УДК 517.925

©2010 р. Я.М. Дрінь

Буковинська державна фінансова академія

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЯМОЇ І ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується розв'язність прямої та оберненої задач для одного класу неоднорідних рівнянь з псевдодиференціальним операторами, побудованими за негладкими в нулі неоднорідними символами.

There are investigated the solvability of direct and inverse problems for one class nonehomogenous equations with pseudodifferential operators with nonhomogenous non-smooth in point 0 symbols.

Серед нових розділів теорії псевдодиференціальних операторів (ПДО) особливої уваги заслуговують рівняння з ПДО, побудовані за негладкими однорідними символами, як лінійні, так і нелінійні. Як зазначено в [1], вони мають важливі застосування в теорії випадкових процесів, в сучасній теорії фракталів та ін. Лінійні параболічні псевдодиференціальні рівняння (ППДР) з негладкими символами були визначені С.Д. Ейдельманом та Я.М. Дрінем та дослідження задачі Коші для таких рівнянь було розпочате в [2], продовжене А.Н. Кочубеєм (див. [1] та наведену там бібліографію), який запропонував трактувати ПДО як гіперсингулярні інтеграли, В.В. Городецьким, В.А.Літовченком, М.В. Федорюком, А.Ю. Дубінським та ін. Були отримані важливі результати відносно коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь у різних функціональних просторах, властивостей їх розв'язків, зокрема, інтегральних зображень, поведінки розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємності та стабілізації за Ляпуновим. Багатоточкові задачі для еволюційних ПДР вивчалися В.В. Городецьким та Я.М. Дрінем [3–5]. Для квазілінійного параболічного рівняння з ПДО досліджена глобальна розв'язність задачі Коші [6]. В той же час слід відмітити, що обернені задачі для таких рівнянь не вивчалися. Першою роботою є [7], де застосовується метод неповного відділення змінних для еволюційних рівнянь, що містять ПДО, побудовані за сталим негладким в нулі символом, та змінним коефіцієнтом біля шуканої функції.

Задачі про визначення змінного коефіцієнта в правій частині для рівнянь, що містять часову та просторові змінні, за відомими значеннями їх розв'язків у фіксованих точках простору та у всі моменти часу прийнято називати оберненими. Для лінійних диференціальних рівнянь, наприклад, обернена задача може полягати в тому, щоб визначити частину або навіть всі коефіцієнти такого рівняння. Обернені задачі називають n-вимрними, якщо всі шукані функції залежать від n змінних. Кожне рівняння математичної фізики, для якого формулюється обернена задача, є математичною моделлю реального фізичного явища. Тому для прикладних наук є природною така постановка оберненої задачі: з відомого класу математичних моделей, що містять невідомі параметри, виділити ту модель, що відповідає заданій інформації про реальне явище. Щоб відновити параметри треба мати додаткову інформацію про досліджуване явище (процес). Цю додаткову інформацію називають умовою перевизначення. Обернені задачі мають широке застосування в екології, біології, медицині, космічних дослідженнях, при визначенні структури земної поверхні за сейсмічними даними, металургії, економіці, оскільки дозволяють шляхом математичного моделювання визначати фізичні властивості різних матеріалів без проведення експериментів, а особливо тоді, коли проведення таких експериментів є складними або просто неможливими.

У [8] наводиться історія вивчення обернених задач для диференціальних рівнянь, починаючи від першої оберненої задачі – кінематичної задачі сейсміки, яка в одновимірному випадку вперше була розв'язана Герглотцем.

Підсумовуючою працею Львівської школи з теорії обернених задач для параболічних диференціальних рівнянь є монографія [9] керівника цієї школи М.І. Іванчова, що базується на результатах автора та суттєво розширює та завершує результати його учнів.

Бібліографічні списки монографій [8, 9] містять імена багатьох відомих вчених, в тому числі Ю.М. Березанського та Л.П. Нижника з Києва, А.І.Прилепка з Москви та їх учнів (див. також [10-20]).

Одним з ефективних методів побудови аналітичних розв'язків прямих задач для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є метод гібридних інтегральних перетворень, заснований в [21], та розвинений в роботах М.П. Ленюка та його учнів. В даній роботі вперше досліджується пряма та обернена задачі для одного класу ПДР зі змінним коефіцієнтом при шуканій функції з використанням гібридних інтегральних перетворень Фур'є – класичного за просторовою змінною та узагальненого за напівпросторовою змінною.

1. Постановка прямої задачі. Основний результат. Введемо позначення:

1) $z \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_a \equiv \{z; z \geq a\}$, $\mathbb{R}_0 \equiv \mathbb{R}_+$; скрізь $y \in \mathbb{R}_0$, $t \in \mathbb{R}_0$;

2) $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \equiv (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$; $\Pi_+ \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $\Pi \equiv \Pi_+ \times \mathbb{R}_+$, $\Pi_0 \equiv \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$; скрізь $(x, y, t) \in \Pi$, $(x, y) \in \Pi_+$, $(y, t) \in \Pi_0$, $(x, t) \in \Pi_+$;

3) числа $1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_p < \gamma_0$, $\mu > 0$, $c_k > 0$, $k \equiv (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, a_{γ_ζ}: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a_{\gamma_\zeta}(\mu\sigma) = \mu^\gamma a_{\gamma_\zeta}(\sigma)$, $|D^k a_{\gamma_\zeta}(\sigma)| \leq c_k |\sigma|^{\gamma_\zeta - |k|}$, $|k| \geq 2n + 2[\gamma_0] + 1$, $[\gamma_0]$ – ціла частина γ_0; a_{γ_ζ} – символ ПДО A_{γ_ζ}, що діє за просторовою змінною $x \in \mathbb{R}^n$;

4) V: $\Pi \to \mathbb{R}$ неперервно диференційовна за t, двічі неперервно диференційовна та інтегровна за x, y; V_t, V_y, V_{yy} – частинні похідні,

$$A_\gamma V(x, y, t) = F^{-1}_{\sigma \to x}[a_\gamma(\sigma) F_{x \to \sigma}[V(x, y, t)]],$$

$$(x, y, t) \in \Pi,$$

де

$$a_\gamma(\sigma) = \sum_{\zeta=0}^{p} a_{\gamma_\zeta}(\sigma),$$

$F_{x \to \sigma}$ та $F^{-1}_{\sigma \to x}$ відповідне пряме та обернене перетворення Фур'є, яке є псевдодиференціальною операцією (ПДО), що розуміється як гіперсингулярна інтегральна операція (ГСІО) [1]. Позначимо також

$$AV(x, y, t) \equiv V_t(x, y, t) + A_\gamma V(x, y, t) - f(x, t),$$

$$(x, y, t) \in \Pi,$$

де функція f: $\Pi_+ \to \mathbb{R}$ неперервна та обмежена за сукупністю змінних, причому

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq C|x - y|^\lambda,$$

C не залежить від x, y, t. Не зменшуючи загальності можна вважати, що [1] $\max\limits_{1 \leq \zeta \leq p} \gamma_\zeta < \gamma_0 - \lambda$; функція q: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – відома неперервна та обмежена,

$$BV(x, y, t) \equiv V_{yy}(x, y, t) - q(y) V(x, y, t),$$

$$(x, y, t) \in \Pi.$$

1.1. Постановка прямої задачі. Необхідно визначити розв'язок V: $\Pi \to \mathbb{R}$ рівняння

$$AV(x, y, t) = BV(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Pi, \quad (1)$$

що задовольняє такі початкові та граничні умови

$$\left.\begin{aligned} &V(x, y, t)|_{t=0} = V_0(x) \lim_{n \to \infty} V_{0n}(y), \\ &V_y(x, y, t)|_{y=0} = 0, \\ &(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, \\ &(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

де V_0: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна та обмежена функція, V_{0n}: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – деяка δ-подібна послідовність при $n \to \infty$, а границя розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій; існує стала $a > 0$ така, що $\forall y \in \mathbb{R}^+$:

$$q(y) \geq a. \tag{3}$$

1.2. Формула для розв'язку прямої задачі. Задача (1), (2) розв'язується за допомогою перетворення Фур'є за $x \in \mathbb{R}^n$ та узагальненого перетворення Фур'є за $y \in \mathbb{R}_+$. Основним результатом прямої задачі (1), (2) є доведення формули для її розв'язку:

$$V(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} G_\gamma(x-\xi,t)V_0(\xi)d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_n} G_\gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi, \tag{4}$$

де вираз для G_γ залежить від γ і a_γ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Зокрема

1) при $\gamma = 1$, $a_\gamma \equiv |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ та в [22] доведено, що

$$G_1(x,t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (x,t) \in \Pi_+;$$

2) при $\gamma = 2$, $a_\gamma \equiv |\sigma|^2$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ отримуємо фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності

$$G_2(x,t) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}, \quad (x,t) \in \Pi_+;$$

3) при $\gamma \geq 1$, a_γ з п. 1.1, функція G_γ: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ вивчалася в [1, 2, 23]

$$G_\gamma(x,t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a_\gamma(\sigma)t\}d\sigma, \quad (x,t) \in \Pi_+.$$

При $1 \leq \gamma \leq 2$ функція $G_\gamma(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ [24]. Функція $\varphi(y,\lambda)$ є розв'язком задачі

$$-\varphi''_{yy} + q(y)\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi(0,\lambda) = 1,$$

$$\varphi'_y(0,\lambda) = 0, \tag{5}$$

$\sigma(\lambda)$ – спектральна функція розподілу [25].

Оцінки функції G_γ та її похідних

$$|D_x^\chi G_\gamma(x,t)| \leq C_\chi \sum_{\zeta=0}^p t(t^{1/\gamma_\zeta} + |x|)^{-n-\gamma_\zeta-|\chi|},$$

$$|\chi| \leq N - 2n - [\gamma_0],$$

$$|D_t G_\gamma(x,t)| \leq C \sum_{\zeta=0}^p (t^{1/\gamma_\zeta} + |x|)^{-n-\gamma_\zeta},$$

$$N \geq 2n + 2[\gamma_0] + 1,$$

наведені в [1, 2, 23], дозволяють довести, що функція (4) є розв'язком задачі (1), (2), (3).

Зауваження. Якщо $V_0(x) = \lim\limits_{n\to\infty} V_{0n}(x)$, де V_{0n} – δ-подібна послідовність при $n \to \infty$, а границя розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\gamma(x-\xi,t)V_0(\xi)d\xi \equiv G_\gamma(x,t) * V_0(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x) * G_\gamma(x,t) = G_\gamma(x,t), (x,t) \in \Pi_+.$$

Тоді формула (4) набуде вигляду

$$V(x,y,t) = G_\gamma(x,t) \int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda t\}\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_n} G_\gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi, (x,y,t) \in \Pi.$$

1.3. Узагальнене перетворення Фур'є. Пряме узагальнене перетворення Фур'є визначається за формулою

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^\infty \psi(y)\varphi(y,\lambda)dy, \quad \lambda \geq a,$$

а узагальнене обернене перетворення Фур'є – формулою

$$\psi(y) = \int\limits_0^\infty \Phi(\lambda)\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda), \quad y \geq 0, \lambda \geq a.$$

Тут $\varphi(y,\lambda)$ – розв'язок задачі (5).

Через B_1 позначимо оператор, породжений виразом $-\dfrac{d^2}{dy^2}+q(y)$ та умовами з (5). Якщо $q(y)>0$, то B_1 буде невід'ємним самоспряженим оператором (оператором Штурма-Ліувілля) [25]. Якщо $q(y)\geq a>0$, то точки спектра λ задовольняють умову $\lambda\geq a$, де $a=\min\limits_{y\geq 0}q(y)$.

2. Метод гібридного інтегрального перетворення. До рівняння (1) застосуємо узагальнене перетворення Фур'є за змінною $y\in\mathbb{R}^1_+$ та експоненціальне перетворення Фур'є за змінними $x\in\mathbb{R}^n$, позначивши

$$W(\sigma,\lambda,t)\equiv(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}e^{i(x,\sigma)}\times$$

$$\times\varphi(y,\lambda)V(x,y,t)dx,dy,$$

де $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\geq a$, $t\geq 0$. Тоді отримаємо рівняння

$$W_t(\sigma,\lambda,t)+a_\gamma(\sigma)W(\sigma,\lambda,t)-\tilde{f}(\sigma,t)=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}e^{i(x,\sigma)}\varphi(y,\lambda)\times$$

$$\times[V_{yy}(x,y,t)q(y)V(x,y,t)]dxdy, \qquad (6)$$

де $\tilde{f}(\sigma,t)$ – перетворення Фур'є функції $f(x,t)$. Виділимо в правій частині (6) інтеграл

$$I(x,\lambda,t)\equiv\int\limits_0^\infty\varphi(y,\lambda)V_{yy}(x,y,t)dy,$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\lambda\geq a,t\geq 0$$

та двічі проінтегруємо частинами. Тоді, враховуючи граничні умови (2), отримаємо, що

$$I(x,\lambda,t)=\int\limits_0^\infty V(x,y,t)\varphi''_{yy}()(y,\lambda)dy,$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\lambda\geq a>0,t\geq 0. \qquad (7)$$

Підставимо (7) в (6) та врахуємо, що

$$-\varphi''_{yy}(y,\lambda)+q(y)\varphi(y,\lambda)=\lambda\varphi(y,\lambda),$$

$$y\in\mathbb{R}^1_+,\lambda\geq a>0.$$

Отже, рівняння (6) набуде вигляду

$$W_t(\sigma,\lambda,t)+(a_\gamma(\sigma)+\lambda)W(\sigma,\lambda,t)=\tilde{f}(\sigma,t),$$

$\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\geq a>0$, $t>0$. Розв'язок задачі (1), (2) в образах Фур'є

$$W(\sigma,\lambda,t)=W_0(\sigma)\lim_{n\to\infty}W_{0n}(\lambda)e^{-(a_\gamma(\sigma)+\lambda)t}+$$

$$+\int\limits_0^t\exp\{-a_\gamma(\sigma)(t-\tau)\}\tilde{f}(\sigma,\tau)d\tau=$$

$$=W_0(\sigma)e^{-(a_\gamma(\sigma)+\lambda)t}+\int\limits_0^t\exp\{-a_\gamma(\sigma)(t-\tau)\}\times$$

$$\times\tilde{f}(\sigma,\tau)d\tau, \qquad (8)$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}W_{0n}(\lambda)=1$. Якщо до (8) застосувати обернені перетворення Фур'є, то отримаємо, що

$$V(x,y,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_\gamma(x-\xi,t)V_0(\xi)d\xi\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_n}G_\gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi,$$

$x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^1_+$, $t\geq 0$, де $G_\gamma(x,t)$ визначена в п. 1.2.

Теорема 1. *Розв'язок прямої задачі (1) – (3) визначається формулою (4):*

$$V(x,y,t)\equiv X(x,t)Y(y,t)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_n}G_\gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi,$$

де

$$X(x,t)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_\gamma(x-\xi,t)V_0(\xi)d\xi,(x,t)\in\Pi_+$$

(9)

є розв'язком задачі

$$\begin{array}{lll} X_t(x,t)+A_\gamma X(x,t)=0, & (x,t)\in\Pi_+, & \\ X(x,t)|_{t=0}=V_0(x), & x\in\mathbb{R}^n, & \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} X(x,t)=0, & t\in\mathbb{R}^+, & \end{array} \qquad (10)$$

V_0: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – неперервна та обмежена функція, G_γ визначена в п. 1.2, а

$$Y(y,t)\equiv\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda),(y,t)\in\Pi_0, \qquad (11)$$

є розв'язком задачі

$$\begin{array}{ll} \partial_y Y(y,t)=\partial^2_{yy}Y(y,t)-q(y)Y(y,t),(y,t)\in 0, & \\ Y(y,t)|_{t=0}=\lim\limits_{n\to\infty}Y_{0n}(y), & y\in\mathbb{R}^+, \\ Y_y(y,t)|_{y=0}=0, & t\in\mathbb{R}^+, \end{array} \qquad (12)$$

Y_{0n} – дельта-подібна послідовність при $n\to\infty$, а границя розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій. Функція φ є розв'язком задачі (5) та функція q: $\mathbb{R}_0\to\mathbb{R}$ зв'язані взаємно-однозначною відповідністю зі спектральною функцією розподілу $\sigma(\lambda)$ [25].

Якщо функція φ: $\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}$ невід'ємна, $1\le\gamma\le 2$, $X(x,t)\to 0$ при $|x|\to\infty$, $t>0$, то $X(x,t)\ge 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $0<t\le T$, а задача (10) може мати не більше за один розв'язок вигляду (9) [1].

Розв'язок рівняння (12) за нульовими умовами є тотожнім нулем. Розв'язок задачі (12) однозначно визначається додатною функцією $q(y)$ [25].

Доведення. Перевірка того, що функція (9) є розв'язком задачі (10) здійснена в [1].

Перевіримо, що функція y з (11) задовольняє рівняння (12). Справді,

$$Y'_t(y,t)=-\int\limits_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda),$$

$$t>0,y>0, \qquad (13)$$

$$Y''_{yy}(y,t)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi''_{yy}(y,\lambda)d\sigma(\lambda),$$

$$t>0,y>0. \qquad (14)$$

Здійснення операції диференціювання обґрунтовується властивостями підінтегральних функцій інтегралів (11), (13), (14). Підставивши (11), (13), (14) в рівняння (10), отримаємо, що

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\{-\varphi''_{yy}+q(y)\varphi(y)-\lambda\varphi\}d\sigma(\lambda)\equiv 0,$$

$$(y,t)\in\Pi_0,$$

оскільки $-\varphi''_{yy}+q(y)\varphi(y)=\lambda\varphi$. Потрібна тотожність доведена.

Перевіримо виконання умов (10). Оскільки $\varphi'_y(y,\lambda)|_{y=0}=0$, $\lambda\ge a$, то

$$Y'_y(y,t)|_{y=0}=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi'_y(y,\lambda)d\sigma(\lambda)\Big|_{y=0}=0,$$

$$t\in\mathbb{R}_+.$$

В роботі [25] спектральна функція розподілу $\sigma(\lambda)$ визначається як вага, необхідна для того, щоб система функцій $\varphi(x,\lambda)$ та $\varphi(y,\lambda)$ була "ортонормованою системою" у сенсі виконання рівності

$$\int\limits_{-\infty}^\infty\varphi(y,\lambda)\varphi(x,\lambda)d\sigma(\lambda)=\delta(y-x),$$

записаної поки формально (δ – дельта-функція Дірака).

Тепер формально легко довести, що $Y_0(y)=Y(y,t)|_{t=0}$ дійсно є δ-подібною послідовністю. З формули (11) отримуємо, що

$$Y(y,t)|_{t=0}=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_0}\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda)=$$

$$=\int\limits_0^\infty\varphi(y,\lambda)\varphi(0,\lambda)d\sigma(\lambda)=\delta(y-0).$$

Теорема 1 доведена.

3. Обернена задача

Нехай $V(x,y,t)$ – розв'язок задачі (1), (2). Зафіксуємо точку $x=x_0$, $y=0$ в Π_+ та припустимо, що відоме значення V при всіх $t>0$ і $x=x_0$, $y=0$:

$$V(x,y,t)|_{x=x_0,y=0}\equiv\psi(x_0,t), t\in\mathbb{R}_+,$$

де ψ – відома функція.

Необхідно визначити функцію q: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, неперервну та обмежену.

Розв'язок оберненої задачі випливає з [25]. Дійсно, підставивши $x=x_0$ та $y=0$ в (4) й враховуючи, що $\varphi(0,\lambda)=1$, отримаємо рівняння

$$\psi(x_0,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_\gamma(x_0-\xi,t)V_0(\xi)d\xi\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}d\sigma(\lambda), t\in\mathbb{R}_+,$$

де $\psi(x_0,t)$ – відома функція, а $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geq a$, – невідома. З [25] відомо, що $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geq a$, зв'язана взаємно-однозначною відповідністю з неперервною та обмеженою функцією q, тобто за відомою функцією $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geq a$, однозначно знаходиться функція q. У свою чергу функція $\sigma(\lambda)$, $\lambda\geq a$, однозначно визначається функцією $\psi(x_0,t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Отже, вірною є така теорема.

Теорема 2. *В класі обмежених та неперервних функцій невідома функція q: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, рівняння (1) однозначно визначається відомою функцією $\psi(x_0,t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.*

Зауважимо, що результати даної праці залишаються вірними, якщо символ $a_\gamma\equiv a_\gamma(\sigma,t)$ залежить від часової змінної $t\in(0,T]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.

2. *Эйдельман С.Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / Самуил Давидович Эйдельман, Ярослав Михайлович Дринь // Приближенные методы математического анализа. Киев, 1974. – С. 60-69. 1992. – 205 с.

3. *Городецький В.В.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь// Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С.63-77.

4. *Дрінь Я.М.* Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу / Я.М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 24-32.

5. *Дрінь Я.М.* Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Доповіді НАНУ, № 7. – 2010. – С. 7-11.

6. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння з негладким символом / Я.М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 18-22.

7. *Дрінь Я.М.* Дослідження прямої і оберненої задачі для одного класу псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь. Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 13-15 травня 2010 р., Київ; Матеріали конф. Том 1. – К.; НТУУ, 2010. – С. 147.

8. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений / Аниконов Ю.Е. – Новосибирск: Наука, 1978. – 120 с.

9. *Ivanchov M.I.* Inverse Problem for Equations of Parabolic Type / Ivanchov M.I. // Inverse Problem for Equations of Parabolic Type. Mathematical Studies. Monograph Series. – VNTL Publishers. – V. 10. – 238 p.

10. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении// Дифференц. уравн. – 1987. – Т. 23, N 1. – С. 136–143.

11. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I// Дифференц. уравн. – 1987. – Т. 23, N 10. – С. 1791–1799.

12. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. II// Дифференц. уравн. – 1987. – Т. 23, N 11. – С. 1971–1980.

13. *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционном уравнении// Докл. АН СССР – 1989. – Т. 305, N 5. – С. 1045–1049.

14. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I// Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33, N 3. – С. 146–155.

15. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II// Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, N 5. – С. 147–162.

16. *Безнощенко Н.Я.* Об определении коэффициента в параболическом уравнении// Дифференц. уравн. – 1974. - Т. 10, N 1. – С. 24–35.

17. *Безнощенко Н.Я.* Об определении коэффициентов при младших членах в параболическом уравнении// Сиб. мат. журн. – 1975. - Т.16, N 3. – С. 473–482.

18. *Безнощенко Н.Я.* Некоторые задачи определения коэффициентов при младших членах параболических уравнений// Сиб. мат. журн. – 1975. – Т. 16, N 6. - С. 1135–1147.

19. *Безнощенко Н.Я.* Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении// Дифференц. уравн. – 1975. – Т. 11, N 1. – С. 19–26.

20. *Безнощенко Н.Я.* О существовании решения задачи определения коэффициента q в уравнении $u_t - \partial g u + q u = F$// Дифференц уравн. – 1979. – Т. 15, N 1. - С. 10–17.

21. *Уфлянд Я.С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я.С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С. 93-106.

22. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Роман Ярославович Дрінь. – Львів, 1997. – 137 с.

23. *Эйдельман С.Д.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Матем. исслед., 1981. Вып. 63. – С. 18-33.

24. *Голубов Б.И.* О методе суммирования типа Абеля-Пуассона кратных рядов Фурье / Б.И. Голубов // Матем. заметки. – Т. 27, № 1. – С. 49-59.

25. *Гельфанд И.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Изв. АН СССР, сер. мат. 15 (1951). С. 309 – 360.