УДК 517.956

©2010 р. І.М.Довжицька, В.А.Літовченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості для одного класу параболічних рівнянь типу Шилова із гладкими змінними коефіцієнтами.

We constructed the fundamental solution of Cauchy problem and investigated it basic properties for a class of Shilov type parabolic equations with smooth variable coefficients.

Досліджуючи проблему розширення класу параболічних за Г.Є.Шиловим систем рівнянь із сталими коефіцієнтами, Я.І.Житомирський у [1] означує новий клас параболічних систем типу Шилова із молодшими коефіцієнтами, залежними від просторової змінної. Для таких систем методом послідовного наближення він установлює існування розв'язку задачі Коші з гладкими обмеженими початковими даними, а відтак, і коректну розв'язність цієї задачі в класі обмежених функцій.

У пропонованій статті розглядається клас рівнянь Житомирського з невід'ємним родом та обмеженими коефіцієнтами, залежними від часу й просторової змінної. Для рівнянь з цього класу методом Леві побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1, ..., m\}$, $m \in \mathbb{N}$; T – фіксоване число з $(0; +\infty)$; $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $n \geq 1$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів; i — уявна одиниця; $|z|_* := |z_1| + \ldots + |z_n|$, якщо $z := (z_1; \ldots; z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\Pi_M := \{(t; x)|\ t \in M, x \in \mathbb{R}^n\}$, $M \subset \mathbb{R}$, $\Pi_T^2 := \{(t, x; \tau, \xi)|\ 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\}$.

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\partial_t u(t; x) = \sum_{|k|_* \leq p} a_k(t; x) i^{|k|_*} \partial_x^k u(t; x),$$

$$t \in (0; T], x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Припускатимемо, що права частина цього рівняння допускає зображення

$$\sum_{|k|_* \leq p} a_k(t; x) i^{|k|_*} \partial_x^k u(t; x) = \{P_0(t, i\partial_x) +$$

$$+ P_1(t, x; i\partial_x)\} u(t; x),$$

де

$$P_0(t, i\partial_x) := \sum_{|k|_* \leq p} a_{0,k}(t) i^{|k|_*} \partial_x^k,$$

$$P_1(t, x; i\partial_x) := \sum_{|k|_* \leq p_1} a_{1,k}(t; x) i^{|k|_*} \partial_x^k,$$

причому відповідне рівняння

$$\partial_t u(t; x) = P_0(t, i\partial_x) u(t; x), (t; x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

є параболічним за Шиловим з показником параболічності h, $0 < h \leq p$ [2].

Нехай для рівняння (1) виконуються ще такі умови:

A) $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu/p_0)$, $\quad 0 \leq \mu \leq 1$ (тут μ – рід рівняння (2), а p_0 – зведений порядок цього рівняння [2]);

B) коефіцієнти $a_{0,k}(t)$– визначені на відрізку $[0; T]$ неперервні функції, $a_{1,k}(t, x)$ - неперервні за змінною t, нескінченно диференційовні за змінною x обмежені функції в шарі $\Pi_{[0;T]}$.

Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1) називатимемо функцію $Z(t, x; \tau, \xi)$, визначену для всіх $(t; x) \in \Pi_{(\tau;T]}$ і залежну від параметричної точки $(\tau; \xi) \in \Pi_{[0;T)}$ таку, що:

1) Z як функція $(t;x)$ задовольняє рівняння (1) в шарі $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$;

2) виконується граничне співвідношення

$$Z(t,x;\tau,\cdot) \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} \delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Шварца (тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака).

Позначимо фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2) через $G(t;\cdot)$, $t \in (0;T]$. Правильне таке твердження [3]:

$$\forall T>0\ \exists\delta>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \exists c>0\ \forall t\in(0;T]$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n:\ |\partial_x^k G(t;x)| \le ct^{-\frac{n+|k|_*}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$\alpha := \mu/p_0, \quad \mu \ge 0. \qquad (3)$$

2. Побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші. Шукатимемо фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1) у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t-\tau;x-\xi)+$$
$$+\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n} G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \equiv$$
$$\equiv G(t-\tau;x-\xi)+W(t,x;\tau,\xi), \qquad (4)$$

де G – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2), а Φ – деяка функція, вибір якої здійснюватимемо так, щоб функція Z була розв'язком рівняння (1). Користуючись означенням розв'язку диференціального рівняння, з (1) прийдемо до інтегрального рівняння

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy, \qquad (5)$$

в якому

$$K(t,x;\tau,\xi) := P_1(t,x;i\partial_x)G(t-\tau;x-\xi).$$

Розв'язуючи це рівняння методом послідовних наближень, дістанемо такий формальний розв'язок:

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t,x;\tau,\xi), \qquad (6)$$

де $K_1 = K$, а

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y)\times$$
$$\times K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy, \quad l>1.$$

Для встановлення збіжності ряду (6) та обґрунтування коректності здійснених раніше перетворень, дослідимо властивості повторних ядер K_l.

Згідно з оцінкою (3) та обмеженістю коефіцієнтів рівняння (1) на множині $\Pi_{(0;T]}$, маємо

$$|K_1(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2. \qquad (7)$$

Застосувавши оцінку (7) та нерівність

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big((t-\beta)(\beta-\tau)\Big)^{-n\alpha}\times$$
$$\times e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}dy \le$$
$$\le \frac{c_\varepsilon}{(t-\tau)^{n\alpha}e^{\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}},\ \delta>0, \qquad (8)$$

яка виконується для всіх $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\beta\in(\tau;t)$, $0\le\tau<t\le T$ і $\varepsilon\in(0;1)$, причому величина c_ε залежить лише від ε [4, с. 312], одержимо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le c^2 c_\varepsilon B(\alpha_0,\alpha_0)(t-\tau)^{\alpha_0-\frac{n+p_1}{h}}\times$$
$$\times e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,\ \varepsilon\in(0;1),$$

де $\alpha_0 := 1+\alpha n-\frac{n+p_1}{h}>0$, а $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функція Ейлера.

Продовжуючи аналогічні міркування, для $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і $\varepsilon\in(0;1)$ одержимо

$$|K_l(t,x;\tau,\xi)| \le c^l\Big(\prod_{j=1}^{l-1} c_{(j\varepsilon)}B(\alpha_0,j\alpha_0)\Big)\times$$
$$\times(t-\tau)^{(l-1)\alpha_0-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Звідси приходимо до існування номера l_* і сталої c_*, $c_* \geq c$, таких, що для всіх $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$ виконуються такі оцінки:

$$|K_l(t, x; \tau, \xi)| \leq c_*(t-\tau)^{l\alpha_0 - (1+\alpha n)} \times$$
$$\times e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad l \in \mathbb{N}_{l_*-1}; \tag{9}$$

$$|K_{l_*}(t, x; \tau, \xi)| \leq c_* e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{10}$$

Далі, використовуючи нерівність [4, с.312]

$$e^{-\delta_* \left\{ \left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}} \leq$$
$$\leq e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

оцінки (7), (10) та рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*} \left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*} \|z\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} dz < +\infty$$

і

$$\int_\tau^t (t-\beta)^{\alpha_0 - 1} d\beta = (t-\tau)^{\alpha_0} B(\alpha_0, 1),$$

для повторних ядер K_l при $l > l_*$ дістанемо оцінку

$$|K_{l_*+l}(t, x; \tau, \xi)| \leq c_* \big(E(t-\tau)^{\alpha_0}\big)^l \times$$
$$\times e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \prod_{j=0}^{l-1} B(\alpha_0, 1 + j\alpha_0),$$
$$(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2 \tag{11}$$

(тут $l \in \mathbb{N}$, а E – додатна стала, незалежна від l).

Врахувавши оцінки (9), (10) і (11), маємо

$$|\Phi(t, x; \tau, \xi)| \leq c_* l_* (t-\tau)^{\alpha_0 - (1+\alpha n)} \times$$
$$\times \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\big(ET^{\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)\big)^l}{\Gamma(1 + l\alpha_0)}\right) e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2,$$

де $\Gamma(\cdot)$– гамма-функція Ейлера.

Зваживши тепер на збіжність додатного числового ряду

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l}{\Gamma(1 + l\alpha_0)}, \quad A > 0,$$

приходимо до такого допоміжного твердження.

Лема 1. *Для всіх $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$ функціональний ряд (6) є абсолютно збіжним рядом, для суми якого справджується нерівність*

$$|\Phi(t, x; \tau, \xi)| \leq c_0 (t-\tau)^{\alpha_0 - (1+\alpha n)} e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

(тут константа $c_0 > 0$ залежить лише від T).

Наслідок 1. Функція Φ, яка визначається рівністю (6), є звичайним розв'язком інтегрального рівняння (5).

Твердження цього наслідку випливає із структури рівняння (5) та зображення (6) функції Φ, якщо врахувати рівність

$$\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \beta, y) \left(\sum_{l=1}^{\infty} K_l(\beta, y; \tau, \xi) \right) dy =$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_l(\beta, y; \tau, \xi) dy.$$

Правильність цієї рівності випливає з одержаних оцінок повторних ядер, леми 1 та теореми про почленне інтегрування функціональних рядів [6, с. 697].

Твердження леми 1 разом із оцінкою (3) забезпечують для всіх $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W з рівності (4). Таким чином, функція $Z(t, x; \tau, \xi)$ коректно визначена формулою (4) на всій множині Π_T^2.

Щоб дослідити властивості гладкості функції Z, оцінимо похідні від повторних ядер K_l.

Оскільки

$$K_1(t, x; \tau, \xi) = P_1(t, x; i\partial_{(x-\xi)}) G(t-\tau; x-\xi),$$

то врахувавши умову B) та оцінку (3), одержимо

$$|\partial_x^q \partial_\xi^r K_1(t,x;\tau,\xi)| \le c_{q,r}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|_*}{h}} \times$$

$$\times e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \{q,r\}\in\mathbb{Z}_+^n, (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$$

(тут оціночні сталі не залежать від t,τ,x і ξ).

При $l>1$ оцінювання $|\partial_x^q\partial_\xi^r K_l(t,x;\tau,\xi)|$ зводиться до оцінювання виразів

$$|\partial_\xi^r\partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)|,\ |\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-z)|,$$

$$|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l-1}(t,x-z;\tau,\xi)|, |\partial_\xi^r K_{l-1}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)|.$$

Врахувавши умову B) та оцінку (3), для всіх $\{q,r\}\in\mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\eta,\xi\}\in\mathbb{R}^n$, $t\in(\tau;T]$ і $\tau\in[0;T)$ маємо:

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)\right| \le c_{r,q}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|_*}{h}}\times$$

$$\times e^{-\delta\left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \qquad (12)$$

$$\left|\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-\xi)\right| \le c_q(t-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}}\times$$

$$\times e^{-\delta\left(\frac{\|\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (13)$$

При оцінюванні виразу $\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|$ приходимо до нерівностей

$$\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_{l,r}(\varepsilon)\Big(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\Big)\times$$

$$\times(t-\tau)^{(l-1)\alpha_0-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \qquad (14)$$

які виконуються для всіх $\{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{Z}_+^n$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, $\varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, а відтак, і до існування такого номера l_*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_*}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_{l_*,r}(\varepsilon)\times$$

$$\times\Big(\prod_{j=1}^{l_*-1} B(\alpha_0,j\alpha_0)\Big) e^{-\delta(1-(l_*-1)\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

(тут величини $c_{l_*,r}(\varepsilon)>0$ не залежать від змінних t,τ,η і ξ, які змінюються вищезазначеним способом).

Оскільки

$$\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\eta+\xi) = \partial_\zeta^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\zeta)\Big|_{\zeta=\eta+\xi},$$

$$\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x-z;\tau,\xi) = \partial_\xi^r\partial_y^q K_l(t,y;\tau,\xi)\Big|_{y=x-z},$$

то вирази $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\eta+\xi), \partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x-z;\tau,\xi)$ і $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)$ є однотипними. Тому, враховуючи одержані оцінки (12), (13), (14) і (8), матимемо:

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_{l,\varepsilon}^{r,q}(t-\tau)^{l\alpha_0-\left(1+\alpha n+\frac{|r+q|_*}{h}\right)}\times$$

$$\times e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\Big(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0,j\alpha_0)\Big), \qquad (15)$$

для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$, $\varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Перейдемо тепер до знаходження оцінок виразу $\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\right|$, придатних для встановлення диференційовності функції Φ за просторовими змінними. Безпосередньо з (15) приходимо до існування такого номера l^*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l^*}(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$

$$\le c_{l^*,\varepsilon}^{r,q} e^{-\delta(1-(l^*-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\Big(\prod_{j=1}^{l^*-1} B(\alpha_0,j\alpha_0)\Big),$$

$$\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n, (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$$

Тоді із (14) і (15) одержуємо, що для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ і $0\le\tau<t\le T$

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l_+}(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_+}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

де $l_+ := \max\{\lambda_*, l^*\}$.

Далі, як і при одержанні оцінки (11), переконуємося в існуванні додатних сталих E і K, таких, що

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_++l}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_*(E(t-\tau)^{\alpha_0})^l\times$$

$$\times e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\right) \qquad (16)$$

і

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l_+ + l}(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_*\Big(EK^{\frac{|r+q|_*}{h}}\Big)^l \times$$

$$\times(t-\tau)^{l\alpha_0-\frac{|r+q|_*}{h}} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, 1+j\alpha_0)\right), \qquad (17)$$

для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ і $l\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Правильне наступне твердження.

Лема 2. *Функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 є нескінченно диференційовною за кожною із просторових змінних x і ξ. Для похідних цієї функції виконуються такі оцінки:*

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q\Phi(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_1(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n+\frac{|r+q|_*}{h})}\times$$

$$\times e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \qquad (18)$$

$$\left|\partial_\xi^r\Phi(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_2(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)}\times$$

$$\times e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ 0\le\tau<t\le T,\ \{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n \qquad (19)$$

(тут $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, а оціночні сталі c_1, c_2 і δ_* не залежать від t,τ,x,ξ та η).

Доведення. Зафіксуємо довільним способом т. $(x_0;\xi_0)$ із $\mathbb{R}^{2n}$ і розглянемо у цьому просторі кулю $\mathbb{K}^\delta_{(x_0;\xi_0)}$ з центром у т. $(x_0;\xi_0)$ та радіусом $\delta>0$. Тоді, врахувавши структуру (6) функції Φ та нескінченну диференційовність повторних ядер K_l за просторовими змінними на $\mathbb{R}^{2n}$, приходимо до висновку, що для нескінченної диференційовності у т. $(x_0;\xi_0)$ функції Φ необхідно встановити лише рівномірну збіжність за змінними x і ξ на множині $\mathbb{K}^\delta_{(x_0;\xi_0)}$, $\delta>0$, формально продиференційованого ряду (6) (при кожних фіксованих t і τ, $0\le\tau<t\le T$):

$$\sum_{l=1}^{\infty}\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\quad(\forall\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n). \qquad (20)$$

Безпосередньо з оцінок (15) і (17) для $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ і $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ маємо

$$\Big|\sum_{l=1}^{\infty}\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\Big| \le$$

$$\le c_1\Big(t-\tau\Big)^{\alpha_0-\left(1+\alpha n+\frac{|r+q|_*}{h}\right)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Звідси одержуємо рівномірну збіжність стосовно x і ξ ряду (20), а відтак, і виконання оцінки (18).

Аналогічним способом, завдяки оцінкам (14) і (16), переконуємось у правильності оцінки (19).

Лему доведено.

Теорема 1. *Функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ є нескінченно диференційовною за кожною із просторових змінних x і ξ на множині Π_T^2, причому*

$$\exists\delta>0\,\forall\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n\,\exists c>0\,\forall(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2:$$

$$|\partial_\xi^r\partial_x^q Z(t,x;\tau,\xi)| \le$$

$$\le c(t-\tau)^{-\frac{n+|r+q|_*}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (21)$$

Доведення. Питання про диференційовність функції Z за просторовими змінними зводиться до питання про можливість диференціювання за цими змінними під знаком інтеграла в об'ємному потенціалі W. Тому досить встановити рівномірну стосовно змінних x і ξ, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, збіжність інтеграла

$$I_*(t,x;\tau,\xi) := \int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^r\partial_x^q(G(t-\beta;x-y)\times$$

$$\times\Phi(\beta,y;\tau,\xi))dy,\ 0\le\tau<t\le T,\ \{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n.$$

Врахувавши оцінки (3), (18) і (19), а також (8), дістанемо

$$|I_*(t,x;\tau,\xi)| \le c_3(t-\tau)^{\alpha_0-\frac{n+|r+q|_*}{h}}\times \qquad (22)$$

$$\times e^{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ \{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\ (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,$$

де c_3 – додатна стала, незалежна від t,τ,x і ξ.

Звідси одержуємо рівномірну стосовно змінних x і ξ збіжність інтеграла I_*, а відтак, і нескінченну диференційовність за цими змінними функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2.

Оцінка (21) випливає з (3) і (22) та нерівності

$$|\partial_x^r\partial_\xi^q W(t,x;\tau,\xi)| \le |I_*(t,x;\tau,\xi)|,$$

$\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n, (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$

Теорему доведено.

Наслідок 2. Для всіх t і $\tau, 0\le\tau<t\le T$, а також $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ виконується рівність

$$\{P_0(t,i\partial_x)+P_1(t,x;i\partial_x)\}W(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\big(\{P_0(t,i\partial_x)+$$
$$+P_1(t,x;i\partial_x)\}G(t-\beta;x-y)\big)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy.$$

Перейдемо до дослідження властивостей гладкості функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ стосовно змінних t і τ.

Лема 3. *Об'ємний потенціал W є диференційовною функцією за змінною t на $(\tau;T]$ такою, що*

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi)=\Phi(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_t G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$$

Доведення. Згідно з означенням похідної

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi)=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}\Big\{\int_\tau^{t+\Delta}\tilde V_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)d\beta-$$
$$-\int_\tau^t\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)d\beta\Big\},$$

де

$$\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,$$

тому доведення диференційовності $W(t,x;\tau,\xi)$ за змінною t зводиться до встановлення існування границі з правої частини цієї рівності. Зрозуміло, що ця границя існуватиме, якщо існуватимуть рівні між собою відповідні односторонні границі:

$$I_\pm:=\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\pm\Delta}\Big\{\int_\tau^{t\pm\Delta}\tilde V_\beta(t\pm\Delta,x;\tau,\xi)d\beta-$$
$$-\int_\tau^t\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)d\beta\Big\}.$$

Безпосередньо з оцінки

$$\int_{\mathbb{R}_n}|\partial_t G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)|dy\le$$
$$\le c(t-\tau)^{-\alpha n}(t-\beta)^{\alpha n-\frac{n+p}{h}}(\beta-\tau)^{\alpha_0-1}\times$$
$$\times e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\quad 0\le\delta<\beta<t\le T,$$
$$\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\tag{23}$$

яка одержується з огляду на нерівність (3) та твердження леми 1, а також на те, що функція G є розв'язком рівняння (2), дістаємо диференційовність функції $\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)$ за змінною t у кожній точці проміжку $(\beta;T], \beta>\tau$, та виконання такої рівності:

$$\partial_t\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t G(t-\beta;x-y))\times$$
$$\times\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy,\ \ 0\le\tau<\beta<t\le T,$$
$$\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n.\tag{24}$$

Далі, скориставшись тим, що

$$\frac{1}{\pm\Delta}\int_t^{t\pm\Delta}\tilde V_\beta(t\pm\Delta,x;\tau,\xi)d\beta=$$
$$=\tilde V_{(t\pm\theta\Delta)}(t\pm\Delta,x;\tau,\xi)\underset{\pm\Delta\to0}{\longrightarrow}\Phi(t,x;\tau,\xi),$$
$$\frac{1}{\pm\Delta}\int_\tau^t(\tilde V_\beta(t\pm\Delta,x;\tau,\xi)-\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi))d\beta=$$
$$=\int_\tau^t\partial_t\tilde V_\beta(t\pm\theta\Delta,x;\tau,\xi)d\beta,\quad\theta\in(0;1),$$

а також очевидним зображенням

$$\frac{1}{\pm\Delta}\Big\{\int_\tau^{t\pm\Delta}\tilde V_\beta(t\pm\Delta,x;\tau,\xi)d\beta-$$
$$-\int_\tau^t\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi)d\beta\Big\}=$$

$$= \frac{1}{\pm\Delta}\Big\{ \int\limits_{t}^{t\pm\Delta} \tilde{V}_\beta(t\pm\Delta, x; \tau, \xi) d\beta +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} (\tilde{V}_\beta(t\pm\Delta, x; \tau, \xi) - \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)) d\beta \Big\},$$

одержуємо, що

$$I_\pm = \Phi(t, x; \tau, \xi) +$$

$$+ \lim_{\Delta\to+0} \int\limits_{\tau}^{t} \partial_t \tilde{V}_\beta(t\pm\Delta, x; \tau, \xi) d\beta, \ \theta \in (0; 1).$$

Урахувавши тепер рівність (24), приходимо до висновку, що для доведення вихідної леми досить обґрунтувати правильність рівності

$$\lim_{\Delta\to 0} \int\limits_{\tau}^{t} \partial_t \tilde{V}_\beta(t+\Delta, x; \tau, \xi) d\beta =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} \Big(\lim_{\Delta\to 0} \partial_t \tilde{V}_\beta(t+\Delta, x; \tau, \xi) \Big) d\beta. \qquad (25)$$

Оцінимо підінтегральний вираз із лівої частини цієї рівності. Скориставшись ще раз рівністю (24), а також тим, що G – розв'язок рівняння (2), оцінками (23), (3) і (18), виділяючи скрізь залежність від Δ, одержимо

$$\Big| \int\limits_{\tau}^{t} \partial_t \tilde{V}_\beta(t+\Delta, x; \tau, \xi) d\beta \Big| \leq c(t-\tau)^{2\alpha_0 - (1+\alpha n + \frac{p}{h})},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, 0 < |\Delta| < \frac{1}{2}(t-\tau), \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де додатна стала c не залежить від Δ. Ця оцінка характеризує рівномірну збіжність інтеграла з лівої частини рівності (25) та забезпечує виконання цієї рівності.

Лема доведена.

Теорема 2. *Для функції Z виконується граничне співвідношення*

$$Z(t, x; \tau, \cdot) \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} \delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Шварца.

Доведення. Оскільки G – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2), то для кожного елемента $\varphi \in S$ виконується граничне співвідношення

$$< G(t-\tau; x - \cdot), \varphi(\cdot) > \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} \varphi(x),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \, x \in \mathbb{R}^n, \, \varphi \in S.$$

Тому для доведення вихідної теореми досить установити лише граничне співвідношення

$$< W(t, x; \tau, \cdot), \varphi(\cdot) > \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} 0,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \, x \in \mathbb{R}^n, \, \varphi \in S. \qquad (26)$$

Безпосередньо із структури потенціала W переконуємося, що співвідношення (26) виконуватиметься, якщо існуватиме така додатна стала c_0, що для всіх $\beta \in [\tau; t]$, $0 \leq \tau < t \leq T$ і $y \in \mathbb{R}^n$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \Big| \leq c_0 \qquad (27)$$

(тут риска зверху означає комплексну спряженість).

Таким чином, доведення теореми 2 зводиться до встановлення оцінки (27).

Використовуючи структуру (6) функції Φ, а також нерівність

$$\Big| J_l(\beta, \tau, y) \Big| := \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K_l(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \Big| \leq c_l,$$

$$\varphi \in S, \beta \in [\tau; t], \, 0 \leq \tau < t \leq T, y \in \mathbb{R}^n,$$

яка встановлюється шляхом поєднання одержаних раніше оцінок повторних ядер K_l із властивостями елементів простору S швидко спадних гладких на $\mathbb{R}^n$ функцій, зважаючи при цьому на існування такого номера l_*, що

$$\Big| \sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi) \Big| \leq c_* e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \, 0 \leq \tau < t \leq T$$

(див. обґрунтування правильності твердження леми 1), знаходимо, що для всіх $\varphi \in S$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)}\varphi(\xi)d\xi\right| \leq \sum_{l=1}^{l_*} \Big|J_l(\beta, \tau, y)\Big| +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(\beta, y; \tau, \xi)\right| |\varphi(\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{l_*} c_l + c_* \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| d\xi \equiv c_0 < +\infty,$$

$$\beta \in [\tau; t],\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

де константа c_0 не залежить від β, τ, t і y.

Отже, оцінка (27) виконується.

Теорему доведено.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови A) і B), тоді функція Z, яка визначається рівністю* (4), *є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1).*

Доведення. Зваживши на рівності (5) та

$$\partial_t G(t; z) = P_0(t, i\partial_z)G(t; z),$$

лему 3 і наслідок 2, для всіх $(t; x) \in \Pi_{(\tau;0]}$, $\tau \in [0; T)$, і $\xi \in \mathbb{R}^n$ одержуємо

$$\partial_t Z(t, x; \tau, \xi) = \partial_t G(t-\tau; x-\xi) + \partial_t W(t, x; \tau, \xi) =$$

$$= P_0(t, i\partial_x)G(t-\tau; x-\xi) + \Phi(t, x; \tau, \xi) +$$

$$\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\partial_t G(t-\beta; x-y)\Big)\Phi(\beta, y; \tau, \xi)dy =$$

$$= \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t-\tau; x-\xi) +$$

$$+ \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}W(t, x; \tau, \xi) =$$

$$= \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}Z(t, x; \tau, \xi).$$

Отже, функція $Z(t, x; \tau, \xi)$, як функція змінних $(t; x)$ на $\Pi_{(\tau;T]}$, є звичайним розв'язком рівняння (1) у кожній фіксованій точці $(\tau; \xi) \in \Pi_{[0;T)}$.

Якщо врахувати тепер твердження теореми 2, то прийдемо до висновку, що для функції Z виконуються всі умови з означення фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1).

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – **23**. – С. 925 – 932.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.

3. *Литовченко В.А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, №4. – С. 809 – 821.

4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1969. – 800 с.