УДК 517.9+517.95

©2014 р. Я.М. Дрінь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

Встановлена теорема про розв'язність нелокальної двоточкової задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами.

We prove a theorem on the solvability of a nonlocal two-point problem for parabolic pseudodifferential equations with nonsmooth symbols.

В середині минулого століття синтез багатовимірних сингулярних інтегральних рівнянь та рівнянь з частинними похідними призвів до поняття інтегро-диференціального оператора (Кальдерон, Зигмунд), що є лінійною комбінацією частинних похідних з коефіцієнтами – сингулярними інтегральними операторами. Систематичне дослідження таких операторів призвело до зміни теорії, в результаті чого перетворення Фур'є витіснило сингулярні інтеграли, а самі оператори почали називатися псевдодиференціальними. Псевдодиференціальні оператори характеризуються своїм символом аналогічно тому, як диференціальні оператори характеризуються своєю характеристичною формою.

На теперішній час значних результатів досягнуто у теорії задачі Коші та крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. Це теорія еліптичних рівнянь у згортках у просторах Соболєва-Слободецького та її застосування до дослідження загальних мішаних задач у циліндричних областях для параболічних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (М.С. Агранович, М.Й. Вишик, Г.І. Ескін); коректна розв'язність задачі Коші у просторах Соболєва та їх аналогах для ПДР з аналітичними символами в області $G \subset \mathbb{R}^n$ (Ю.А. Дубинський); теореми про розв'язність диференціально-операторних рівнянь у шкалі банахових просторів цілих експоненціального типу векторів оператора рівняння, які дозволяють довести розв'язність задачі Коші для ПДР з аналітичними символами (Я.В. Радино, С.Р. Умаров); теорія граничних значень розв'язків абстрактних диференціально-операторних рівнянь (М.Л. Горбачук, В.І, Горбачук та їхні послідовники); класи аналітичних на $\mathbb{R}^n$ символів псевдодиференціювання з характерними для степеневих функцій властивостями та теореми про коректну розв'язність задачі Коші для відповідних ПДР та систем рівнянь з початковими умовами в просторах Лебега (японські математики М.Наґасе, Р.Шінкаі, Ц.Цуцумі); класи єдиності задачі Коші для систем рівнянь у згортках, які є псевдодиференціальними системами з цілими аналітичними символами (Б.Г. Гуревич) та ін.

У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з ПДО, побудованими за точково-негладкими однорідними символами, відомі результати про структуру та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК). За допомогою цих результатів одержується зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона, досліджені якісні властивості розв'язків ППДР та систем таких рівнянь (зокрема, поведінка розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємність, теореми типу Ліувілля). Відзначимо при цьому, що асимптотика ФРЗК для таких рівнянь вже не є експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Ці результати є науковим надбанням ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема, С.Д. Ейдельмана і Я.М. Дріня (які першими визначили ППДО з негладкими символами і розпочали дослідження задачі Коші для відповідних ППДР), М.В. Федорюка, А.Н. Кочубея, В.В. Городецького, В.А. Літовченка та ін.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача. Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, Б.Й. Пташник, О.А. Самарський, В.І. Чесалін та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, дослідження питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

На сьогодні нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних **псевдодиференціальних** рівнянь не досліджені. Тому розглянемо нелокальну задачу Діріхле для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами.

1. Постановка нелокальної задачі та формула для розв'язку.

Нехай $T>0$, $\mu>1$, $\beta>0$, $\gamma>0$ – числові параметри, $\Pi=\{(t,x)\,\big|\,0<t<T, x\in\mathbb{R}^n\}$. Припустимо, що символ A: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ задовольняє умови

а) $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$, $|\sigma|=1$ $\exists a_0>0$: $\operatorname{Re}A(\sigma)\geq a_0>0$;

б) $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\sigma\neq 0$, $\forall æ=(æ_1,\ldots,æ_n)$, $|æ|\leq N$, $N\geq 2(n+[\gamma])$ $\exists D_\sigma^{æ}A(\sigma)$ $\exists C_N>0$:

$$|D_\sigma^{æ}|\leq C_N|\sigma|^{\gamma-|æ|};$$

в) $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\exists C>0$ $\exists\beta$, $0<\beta\leq\gamma-\varepsilon$ $\exists\varphi$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\varphi\in C(\mathbb{R}^n)$:

$$|\varphi(x)|\leq C(1+|x|)^\beta;$$

г) $\forall\varepsilon>0$, $\forall(t,x)\in\Pi$ $\exists C>0$, $\exists\beta\leq\gamma-\varepsilon$ $\exists f$: $\Pi\to\mathbb{R}$, $f\in C(\Pi)$:

$$|f(t,x)|\leq C(1+|x|)^\beta,$$

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq C|x-y|^\lambda,\quad 0<\lambda<1.$$

Позначимо через u: $\Pi\to\mathbb{R}$ функцію, $u\in C_t^1\times S(\mathbb{R}^n)$, $F_{x\to\sigma}[u(t,x)](t,\sigma)$, $F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)](t,x)$ – відповідне пряме і обернене перетворення Фур'є функції u,

$$A_\gamma u(t,x)\equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[A(\sigma)F_{x\to\sigma}[u(t,x)]],\quad (t,x)\in\Pi,$$

псевдодиференціальна операція (ПДО) з символом A: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Якщо $u\in C^{1,[\gamma]+1}_{t,x}(\Pi)$, $[\gamma]$ – ціла частина $\gamma\geq 1$, то ПДО A_γ визначена в $[1,2]$ і трактується як гіперсингулярна інтегральна операція (ГСІО).

Розглянемо крайову задачу

$$u_t(t,x)+A_\gamma u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi,\gamma>0,\tag{1}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0}=u(t,x)|_{t=T}+\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\tag{2}$$

де A_γ – ПДО з символом $A(\sigma)$.

Розв'язок задачі (1), (2) формально шукаємо за допомогою перетворення Фур'є по просторових змінних, тому додатково припустимо, що функції u, f, φ допускають це перетворення, при цьому $F_{x\to\sigma}[f(t,x)]\equiv\tilde f(t,\sigma)$, $F_{x\to\sigma}[\varphi(x)]\equiv\tilde\varphi(\sigma)$. Шукаючи розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u(t,x)\equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)](t,x),\quad (t,x)\in\Pi,\tag{3}$$

одержимо для v: $\Pi\to\mathbb{R}^1$ таку задачу

$$v'_t(t,\sigma)+A(\sigma)v(t,\sigma)=\tilde f(t,\sigma),\quad (t,\sigma)\in\Pi,\tag{4}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0}=u(t,\sigma)|_{t=T}+\tilde\varphi(\sigma),\quad \sigma\in\mathbb{R}^n.\tag{5}$$

Розв'язок задачі (4), (5) набуває вигляду

$$v(t,\sigma,\mu)=\frac{\mu}{\mu-\exp\{-A(\sigma)T\}}\times$$

$$\times\int_0^t\exp\{-A(\sigma)(t-\tau)\}\tilde f(\tau,\sigma)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\mu-\exp\{-A(\sigma)T\}}\int_t^T\exp\{-A(\sigma)(T+t+\tau)\}\times$$

$$\times\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau+\frac{\exp\{A(\sigma)t\}}{\mu-\exp\{-A(\sigma)T\}}\tilde{\varphi}(\sigma), \quad (6)$$

$$(t,\sigma)\in\Pi,\mu>1.$$

Підставивши (6) в (3) отримаємо формулу для розв'язку задачі (1), (2):

$$u(t,x,\mu)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma,\mu)d\sigma=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\exp\{-A(\sigma)t\}\tilde{\varphi}(\sigma)\exp\{i(x,\sigma)\}}{\mu-\exp\{-A(\sigma)T\}}+$$

$$+\mu(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\exp\{i(x,\sigma)\}}{\mu-\exp\{-A(\sigma)T\}}\times$$

$$\times\Big\{\int\limits_0^t\exp\{-A(\sigma)(t-\tau)\}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau\Big\}d\sigma+$$

$$+(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\exp\{i(x,\sigma)\}}{\mu-\exp\{-A(\sigma)T\}}\times$$

$$\times\Big\{\int\limits_t^T\exp\{-A(\sigma)(T+t-\tau)\}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau\Big\}d\sigma, \quad (7)$$

$(t,x\in\Pi)$, $\mu>1$.

Введемо позначення

$$G(t,T,x,\mu)\equiv(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)-A(\sigma)t\}\times$$

$$\times(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}d\sigma, \quad (8)$$

$(t,x)\in\Pi$, $\mu>1$,

$$I_1=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,T,x-\xi,\mu)\varphi(\xi)d\xi, \quad (9)$$

$$(t,x)\in\Pi,\mu>1,$$

$$I_2=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (10)$$

$$(t,x)\in\Pi,\mu>1,$$

$$I_3=\int\limits_t^T d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (11)$$

$$(t,x)\in\Pi,\mu>1,$$

де G визначена формулою (8).

Тоді формула (7) набуває вигляду

$$u(t,x)=I_1+\mu I_2+I_3,$$

де I_j $(j=1,2,3)$ визначені формулами (9) – (11) відповідно.

2. Дослідження властивостей функції G та дії на неї диференціальних та псевдодиференціальних операцій

Оскільки $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\forall t_0>0$ і $t\geq t_0$

$$|\exp\{i(x,\sigma)-A(\sigma)t\}|(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}\leq$$

$$\leq\exp\{-A(\sigma)t_0\}(\mu-1)^{-1},$$

то для довільної смуги $\{(t,x)\Big|t_0\leq t\leq T,x\in\mathbb{R}^n\}$, $t_0>0$ інтеграл (8) збігається рівномірно, тому функція G є неперервною в Π.

Аналогічно доводиться диференційовність по t і x функції G. Розглянемо, наприклад, першу похідну по t. Формально продиференціювавши (8) під знаком інтеграла дістанемо вираз

$$-A(\sigma)\exp\{i(x,\sigma)-A(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1},$$

модуль якого оцінюється величиною

$$A(\sigma)\exp\{-A(\sigma)(t_0-\varepsilon)\}\exp\{-A(\sigma)\varepsilon\}(\mu-1)^{-1},$$

$$0<\varepsilon<t_0.$$

Оскільки $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$ $\exists c>0$ таке, що $|A(\sigma)\exp\{-A(\sigma)(t_0-\varepsilon)\}|<C$, то мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-A(\sigma)\varepsilon\}$. Отже, інтеграл похідної від (8) збігається рівномірно і тому похідну можна застосувати під знаком інтеграла.

Проведемо оцінку функції G та її похідних. Очевидно, що $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\forall\, u>1$

$$(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}=$$

$$=\mu^{-1}(1-\mu^{-1}\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k1}\exp\{-A(\sigma)kT\},$$

$$G(t,T,x,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}G_0(t+kT,x), \quad (12)$$

$$(t,x)\in\Pi,$$

де

$$G_0(t+kT,x)=$$
$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)-A(\sigma)(t+kT)\}d\sigma,\tag{13}$$
$$(t,x)\in\Pi,$$

$G_0(t,x)$ – фундаментальний розв'язок вихідного рівняння, для якого вірними є оцінки (див. [1–3]) при $\gamma>0$:

$$|D_x^{æ}G_0(t,x)|\leq C_{æ}t(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(n+\gamma+|æ|)},\tag{14}$$
$$(t,x)\in\Pi,$$
$$|D_t^{æ}G_0(t,x)|\leq C(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(n+\gamma)},\tag{15}$$
$$(t,x)\in\Pi.$$

Тоді

$$|D_x^{æ}G(t,T,x,\mu)|\leq$$
$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{-k-1}(t+kT)}{[(t+kT)^{1/\gamma}+|x|]^{n+\gamma+|ae|}},\quad (t,x)\in\Pi,\tag{16}$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x,\mu)|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}[(t+kT)^{1/\gamma}+$$
$$+|x|]^{-(n+\gamma)},\quad (t,x)\in\Pi.\tag{17}$$

Оскільки

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,T,x,\mu)=-F^{-1}_{\sigma\to x}[A(\sigma)\times$$
$$\times\exp\{-A(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}],\tag{18}$$

$(t,x)\in\Pi,$

$$A_\gamma G(t,T,x,\mu)=F^{-1}_{\sigma\to x}[A(\sigma)\times$$
$$\times\exp\{-A(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}],\tag{19}$$

$(t,x)\in\Pi$, то з (18), (19) отримуємо, що

$$\Big(\frac{\partial}{\partial}+A_\gamma\Big)G(t,T,x,\mu)=0,\quad (t,x)\in\Pi,\mu>0.\tag{20}$$

Для $A(\sigma)\equiv|\sigma|$ ця рівність перевіряється безпосередньо.

Вірною є рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,T,,x-y,\mu)dy=\frac{1}{\mu-1},\tag{21}$$
$$(t,x)\in\Pi,\mu>1.$$

яка випливає з рівності (20) ([1, стор. 919], [2]) та (12). Враховуючи (17) із (21) отримаємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial G}{\partial t}(t,T,x-y,\mu)=0.\tag{22}$$

Оцінка (16) забезпечує збіжність інтегралів (9) – (11) для зростаючих степенево функцій φ (умова в)) та f (умова г)).

3. Дослідження властивостей функції u та дії на неї диференціальних та псевдодиференціальних операцій

Функція u, визначена рівністю (7), є сумою трьох доданків. Розглянемо кожен доданок окремо. Інтеграл I_1 (9) визначений для $(t,x)\in\Pi$, $\mu>1$, його можна диференціюваня по t і застосовувати до нього ПДО A_γ під знаком інтеграла. Законність таких операцій забезпечується оцінками функції G, її похідних і $A_\gamma G$ (14) – (19). Враховуючи (20) отримаємо, що

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+A_\gamma\Big)I_1(t,x,T,\mu)=0.\tag{23}$$

Розглянемо I_2, визначений виразом (10) і запишемо його у вигляд

$$I_2(t,x,T,\mu)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mu^{-k-1}\sum_{k=1}^{\infty}G_0(t+kT-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times f(\tau,\xi)d\xi\equiv I_{20}+I_{21}.\tag{24}$$

Існування похідної по t і формула

$$\frac{\partial}{\partial t}I_{20}(t,x,T,\mu)=$$
$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t-\tau,x-\xi)[f(\tau,\xi)-$$
$$-f(\tau,x)]d\xi+f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi,\tag{25}$$

доведені в [4, 5] (див. також формулу (31) із [1]).

Вірною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{21}(t,x,T,\mu) =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi) d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(kT, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (26)$$

$$(t,x) \in \Pi.$$

Розглянемо I_3, визначений виразом (11). Аналогічно, як для I_2, похідну від функції I_3 по t можна обчислювати за формулою похідної від інтеграла, залежного від параметра t у випадку, коли межі інтеграла також залежать від цього параметра t. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t} I_3(t,x,T,\mu) = \int\limits_t^T d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} \frac{\partial}{\partial t} G_0(T(1+l)+t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi) d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(T(1+k), x-\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi. \quad (27)$$

Об'єднуючи (25) – (27) дістанемо такий вираз для похідної по t двох останніх доданків із (7):

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mu I_2 + I_3] = \int\limits_0^T d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)[f(\tau,\xi) -$$

$$-f(\tau,x)] d\xi + f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi. \quad (28)$$

Для доведення формули (28) досить виділити два таких окремих твердження.

Твердження 1. Нехай

$$G(t,T,x-\xi,\mu) \equiv \frac{1}{\mu} G_0(t,x-\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t+kT, x-\xi),$$

$$0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, |\mu| > 1,$$

а функція

$$\mu I_2(t,x,T,\mu) \equiv \mu \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, T, x-\xi, \mu) f(\tau,\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv$$

$$\equiv I_{20}(t,x) + I_{21}(t,x,T,\mu).$$

Тоді для об'ємного потенціала I_{20} вірною є формула

$$\frac{\partial I_{20}(t,x)}{\partial t} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times (f(\tau,\xi) - f(\tau,x)) d\xi + f(t,x).$$

Доведення. При $\theta > 0$ розглянемо функцію

$$I_{20} = \int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

похідна по t від якої обчислюється за відомою формулою

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{20} = \int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-(t-\theta), x-\xi) f(t-\theta,\xi) d\xi,$$

яка набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}I_{20}=\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}G_0(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\xi)-f(\tau,x))d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(\theta,x-\xi)f(t-\theta,\xi)d\xi.$$

Для третього доданка маємо, що

$$\lim_{\theta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(\theta,x-\xi)f(t-\theta,\xi)d\xi=f(t,x).$$

Справді,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(\theta,x-\xi)f(t-\theta,\xi)d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(\theta,x-\xi)\times$$

$$\times(f(t-\theta,\xi)-f(t-\theta,x))d\xi+f(t-\theta,x).$$

Якщо провести заміну змінних $x_i-\xi_i\equiv z_i\theta^{1/\gamma}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, то права частина набуде вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(1+z)(f(t-\theta,x-z\theta^{1/\gamma})-$$

$$-f(t-\theta,x))dz+f(t-\theta,x).$$

Із неперервності функції f по просторових змінних x_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, випливає, що для довільних фіксованих $(t,x)\in\Pi_T$, $z\in\mathbb{R}^n$, і для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta_{\varepsilon,t,x,z}$ таке, що $|f(t-\theta,x-z\theta^{1\gamma})-f(t-\theta,x)|<\varepsilon$, якщо $|z\theta^{1/\gamma}|<\delta$. Отже, границя вірна.

Для першого доданка маємо, що

$$\Big|\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}G_0(t-\tau,x-\xi)(f(\tau,\xi)-$$

$$-f(\tau,x))d\xi\Big|\leq$$

$$\leq\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-\xi|^\lambda}{((t-\tau)^{1\gamma}+|x-\xi|)^{n+\gamma}}d\xi\leq$$

$$\leq\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/\gamma}}\right)^{\frac{\lambda}{\gamma}}}{\left(1+\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/\gamma}}\right)^{n+\gamma}}\frac{d(x-\xi)}{(t-\tau)^{1/\gamma}}\leq$$

$$\leq C\int\limits_0^{t-\theta}(t-\tau)^{-1+\frac{\lambda}{\gamma}}d\tau=C_1(t-\tau)^{\frac{\lambda}{\gamma}}\Big|_0^{t-\theta}=$$

$$=C_1(\theta^{\frac{\lambda}{\gamma}}-t^{\frac{\lambda}{\gamma}}).$$

Отже, в цьому інтегралі можна переходити до границі при $\theta\to 0$. Тому

$$\lim_{\theta\to 0}\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}G_0(t-\tau,x-\xi)(f(\tau,\xi)-f(\tau,x))d\xi=$$

$$=\int\limits_0^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}G_0(t-\tau,x-\xi)(f(\tau,\xi)-f(\tau,x))d\xi.$$

Оскільки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t-\tau,x-\xi)d\xi=1,$$

а

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}G_0(t-\tau,x-\xi)d\xi=0,$$

то другий доданок дорівнює нулю для довільного $\theta\geq 0$.

Твердження 2. Вірною є така формула

$$\frac{\partial}{\partial t}I_{21}(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}\frac{\partial}{\partial t}G_0(t+kT-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}G_0(kT,x-\xi)f(t,\xi)d\xi,$$

$$0<t<t,x\in\mathbb{R}^n.$$

Можливість почленного диференціювання ряду забезпечується оцінкою похідних $\dfrac{\partial}{\partial t}G_0(t+kT-\tau,x-\xi)$, $k\geq 1$, і рівномірною збіжністю ряду, складеного з похідних.

Об'єднуючи (27) і твердження 1 – 3 отримаємо, що вірною є рівність (28).

Треба встановити формулу для дії ГСІ D^α_Ω на функції I_2, I_3 із формули (7). При цьому слід розрізняти випадок $\alpha < \gamma$ і випадок $\alpha = \gamma$. У першому випадку можна застосовувати ГСІ D^{α}_{Ω} безпосередньо під знаком інтеграла, а в другому випадку треба створювати спеціальну формулу, яка вимагає розуміння ГСІ D^{α}_{ω} як границі при $\varepsilon \to 0$ $D^{\gamma}_{\Omega,\varepsilon}$.

Оскільки A^{α}_{Ω} діє по аргументу x, від якого залежить функція G, то спочатку треба вивчити дію ГСІ D^{α}_{Ω} на функцію G. Для цього треба мати оцінку $\Delta^l_h G$ при $|h| \leq (t-\mu)^{1/\gamma}$ та при $|h| \geq (t-\mu)^{1/\gamma}$.

Враховуючи різні зображення для скінченних різниць та оцінку (16) отримаємо, що при малих h (зокрема, при $|h| \leq (t-\mu)^{1/\gamma}$) вірною є нерівність

$$|(\Delta^l_h G)(t,T,x,\mu)| \leq C|h|^{[\alpha]+1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{l}\frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma}+|x-\theta_\nu \nu h|]^{n+\gamma+[\alpha]+1}}, \tag{29}$$

а при великих h (зокрема, при $|h| \geq (t-\mu)^{1/\gamma}$) отримаємо, що

$$|(\Delta^l_h G)(t,T,x,\mu)| \leq C\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{l}\frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma}+|x-\nu h|]^{n+\gamma}}. \tag{30}$$

Зауважимо, що оцінка (29) забезпечує збіжність ГСІ $D^{\alpha}_{\Omega}G$ при $|h| \leq 1$, а (30) – його збіжність при $|h| \geq 1$. Вони існують, якщо символ ПДО $a(\sigma)$ має гладкість $N = 2n+2[\gamma]+1$. Тоді гладкість G дорівнює $N-2n-[\gamma]$, $\gamma \geq 1$; при $0<\gamma<1$ символ вважається нескінченно гладким по просторових змінних.

Із цих оцінок та теореми Фубіні при $\alpha < \gamma$ отримуємо, що ГСІ $D^{\alpha}_{\Omega}I_2(t,x,\mu)$ є абсолютно збіжний і його можна застосовувати під знаком інтеграла

$$(D^{\alpha}_{\Omega}I_2)(t,x,\mu) =$$

$$= \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \tag{31}$$

де

$$D^{\alpha}_{\Omega}G \equiv G_\Omega = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{\Omega}(\sigma)\exp\{i(x,\sigma)-$$

$$-A(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}d\sigma, \tag{32}$$

$$(t,x)\in\Pi, \mu>1.$$

Користуючись (4) можна переконатися, що формула (31) є вірною для цілого непарного $\alpha < \gamma$ і парної характеристики Ω. Зауважимо, що коли за символом $A_\alpha(\sigma)$ будувати символ $\tilde{\Omega}(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = A_\alpha(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, де A_α – символ ПДО порядку однорідності $\alpha < \gamma$. Тут ГСІ D^{α}_{Ω} з характеристикою Ω є більш ширшим оператором і його символ визначається формулою

$$\tilde{\Omega}(x,\xi) = \frac{1}{d_{nl}(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{-n-\alpha}(1-\exp\{i\xi h\})^l\times$$

$$\times\Omega\Big(x;\frac{h}{|h|}\Big)dh.$$

Розглянемо тепер ГСІ порядку γ з символом $\tilde{\Omega}(\sigma)$. Якщо ПДО побудований за символом $A_\gamma(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = A_\gamma(\sigma)$. Додатково треба припускати, що $\tilde{\Omega}(\sigma)$ має при $\sigma \neq 0$ $N \geq 2n+2[\gamma]+1$ неперервних похідних, якщо $\gamma \geq 1$, або є нескінченно диференційовною функцією при $0<\gamma<1$, $\tilde{\Omega}(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$ і

$$|D^{æ}_{\sigma}\tilde{\Omega}(\sigma)| \leq C_n|\sigma|^{\gamma-|æ|}.$$

Окремо розглянемо випадок цілого γ. Тоді при непарному γ і парній характеристиці $\tilde{\Omega}$ не є поліномом по σ. Припустимо, що в розкладі за сферичними гармоніками

$$[\tilde{\Omega}(\sigma)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}}C_{2\nu,\mu}Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma|=1,$$

коефіцієнти $C_{2\nu,\mu}=0$, якщо $\gamma = 2+2\nu+2k$, $k=0,1,2,\ldots$. Якщо $\tilde{\Omega}$ є поліномом по σ, то цей випадок не розглядається, бо він охоплюється теорією параболічних диференціальних рівнянь [6, 7].

Зауважимо також, що функція $G(t,T,x,\mu)$ визначається рівністю (12) через $G_0(t+kT,x)$ із (13). Тоді I_2 із формули (10) записуємо у вигляді

$$I_2=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t+kT-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi$$

і при застосуванні D_Ω^γ до I_2 регуляризації потребує перший доданок

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi\equiv I_{20},$$

а до всіх решти доданків ГСІ D_Ω^γ можна застосувати безпосередньо під знаком інтеграла.

Теорема 1. *При перерахованих вище умовах на $\tilde{\Omega}(\sigma)$ ГСІ $D_\Omega^\gamma I_2$ існує в сенсі умовної збіжності [1, формула (6), стор. 911] і*

$$(D_\Omega^\gamma I_2)=\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{0\Omega}(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times(f(\tau,\xi)-f(\tau,x))d\xi+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\int\limits_0^t d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_{0\Omega}(t-\tau+kT,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\quad(33)$$

а ГСІ $D_\Omega^\gamma I_3$ існує в звичайному сенсі і

$$(D_\Omega^\gamma I_3)=\int\limits_t^T d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_\Omega(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu)\times \quad(34)$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi,\quad(t,x)\in\Pi,\mu>1.$$

Доведення. Нехай $0<\theta<1$ і позначимо

$$I_{20}^\theta\equiv\frac{1}{\mu}\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi.$$

Із (29) і (30) випливає абсолютна збіжність ГСІ $D_\Omega^\gamma I_{20}^\theta$ і формула

$$D_\Omega^\gamma I_{20}^\theta=\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\Omega^\gamma G_0(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi.$$

Із формули (2) з урахування (29), (30) випливає, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\Omega^\gamma G_0(t,\xi)d\xi=0$. Вірною є також оцінка

$$|D_\Omega^\gamma G_0(t-\tau,x-\xi)|\le C[(t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|]^{-n-\gamma}.\quad(35)$$

Тоді

$$D_\Omega^\gamma I_{20}^\theta=\int\limits_0^{t-\theta}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\Omega^\gamma G_0(t-\tau,x-\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi.$$

Із оцінки (35) і умови г) випливає збіжність останніх інтегралів.

Остання формула показує, що рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$

$$D_\Omega^\gamma I_{20}=\lim_{\theta\to0}I_{20}^\theta.$$

До усіх інших доданків функції I_2 і до усіх доданків функції I_3 можна застосувати ГСІ D_Ω^γ безпосередньо під знаком інтеграла, бо для $D_\Omega^\gamma G(t-\tau+kT,x-\xi)$ вірною є оцінка (35), де у правій частині замість $(t-\tau)^{1/\gamma}$ слід писати $(t-\tau+kT)^{1/\gamma}$, $k\ge1$. Теорема доведена.

Приклади

1. Двоточкова задача. Нехай $t\ge0$, $x\in\mathbb{R}$; $T>0$, μ, ν – числа,

$$u_t(t,x)+A_1u(t,x)=f(t,x),\quad t>0,x\in\mathbb{R},\quad(36)$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0}=\nu u(t,x)|_{t=T}+\varphi(x),\quad(37)$$

$$x\in\mathbb{R},\mu>0,\nu>0,$$

де

$$A_1u(t,x)\equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[|\sigma|F_{x\to\sigma}[u(t,x)]],\quad(38)$$

$$t\ge0,\sigma\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}$$

є ПДО з символом $|\sigma|$, визначений лише на спадних функціях по x, або [8]

$$A_1 u(t,x) \equiv \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathbb{R}\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon\le|h|\le R} \frac{\Delta_h u(t,x)}{|h|^2} dh, \quad (39)$$

$$t>0, x\in\mathbb{R},$$

$\Delta_h u(t,x) = u(t,x+h) - u(t,x)$. Якщо $u(t,x)\equiv C$, то $\Delta_h C = 0$ і в (39) $A_1 C = 0$ в класичному сенсі, а в (38) – в сенсі теорії узагальнених функцій.

Формула для розв'язку задачі (36), (37)

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,T,x-\xi;\mu,\nu)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\mu\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau,T,x-\xi;\mu,\nu) f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\nu\int\limits_t^T d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(T+t-\tau,T,x-\xi;\mu,\nu) f(\tau,\xi)d\xi, \quad (40)$$

де

$$G(t,T,x;\mu,\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-|\sigma|t + ix\sigma\}}{\mu - \nu\exp\{-|\sigma|T\}} d\sigma.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\mu-\nu\exp\{-|\sigma|T\}} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \exp\{-|\sigma|kT\},$$

то [8]

$$G(t,T,x;\mu,\nu) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ix\sigma - |\sigma|(t+kT)\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \frac{t+kT}{(t+kT)^2+x^2}, \quad (41)$$

$$\mu>\nu, t\ge 0, x\in\mathbb{R}.$$

При цьому для $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$, $\mu>\nu$ $G(t,T,x;\mu,\nu)\ge 0$, а також

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,T,x;\mu,\nu)dx = \frac{1}{\mu}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t+kT}{(t+kT)^2+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\frac{\nu}{\mu}} = \frac{1}{\mu-\nu}. \quad (42)$$

Нехай $\varphi(x)\equiv C_1$, $f(t,x)\equiv C_2$. Тоді підставивши (41) в (40) і враховуючи (42), отримаємо вираз для розв'язку задачі (36), (37)

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu-\nu} + \mu\frac{C_2 t}{\mu-\nu} + \frac{C_2(T-t)\nu}{\mu-\nu},$$

$$t\ge 0, x\in\mathbb{R},$$

незалежний від x, або

$$u(t,x) = \frac{1}{\mu-\nu}\Big(C_1 + ((\mu-\nu)t + \nu T)_2\Big), \quad (43)$$

$$t\ge 0, x\in\mathbb{R}.$$

Перевіряємо, що функція u із (43) є розв'язком задачі (36), (37).

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial t} = C_2$, $A_1 u = 0$ (u не залежить від x), $f = C_2$, то рівняння, очевидно, задовольняється в класичному сенсі, якщо ПДО (38) тлумачиться як ГСІ (39).

Перевіряємо виконання нелокальної умови (37). Оскільки

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \frac{\mu}{\mu-\nu}(C-1+C_2T\cdot\nu)$$

а

$$\nu u(t,x)|_{t=T} + C_1 = \frac{\nu}{\mu-\nu}[C_1 + ((\mu-\nu)T +$$

$$+\nu T)C_2] + C_1 = \frac{\mu}{\mu-\nu}(C_1 + C_2\nu T),$$

то ліва частина (37) збігається з її правою частиною.

Висновки. 1. Якщо рівняння (36) однорідне, тобто $f(t,x) \equiv 0$, то при $\varphi(x) \equiv C_1$ розв'язок задачі (36), (37) записується у вигляді

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu - \nu}, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \mu > \nu > 0,$$

і є величиною сталою, залежною від μ і ν, $\mu > \nu > 0$. При $\mu = \nu$ ряд (41) розбігається як гармонійний ряд, а при $\mu < \nu$ ряд (41) є розбіжним степеневим рядом. Тому задача (36), (37) розв'язку не має. Знак u залежить від знаку C_1.

2. Якщо рівняння (36) неоднорідне і $\varphi(x) = C_1$, $f(t,x) = C_2$, то при $\mu > \nu$ задача (36), (37) має єдиний розв'язок, який записується у вигляді (43). При $\mu \leq \nu$ задача (36), (37) розв'язку не має.

3. При $\mu > \nu > 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ розв'язки обох задач (однорідної і неоднорідної) є невід'ємними.

При $\mu > \nu > 0$, $C_1 = C_2 = 0$ розв'язок $u(t,x)$ є тотожним нулем.

При $\mu > \nu > 0$, $C_1 < 0$, $C_2 < 0$ маємо, що $u(t,x) < 0$.

Якщо $\mu > \nu > 0$, C_1 і C_2 різних знаків такі, що $C_1 + \nu C_2 T = 0$, то $u(t,x) = C_2 t$ і не залежить від C_1.

2. Задачі керування. Задача 1. Знайти таке значення параметра μ_0, щоб у момент часу t_0 при заданих C_1, C_2, ν_k, t_k, $1 \leq k \leq m$, величина u дорівнювала u_0.

Відповідь.

$$\mu_0 = \frac{1}{u_0 - C_2 t_0}\Big(C_1 + u_0 \sum_{k=1}^{m} \nu_k + C +$$

$$+2\sum_{k=1}^{m} \nu_k (t_k - t_0)\Big).$$

Аналогічно можуть бути розв'язані такі задачі.

Задача 2. Знайти таке значення C_i, щоб у момент часу t_0 при заданих μ_0, C_3, ν_k, t_k величина $u \equiv u_0$, $i = 1$, $j = 2$; $i = 2$, $j = 1$, $1 \leq k \leq m$.

Задача 3. Знайти такий момент часу t_0, щоб при заданих C_1, C_2, μ_0, ν_k, t_k, $1 \leq k \leq m$, величина $u \equiv u_0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковсике процессы / А.Н. Кочубей / Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.
2. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei – Basel-Boston-Berlin: Bizkhaser Verlag, 2004. – 390 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 152).
3. *Городецький В.В.* Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. – Т. 1, вип. 3. – Чернівці: Рута, 2011. – С. 13–18.
4. *Дринь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Кошы для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений / Я.М. Дринь // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. – № 3. – С. 198–202.
5. *Эйдельман С.Д.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Мат. исследования. – 1981. – Т. 63. – С. 18–33.
6. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
8. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Р.Я. Дрінь. – Львів, 1997. – 115 с.