УДК 517.956

©2010 р. В.В. Городецький, І.С. Тупкало

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Доведено коректну розв'язність багатоточкової задачі для еволюційного рівняння з псевдо-Бесселевим оператором нескінченного порядку в класі розподілів Соболєва-Шварца.

We prove the correct solvability of a multi-point problem for evolution equation with pseudo-Bessel operator of infinite order in the class of distribution of Sobolev-Shvarts.

Як відомо, багато задач практики моделюються крайовими задачами для еволюційних сингулярних рівнянь з оператором Бесселя з нелокальними умовами (дифузійні процеси в анізотропних середовищах, явища тепломасопереносу, радіальні коливання хвиль, задачі про взаємодію тіл, тощо). Багатоточкові сингулярні параболічні задачі у всьому просторі та в циліндричній області досліджувалися в [1]. У працях [2, 3] вивчалися властивості оператора $\varphi(B_\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B_\nu^k$, де B_ν – оператор Бесселя порядку $\nu > -1/2$ ($\varphi(B_\nu)$ в [2, 3] називається оператором Бесселя нескінченного порядку). Еволюційні рівняння з оператором $\varphi(B_\nu)$ є природним узагальненням сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя, який вироджується за просторовою змінною. В [2, 3] доведено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t = \varphi(B_\nu)u$ в класі початкових умов, які є узагальненими функціями нескінченного порядку типу ультрарозподілів. У праці [4] встановлено коректну розв'язність двоточкової задачі для вказаного еволюційного рівняння у випадку, коли крайова умова є узагальненою функцією типу розподілів. У цій роботі аналогічний результат отримано у випадку m-точкової задачі ($m \geq 2$) для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t = \varphi(B_\nu u)$. Зазначимо, що при дослідженні такої задачі використовується підхід, відмінний від методики, застосованої в праці [4].

1. Простори основних та узагальнених функцій.

Простір основних функцій $\overset{\circ}{S} \equiv \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$. Нагадаємо, що простір $S(\mathbb{R})$ складається з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які спадають при $|x| \to \infty$ разом з усіма своїми похідними швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$, тобто $\varphi \in S$, якщо

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \exists c_{km} = c_{km}(\varphi) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^k D_x^m \varphi(x)| \leq c_{km}.$$

Послідовність функцій $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset S$ називається збіжною в S до функції $\varphi \in S$, якщо

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ : \ x^k D_x^m \varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} x^k D_x^m \varphi.$$

У просторі S визначені, є лінійними і неперервними операції диференціювання та лінійної заміни змінної. В S можна ввести структуру зліченно нормованого простору, якщо покласти

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0\leq m\leq p}} \{(1+|x|)^p |D_x^m \varphi(x)|\},$$
$$p \in \mathbb{Z}_+, \varphi \in S.$$

Очевидно, що $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \dots \leq \|\varphi\|_p \leq \dots$. Символом $S_p \equiv S_p(\mathbb{R})$ позначимо поповнення простору S за p-нормою; при цьому $S_0 \supset S_1 \supset S_1 \supset \dots$, вкладення $S_{p+1} \subset S_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним і компактним. Отже, $S = \lim_{p\to\infty} \operatorname{pr} S_p$. Збіжність в отриманому зліченно нормованому просторі співпадає з раніше введеною збіжністю в S. Простір S є повним [5].

Символом $\overset{\circ}{S}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору S. Оскільки $\overset{\circ}{S}$ утворює підпростір S, то в $\overset{\circ}{S}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями. У просторі $\overset{\circ}{S}$ визначені і є неперервними оператор Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, який відповідає оператору Бесселя [6]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$, а також пряме та обернене перетворення Бесселя [6]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) := \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{S},$$

$$\varphi(x) \equiv F_{B_\nu}[\psi](x) := c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

де $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$, $\nu > -1/2$, j_ν – нормована функція Бесселя, при цьому $F_{B_\nu}[\overset{\circ}{S}] = \overset{\circ}{S}$. Оскільки до основних функцій з простору $\overset{\circ}{S}$ можна скільки завгодно разів застосувати оператор Бесселя, то простір $\overset{\circ}{S}$ можна означити ще й так [7]:

$$\overset{\circ}{S} = \{\varphi \in S: \ \varphi(-x) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R} \ \Big|$$

$$\forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \exists c_{km} > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$(1+x^2)^k |B^m \varphi(x)| \leq c_{km}\}.$$

Зазначимо також, що операція узагальненого зсуву аргументу диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) в просторі $\overset{\circ}{S}$.

Простори типу W та $\overset{\circ}{W}$. Нехай Ω, M – диференційовні, парні на $\mathbb{R}$ функції, невід'ємні, зростаючі та опуклі на $[0,\infty)$; причому $M(0) = \Omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Omega(x) = +\infty$. За допомогою функцій M та Ω Б.Л. Гуревич увів простори W_M, W^Ω, W_M^Ω, названі ним просторами типу W (див. [8]). Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність усіх цілих функцій φ: $\mathbb{C} \to C$, для яких

$$\exists\, a,b,c > 0 \, \forall z = x+iy \in \mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)| \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$$

(сталі a, b, c залежить лише від функції φ). Символом $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ позначимо сукупність усіх цілих парних функцій з простору W_M^Ω. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$, позначимо символом $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. Із результатів, отриманих в [9] випливає, що $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R}) \subset \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$. Отже, на функціях з простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ визначене перетворення Бесселя, при цьому $F_{B_\nu}[\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})] = \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω [8].

Простір узагальнених функцій $(\overset{\circ}{S})'$. Символом $(\overset{\circ}{S})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f*\varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi)\rangle, \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, оскільки операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна у просторі $\overset{\circ}{S}$.

Якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}$, то $F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}$, тому перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S})'$ визначається за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f], \varphi\rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\varphi]\rangle, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

при цьому $F_{B_\nu}[f] \in (\overset{\circ}{S})'$. Якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{S})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}$ правильною є формула [7]: $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi]$, при цьому $F_{B_\nu}[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}$.

2. m-точкова задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Bu(t,x), \qquad (1)$$

$$(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+,$$

де оператор B побудований за сталим символом $A(\sigma)$, який, як функція σ, задовольняє наступні умови: функція $A(\sigma)$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, $A \in \overset{\circ}{P}{}^{\Omega}_{M}$, де символом $\overset{\circ}{P}{}^{\Omega}_{M}$ позначено клас цілих парних однозначних функцій φ: $\mathbb{C} \to C$, які є мультиплікаторами в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ і такими, що $e^{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$. Якщо розвинення функції A в степеневий ряд має вигляд

$$A(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то, як випливає з результатів, наведених у праці [2], у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ визначений і є неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k \equiv F^{-1}_{B_{\sigma \to x}}[A(\sigma)F_{B_{x \to \sigma}}],$$

$\nu > -1/2$, (тут Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω).

Для рівняння (1) задамо m-точкову задачу ($m \geq 2$):

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \qquad (2)$$

$$\varphi \in W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),$$

де $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$ – фіксовані числа, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \cdots < t_m = T$. Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T), \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))$ задачі (1), (2) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя (див. [4]). У результаті отримаємо, що розв'язок цієї задачі зображається формулою

$$u(t,x) = c_\nu \int_0^{\infty} \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}} \times$$

$$\times j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Введемо позначення:

$$G(t, t_1, \ldots, t_m; x) \equiv G(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[Q(t,\sigma)](x),$$

де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{tA(\sigma)\}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Тоді, можна довести (див. [4]), що

$$u(t,x) = \int_0^{\infty} T_x^{\xi} G(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi \equiv G(t,x) * \varphi(x),$$

$$(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R} \equiv \Omega.$$

Дослідимо властивості функцій $Q(t,\sigma)$ та $G(t,x)$. Правильним є наступне твердження.

Лема 1. *При фіксованому $t \in (0,T]$ функція $Q(t,\sigma)$ є елементом простору $\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$; похідні функції $Q(t,\sigma)$ (по змінній σ) задовольняють умову*

$$\forall \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+ \; \exists \beta_{ks} > 0 \; \forall \sigma \in \mathbb{R}:$$

$$|\sigma^k D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq \beta_{ks} \cdot \varphi_s(t),$$

де

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1, \\ t^s, & t > 1. \end{cases}$$

Доведення. Введемо позначення:

$$Q_1(t,\sigma) := \exp\{tA(\sigma)\},$$

$$Q_2(\sigma) := \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k A(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Тоді $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) \cdot Q_2(\sigma)$. Із властивостей функції $A(\sigma)$ випливає, що $Q_1(t,\sigma)$, як функція σ, при кожному $t > 0$ є елементом простору $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}$. Урахувавши цей факт, скористаємося характеристикою простору W_M^{Ω} у термінах оцінок похідних функцій цього простору на дійсній осі, отриманою у праці [10]:

$$(\psi \in W_M^{\Omega}) \Leftrightarrow \Big(\exists c_1, a_1, b_1 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\exists \nu_k \in [0, k), \nu_0 = 0,\ \forall s \in \mathbb{Z}_+\ \exists \rho_s \in [0, s),$$

$$\rho_0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}:\ \ |x^k \psi^{(s)}(x)| \le c_1 s! \Big(\frac{b_1}{\rho_s}\Big)^s \times$$

$$\times \Big(\frac{\nu_k}{a_1}\Big)^k \exp\{\Omega(\rho_s) - M(\nu_k)\}\Big), x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

де ρ_s – розв'язок рівняння $x\omega(x) = s$, $x\omega(x) = s$, $s \in \mathbb{Z}_+$, ν_k – розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Зазначимо, що нерівності (3) еквівалентні таким нерівностям [10]

$$|\psi^{(s)}(\sigma)| \le c_1 \frac{s! b_1^s}{\rho_s^s} \exp\{\Omega(\rho_s) - M(a_1\sigma)\}, \sigma \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

З (3) та вигляду функції $Q_1(t, \sigma)$ випливає, що функція Q_1 та її похідні (по σ) задовольняють нерівності

$$|\sigma^k D_\sigma^s Q_1(t, \sigma)| \le c_1 s! t^s \Big(\frac{b_1}{\rho_s}\Big)^s \Big(\frac{\nu_k}{a_1}\Big)^k \times$$

$$\times \exp\{\Omega(\rho_s) - M(\nu_k)\}, \quad (5)$$

де сталі c_1, a_1, $b_1 > 0$ не залежать від t. З урахуванням (4) знаходимо, що нерівності (5) еквівалентні наступним нерівностям

$$|D_\sigma^s Q_1(t, \sigma)| \le c_1 s! t^s \frac{b_1^s}{\rho_s^s} \exp\{\Omega(\rho_s) - M(a_1\sigma)\}. \quad (6)$$

Зауважимо, що

$$D_\sigma^1 Q_2(\sigma) = Q_2^2(\sigma) A'(\sigma) \sum_{k=1}^m \mu_k t_k \times$$

$$\times \exp\{t_k A(\sigma)\} = Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma),$$

де

$$R(\sigma) := \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}.$$

Отже, для $l \ge 1$

$$D_\sigma^l (D_\sigma^1 Q_2(\sigma)) = D_\sigma^l (Q_2^2(\sigma) \cdot D_\sigma^1 R(\sigma)) =$$

$$= \sum_{i=0}^l C_l^i D_\sigma^i Q_2^2(\sigma) \cdot D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma).$$

Для обчислення і оцінки похідної $D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)$ скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{m=1}^s \frac{d^m}{dg^m} F(g) \cdot \sum \frac{s!}{m_1! \dots m_l!} \times$$

$$\times \Big(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma)\Big)^{m_1} \dots \Big(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma)\Big)^{m_l},$$

де знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $s = m_1 + 2m_2 + \dots + l m_l$, $m = m_1 + \dots + m_l$. У цій формулі покладемо $F = g^{-2}$, $g = R$; тоді

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| = \Bigg| \sum_{j=1}^i \frac{d^j}{dR^j} (R^{-2}) \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_\nu = j \\ j_1 + 2j_2 + \dots + \nu j_\nu = i}} \frac{i!}{j_1! \dots j_\nu!} \times$$

$$\times \Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{j_1} \dots \Big(\frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big)^{j_\nu} \Bigg|.$$

Урахувавши нерівність (6) знайдемо, що

$$\Big| \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big)^{j_\nu} \Big| \le \frac{1}{\nu!} \sum_{k=1}^m \mu_k \Big| \frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} e^{t_k A(\sigma)} \Big| \le$$

$$\le c_1 \sum_{k=1}^m \mu_k t_k^\nu \frac{b_1^\nu}{\rho_\nu^\nu} e^{\Omega(\rho_\nu) - M(a_1\sigma)} \le$$

$$\le c_1 \mu_0 T^\nu \frac{b_1^\nu}{\rho_\nu^\nu} e^{\Omega(\rho_\nu) - M(a_1\sigma)}, \quad \mu_0 = \sum_{k=1}^m \mu_k.$$

Тоді

$$\Big| \Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{j_1} \Big| \dots \Big| \Big(\frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big)^{j_\nu} \Big| \le$$

$$\le (c_1 \mu_0)^{j_1 + \dots + j_\nu} \frac{(T b_1)^{j_1 + 2j_2 + \dots + \nu j_\nu}}{\rho_1^{j_1} \rho_2^{2j_2} \dots \rho_\nu^{\nu j_\nu}} \times$$

$$\times \exp\{j_1 \Omega(\rho_1) + \dots + j_\nu \Omega(\rho_\nu) -$$

$$-(j_1 + \dots + j_\nu) M(a_1\sigma)\}.$$

Із властивостей послідовності $\{\rho_\nu, \nu \in \mathbb{Z}_+\}$ та функції Ω випливають нерівності

$$\rho_2 \ge \rho_1, \dots, \rho_\nu \ge \rho_1, \Omega(\rho_1) \le \Omega(\rho_\nu), \dots,$$

$$\Omega(\rho_{\nu-1}) \le \Omega(\rho_\nu).$$

Отже,
$$\Big|\Big(\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)\Big)^{j_1}\Big|\dots\Big|\Big(\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu}R(\sigma)\Big)^{j_\nu}\Big|\le$$
$$\le(c_1\mu_0)^j\frac{(Tb_1)^i}{\rho_1^i}e^{j(\Omega(\rho_\nu)-M(a_1\sigma))}.$$
Таким чином,
$$|D_\sigma^iQ_2^2(\sigma)|\le i!\frac{(Tb_1)^i}{\rho_1^i}\sum_{j=1}^i(c_1\mu_0)^j\times$$
$$\times e^{j(\Omega(\rho_i))-M(a_1\sigma)}\frac{1}{R^{2+j}(\sigma)}\le$$
$$\le i\cdot i!\frac{(Tb_1)^i}{\rho_1^i}\beta^ie^{i(\Omega(\rho_i))}\sum_{j=1}^i\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|}\le$$
$$\le i!\tilde{b}^ie^{i\Omega(\rho_i)}\sum_{j=1}^i\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|},$$
де $\beta=\max\{1,c_1\mu_0\}$, $\tilde{b}=2Tb_1\beta/\rho_1$.

Скориставшись властивостями функції $A(\sigma)$ одержимо, що
$$\exp\{t_kA(\sigma)\}\le\beta_k\exp\{-t_kM(a\sigma)\}\le\beta_k,$$
$$\beta_k>0,k\in\{1,\dots,m\},\sigma\in\mathbb{R}.$$
Тоді
$$\sum_{k=1}^m\mu_k\exp\{t_kA(\sigma)\}\le\sum_{k=1}^m\mu_k\beta_k\le\beta_0\sum_{k=1}^m\mu_k=$$
$$=\beta_0\mu_0,\sigma\in\mathbb{R},$$
де $\beta_0=\max\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. Надалі вважатимемо, що $\mu>\mu_0\beta_0$. Тоді
$$\frac{1}{|R(\sigma)|}=\frac{1}{\Big|\mu-\sum\limits_{k=1}^m\mu_k\exp\{t_kA(\sigma)\}\Big|}\le\frac{1}{\mu-\mu_0\beta_0}.$$
Отже,
$$\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|}\le(\mu-\mu_0\beta_0)^{-(2+j)}=\alpha_0\tilde{B}^j,$$
$$\alpha_0=(\mu-\mu_0\beta_0)^{-2},\tilde{B}=(\mu-\mu_0\beta_0)^{-1},\sigma\in\mathbb{R}.$$
Підсумовуючи, знаходимо, що
$$|D_\sigma^iQ_2^2(\sigma)|\le\alpha_0i!\tilde{b}^i\cdot e^{i\Omega(\rho_i)}\sum_{j=1}^i\tilde{B}^j\equiv\delta_i,\sigma\in\mathbb{R}.$$

Міркуючи аналогічно до попереднього дістанемо, що
$$|D_\sigma^{l+1-i}R(\sigma)|\le\tilde{\delta}_{l+1-i},0\le i\le l,\sigma\in\mathbb{R}.\quad(7)$$

Урахувавши оцінки (6), (7), прийдемо до нерівностей
$$|\sigma^kD_\sigma^sQ(t,\sigma)|\le\sum_{p=0}^sC_s^p|\sigma^kD_\sigma^pQ_1(t,\sigma)|\times$$
$$\times|D_\sigma^{s-p}Q_2(\sigma)|\le c_1\sum_{p=0}^sC_s^pp!t^p\Big(\frac{b_1}{\rho_p}\Big)^p\Big(\frac{\nu_k}{a_1}\Big)^k\times$$
$$\times e^{\Omega(\rho_p)-M(\nu_k)}\delta''_{s-p}\le\beta_{ks}\cdot\varphi_s(t),\quad\sigma\in\mathbb{R},\rho_0^0:=1,$$
де
$$\beta_{ks}=c_1\sum_{p=0}^sC_s^pp!\Big(\frac{b_1}{\rho_p}\Big)^pe^{\Omega(\rho_p)}\Big(\frac{\nu_k}{a_1}\Big)^k,$$
$$\varphi_s(t)=\begin{cases}t, & 0<t\le1,\\ t^s, & t>1.\end{cases}$$
Твердження доведено.

Лема 2. *Функція $Q(t,\sigma)$, $t\in(0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$, диференційовна по t.*

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення
$$\Phi_{\Delta t}(\sigma):=\frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma)-Q(t,\sigma)]\underset{\Delta t\to0}{\longrightarrow}$$
$$\to\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma),\quad\sigma\ge0,$$
виконується в розумінні збіжності в просторі S, тобто
$$\sigma^pD_\sigma^q\Phi_{\Delta t}\underset{\Delta t\to0}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}}\sigma^pD_\sigma^q\Big(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot)\Big)\quad(8)$$
для довільних $\{p,q\}\subset\mathbb{Z}_+$.

Функція $Q(t,\sigma)$ диференційовна по t у звичайному розумінні, тому
$$\Phi_{\Delta t}(\sigma)=\frac{\partial}{\partial t}Q(t+\theta\Delta t,\sigma),\quad0<\theta<1,\sigma\ge0.$$
Урахувавши вигляд функції $Q(t,\sigma)$ знайдемо, що
$$\Phi_{\Delta t}(\sigma)-\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)=\frac{\partial}{\partial t}(Q(t+\theta\Delta t,\sigma)-$$

$$-Q(t,\sigma)) = \theta\Delta t\frac{\partial^2}{\partial^2}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma) =$$

$$= \theta\Delta t\cdot A^2(\sigma)Q_1(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\cdot Q_2(\sigma), 0<\theta_1<1.$$

Тоді

$$\Lambda_{p,q}(\sigma) := \Big|\sigma^p D_\sigma^q\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big)\Big| =$$

$$= \theta|\Delta t|\cdot\Big|\sigma^p\sum_{l=0}^{q} C_q^l D_\sigma^l(A^2(\sigma)\times$$

$$\times Q_1(t+\theta_1\Delta t,\sigma))\cdot D_\sigma^{q-l}Q_2(\sigma)\Big|.$$

Згідно з інтегральною формулою Коші маємо, що

$$D_\sigma^l(A^2(\sigma)\cdot Q_1(t+\theta_1\Delta t,\sigma)) =$$

$$= \frac{l!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{A^2(z)Q_1(t+\theta_1\Delta t,z)}{(z-\sigma)^{l+1}}dz,$$

$$l\in\mathbb{Z}_+, z=\sigma+i\tau, \sigma\ge 0, \tau\in\mathbb{R},$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці σ. Із властивостей функцій A та Q_1 випливають наступні нерівності:

$$\Delta_l^{(\sigma)} := |D_\sigma^l(A^2(\sigma)Q_1(t+\theta_1\Delta t,\sigma))| \le$$

$$\le \frac{l!}{R^l}\max_{z\in\Gamma_R}|A^2(z)Q_1(t+\theta_1\Delta t,z)| \le$$

$$\le \frac{l!}{R^l}c_\varepsilon^2\exp\{2M(\varepsilon(\sigma+R)+2\Omega(\varepsilon R))-$$

$$-(t+\theta_1\Delta t)M(a_1\sigma_0)+2T\Omega(b_1R)\}.$$

Тут вважаємо, що $t+\theta_1\Delta t\ge t/2$, $t+\theta_1\Delta t\le 2T$, $\varepsilon>0$ – довільна стала, $c_\varepsilon>0$ – стала, яка відповідає $\varepsilon>0$ (c_ε існує внаслідок умов, які задовольняє функція A), σ_0 – точка максимуму функції $\exp\Big\{-\dfrac{t}{2}M(a_1\sigma)\Big\}$. Оскільки M є зростаючою на $[0,\infty)$ функцією, то $\sigma_0\in\{0,\sigma-R\}$, тобто $\sigma_0=\sigma+\beta R$, де $\beta\in\{0,-1\}$, причому $\beta=0$, якщо $\sigma=0$.

Із властивості опуклості функції M випливають нерівності

$$-M(a_1(\sigma+\beta R)) \le -M(a_1\sigma) - M(a_1\beta R).$$

Аналогічно, якщо $2T\le N$, де $N\in\mathbb{N}$, то

$$2T\Omega(b_1R) \le N\Omega(b_1R) \le \Omega(b_1NR).$$

Якщо вважати також, що $0<t/2\le 1$, то для опуклої функції M справджується нерівність $\dfrac{t}{2}M(a_1\sigma) \ge M\Big(\dfrac{t}{2}a_1\sigma\Big)$, тобто $-\dfrac{t}{2}M(a_1\sigma)\le -M\Big(\dfrac{t}{2}a_1\sigma\Big)$. Отже,

$$\Delta_l(\sigma) \le c_\varepsilon^2\frac{l!}{R^l}\exp\Big\{M(2\varepsilon(\sigma+R)) - M\Big(\frac{t}{2}a_1\sigma\Big) +$$

$$+\Omega(b_0R)\Big\},$$

де $b_0=2\varepsilon+b_1N$. Покладемо $\varepsilon=a_1t/4$ (t – фіксоване) і ще один раз скористаємося нерівності опуклості для функції M, з якої випливає, що

$$M(2\varepsilon(\sigma+R)) - M\Big(\frac{t}{2}a_1\sigma\Big) \le -M\Big(\frac{t}{2}a_1\sigma-$$

$$-2\varepsilon(\sigma+R)\Big) = -M\Big(-\frac{t}{4}a_1R\Big) = -M\Big(\frac{t}{4}a_1R\Big).$$

Тоді

$$\Delta_l^{(\sigma)} \le c_\varepsilon^2\frac{l!}{R^l}\exp\{\Omega(b_0R)\} \le c_\varepsilon^2 l!\varphi_l,$$

$$\varphi_l = \min_R(R^{-n}\exp\{\Omega(b_0R)\}) \equiv \min_R\tilde\varphi_l(R).$$

Легко бачити, що

$$\tilde\varphi_l'(R) = e^{\Omega(b_0R)}(b_0\Omega'(b_0R) - lR^{-1})R^{-l} =$$

$$= e^{\Omega(b_0R)}(b_0\omega(b_0R) - lR^{-1})R^{-l}$$

(тут $\omega=\Omega'$, ω – функція, за якою будується функція Ω: $\Omega(\xi)=\int\limits_0^\xi\omega(y)dy$). Прирівнявши $\tilde\varphi_l'(R)$ до нуля, дістанемо співвідношення для відшукання R: $b_0R\omega(b_0R)=l$, $l\in\mathbb{Z}_+$. Безпосередньо переконуємося в тому, що кожна функція $\tilde\varphi_l$, $l\in\mathbb{Z}_+$, досягає свого мінімуму в точці $R_l=\rho_l$, де ρ_l – розв'язок рівняння $\sigma\omega(\sigma)=l$, $l\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in[0,\infty)$. При цьому

$$\min_R\tilde\varphi_l(R) = \rho_l^{-l}\exp\{\Omega(\rho_l)\}.$$

Отже,

$$\Delta_l(\sigma) \le c_\varepsilon^2 l!\rho_l^{-l}\exp\{\Omega(\rho_l)\} \equiv \gamma_l, \qquad (9)$$

$$l\in\mathbb{Z}_+, \sigma\ge 0,$$

причому стала γ_l не залежить від Δt.

Зауважимо, що якщо проаналізувати доведення леми 1, то можна побачити, що оцінки похідних функції Q_2 містять як множник функцію $\exp\{-M(a_1\sigma)\}$, тобто мають вигляд

$$|D^n_\sigma Q_2(\sigma)| \leq \delta_n \exp\{-M(a_1\sigma)\},$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \sigma \geq 0. \quad (10)$$

Урахувавши (9), (10) та міркуючи аналогічно тому, як це зроблено при доведенні леми 1, прийдемо до нерівностей

$$0 \leq \sup_{\sigma\geq 0} \Lambda_{p,q}(\sigma) \leq \gamma_{p,q} \cdot |\Delta t|, \quad \{p,q\} \subset \mathbb{Z}_+$$

($\gamma_{p,q} > 0$ не залежить від Δt), звідки і випливає співвідношення (8) при $\Delta t \to 0$. Отже, у випадку $0 < t/2 \leq 1$ лема доведена. Якщо $t/2 > 1$, то $t/2 = [t/2] + \{t/2\}$. Тоді

$$\exp\Big\{-\frac{t}{2}M(a_1\sigma)\Big\} = \exp\Big\{-\Big[\frac{t}{2}\Big]M(a_1\sigma)-$$
$$-\Big\{\frac{t}{2}\Big\}M(a_1\sigma)\Big\} \leq \exp\Big\{-\Big\{\frac{t}{2}\Big\}M(a_1\sigma)\Big\}.$$

Оскільки $0 < \{t/2\} < 1$, то цей випадок зводиться до попереднього.

Твердження доведено.

Дослідимо тепер основні властивості функції $G(t,x)$. Як і у випадку двоточкової задачі для рівняння (1) (див. [4]) переконуємося в тому, що функція $G(t,x)$ неперервно диференціойвна на проміжку $(0,T]$ (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$). Оскільки $G(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[Q(t,\sigma)](x)$, то з леми 1 випливає, що $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}$ при кожному $t \in (0,T]$. Із властивості неперервності перетворення Бесселя (прямого та оберненого) та леми 2 дістаємо також, що $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$, диференційовна по t. Звідси вже випливає співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial}(f * G) = f * \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \forall f \in (\overset{\circ}{S})', t \in (0,T]$$

(доведення цієї формули аналогічне доведенню подібного співвідношення у випадку двоточкової задачі для рівняння (1); див. [4]).

Лема 3. *У просторі $(\overset{\circ}{S})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} G(t,\cdot) = \delta \quad (11)$$

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Бесселя F_{B_ν}: $(\overset{\circ}{S})' \to (\overset{\circ}{S})'$ та неперервністю $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$, (11) замінимо еквівалентним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F_{B_\nu}[G(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} F_{B_\nu}[G(t,\cdot)] =$$
$$= F_{B_\nu}[\delta]. \quad (12)$$

Урахувавши зображення функції G, (12) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1. \quad (13)$$

Співвідношення (13) розглядаємо в просторі $(\overset{\circ}{S})'$. Для доведення (13) візьмемо довільну функцію $\psi \in \overset{\circ}{S}$ і скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$
$$= \mu \lim_{t\to+0} \int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma-$$
$$-\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} \int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$
$$= \mu \int_0^\infty Q(0,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma-$$
$$-\sum_{k=1}^m \mu_k \int_0^\infty Q(t_k,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \Big[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k Q(t_k,\sigma)\Big]\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}} -$$

$$- \frac{\mu_1 \exp\{t_1 A(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}} - \dots -$$

$$- \frac{\mu_m \exp\{t_m A(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}}\Big]\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mu - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k A(\sigma)\}}\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= \langle 1, \psi\rangle.$$

Звідси вже дістаємо, що (13) має місце, а, отже, правильним є співвідношення (11).

Лема доведена.

Наслідок 1. *Нехай*

$$\omega(t,x) = (\varphi * G)(t,x), \varphi \in (\overset{\circ}{S}_*)', (t,x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі $(\overset{\circ}{S})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = \varphi \qquad (14)$$

(тут $(\overset{\circ}{S}_*)'$ *– клас узагальнених функцій з простору* $(\overset{\circ}{S})'$*, які є згортувачами в просторі* $\overset{\circ}{S}$*).*

Доведення. Оскільки

$$(\varphi * G)(t,x) = \langle \varphi_\xi, T_x^\xi G(t,x)\rangle = \langle \varphi_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle,$$

то з умови $\varphi \in (\overset{\circ}{S}_*)'$ та властивості неперервності $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ у просторі $\overset{\circ}{S}$ випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ у просторі $\overset{\circ}{S}$. Тоді, урахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя F_{B_ν}: $(\overset{\circ}{S})' \to (\overset{\circ}{S})'$ та формулу

$$F_{B_\nu}[\varphi * G] = F_{B_\nu}[\varphi] \cdot F_{B_\nu}[G] = F_{B_\nu}[\varphi] \cdot Q(t,\sigma),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції φ з класу $(\overset{\circ}{S}_*)'$, співвідношення (14) запишемо в еквівалентному вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F_{B_\nu}[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} F_{B_\nu}[\omega(t,\cdot)] =$$

$$= F_{B_\nu}[\varphi]\Big(\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot)\Big) =$$

$$= F_{B_\nu}[\varphi].$$

Із леми 3 випливає, що

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1.$$

Звідси вже дістаємо, що співвідношення (14) має місце.

Твердження доведено.

Функція G задовольняє рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}F^{-1}_{B_\nu}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}_{B_\nu}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big],$$

$$BG(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[A(\sigma)F_{B_\nu}[G(t,x)]] =$$

$$= F^{-1}_{B_\nu}[A(\sigma)Q(t,\sigma)] = F^{-1}_{B_\nu}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

Звідси вже випливає, що функція G задовольняє рівняння (1).

З наслідку 1 дістаємо, що для рівняння (1) багатоточкову задачу можна поставити так:

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \qquad (15)$$

де $\varphi \in (\overset{\circ}{S}_*)'$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 \dots < t_m = T$. Під розв'язком задачі (1), (15) розуміємо функцію $u \in C^1((0,T], \overset{\circ}{\Phi})$, яка задовольняє рівняння (1) та умову (15) в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = \varphi$$

(границя розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S})'$).

Теорема 1. *Задача (1), (15) є коректно розв'язною; розв'язок подається у вигляді згортки*

$$u(t,x) = \varphi * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_+.$$

Доведення цієї теореми здійснюється за схемою доведення теореми 1 з праці [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі / Михайло Іванович Матійчук. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.

2. *Городецький В.В.* Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування / Василь Васильович Городецький, Ольга Василівна Мартинюк // Доповіді НАН України. – 2003. – № 6. – С. 7-12.

3. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку / Василь Васильович Городецький, Ольга Василівна Мартинюк // Доповіді НАН України. – 2003. – № 9. – С. 18-24.

4. *Тупкало І.С.* Двоточкова задача для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку / І.С. Тупкало // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 454. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 116-127.

5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / Василий Сергеевич Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 528 с.

6. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.И. Левитан // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102-143.

7. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя / Я.И. Житомирский // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, N 2. – С. 299-310.

8. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

9. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладання просторів типу W / Т.І. Готинчан // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 39-44.

10. *Готинчан Т.І.* Різні форми означення просторів типу W / Т.І. Готинчан, Р.М. Атаманюк // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 21-26.