\nu = \frac{1}{(2\pi)^d} \times$$

$$\times \int\limits_{T^d} \left| \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} \sum_{|l|=n_\nu+s} e^{i(l,u)} \right| du \ .$$

Тепер оцінимо інтеграл I_ν. Для спрощення викладу оцінку проведемо для випадку $d=2$. При $d>2$ міркування аналогічні.Таким чином

$$I_\nu \le I_\nu^{(0,0)} + I_\nu^{(1,0)} + I_\nu^{(0,1)} + I_\nu^{(1,1)} \ ,$$

де

$$I_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{T^2} | \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} \times$$

$$\times \sum_{(-1)^{\alpha_1} l_1 + (-1)^{\alpha_2} l_2 = n_\nu + s} e^{i(l,u)} | du \ ,$$

$$\alpha_i = 0,1 \ , \quad i = 1,2 \ .$$

Оцінимо $I_\nu^{(1,0)}$:

$$I_\nu^{(1,0)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{T^2} | \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{-l_1+l_2=n_\nu+s \\ l_1<0,\ l_2>0}} e^{i(l,u)} e^{i\frac{n_\nu}{2}u_1} e^{i\frac{n_\nu}{2}u_2} | du =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{T^2} | \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{-j_1+j_2=s \\ j_1 \le \frac{n_\nu}{2},\ j_2 \ge -\frac{n_\nu}{2}}} e^{i(j,u)} | du \ .$$

Застосувавши перетворення Абеля, знайдемо

$$\sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} \left(D_s(u) - D_{s-1}(u) \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} D_s(u) -$$

$$- \sum_{s=0}^{n_{\nu+1}-n_\nu-1} \frac{2n-n_\nu-s}{n+1} D_s(u) =$$

$$= \frac{2n-n_{\nu+1}+1}{n+1} D_{n_{\nu+1}-n_\nu}(u) - \frac{2n-n_\nu}{n+1} D_0(u) +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} D_s(u) \ ,$$

де

$$D_s(u) = \sum_{\substack{-j_1+j_2=s \\ j_1 \le \frac{n_\nu}{2},\ j_2 \ge -\frac{n_\nu}{2}}} e^{i(j,u)} \ .$$

Таким чином,

$$I_\nu^{(1,0)} \leq B(2)(\int\limits_{T^2} |D_{n_{\nu+1}-n_\nu}(u)|du+$$

$$+\frac{1}{n+1}\int\limits_{T^2} |\sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} D_s(u)|du).$$

Далі, використовуючи результати робіт [6] або [7] , будемо мати

$$I_\nu^{(1,0)} \leq B(2)\ln^2(n_{\nu+1}-n_\nu) \leq B(2)\ln^2(n_{\nu+1}-n).$$

Аналогічно оцінюються і решта інтегралів $I_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Тому в d-вимірному випадку будемо мати

$$I_\nu \leq B(d)\ln^d(n_{\nu+1}-n+1) =$$

$$= B(d)\sum_{k=n+1}^{n_{\nu+1}}(\ln^d(k-n+1)-\ln^d(k-n)) \leq$$

$$\leq B(d)\sum_{k=n+1}^{n_{\nu+1}}\frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}. \qquad (12)$$

Підставляючи оцінку (12) в (11) , отримуємо

$$\|V_n^\diamond(f;x)-S_n^\diamond(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq B(d)\sum_{\nu=0}^{p}E_{n_\nu}^\diamond(f)_\infty\sum_{k=n+1}^{n_{\nu+1}}\frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}. \qquad (13)$$

Змінюючи в правій частині співвідношення (13) порядок сумування і використовуючи (8), знайдемо

$$\|V_n^\diamond(f;x)-S_n^\diamond(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq B(d)\sum_{k=n+1}^{n_1}\frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}\times$$

$$\times(E_{n_0}^\diamond(f)_\infty+\cdots+E_{n_p}^\diamond(f)_\infty)+$$

$$+B(d)\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}\times$$

$$\times(E_{n_1}^\diamond(f)_\infty+\cdots+E_{n_p}^\diamond(f)_\infty)+\cdots+$$

$$+B(d)\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}E_{n_p}^\diamond(f)_\infty \leq$$

$$\leq B(d)\sum_{k=n+1}^{\mu+1}E_k^\diamond(f)_\infty\frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}.$$

З останньої нерівності та співвідношення (10) випливає твердження теореми 1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lebesgue H.* Sur la représentation trigonométrique approchée des fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. — 1910. — **38**. — P. 184-210.

2. *Осколков К.И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. — 1975. — **18**, №4. — С. 515-526.

3. *Байбородов С.П.* Константы Лебега и приближение функций прямоугольными суммами Фурье // Мат. заметки. — 1983. — **34**, №1. — С. 77-90.

4. *Ch. J. dela Valle-Poussin* Lecons sur l'approximation des functions d'une variable reelle. — Paris: Guathier–Villars, 1919.

5. *Задерей Н.М., Товкач Р.В.* Наближення періодичних функцій багатьох змінних сумами Фейера // Теорія наближень функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – **7** , №1. — С. 341-347.

6. *Белинский Э.С.* Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье // Сб. Метрические вопросы теории функций и отображений. — 1977. — вып. 8, Киев, "Наукова думка". — С. 19-40.

7. *Байбородов С.П.* Константы Лебега многогранников // Мат. заметки. — 1982. — **32**, №6. — С. 817-822.

8. *Теляковский С.А.* Равномерная ограниченность некоторых тригонометрических полиномов многих переменных // Мат. заметки. — 1987. — **42**, №1. — С. 33-39.