УДК 519.8

©2010 р. М.Ю. Горбатенко, Ю.К. Подлипенко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МІНІМАКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЗА НЕПОВНИМИ ДАНИМИ РОЗВ'ЯЗКУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ ЇЇ ЗМІШАННОГО ВАРІАЦІЙНОГО ФОРМУЛЮВАННЯ

Одержано новий клас систем варіаційних рівнянь, через розв'язки яких виражаються мінімаксні оцінки функціоналів від невідомих розв'язків початково–крайових задач для рівняння теплопровідності.

We obtain a new class of systems of variational equations via whose solutions the minimax estimates of functionals from unknown solutions to the initial boundary value problem for the heat equations are expressed.

Вступ. Більшість результатів в області мінімаксного оцінювання станів систем, що описуються рівняннями з частинними похідними, було отримано з використанням традиційного формулювання відповідних варіаційних крайових задач (див. [1, 2] та вказану там літературу).

Такий підхід дозволяє, наприклад, в нестаціонарних задачах теплопровідності, оцінювати невідомий розподіл температури за її спостереженнями. Однак не менший, а часто навіть й більший інтерес являє собою задача оцінювання теплового потоку, а також задача оцінювання температури за спостереженнями теплового потоку.

Відмітимо, що відомі на даний момент методи оцінювання не дозволяють вирішувати подібні задачі.

В роботі запропоновано новий метод[1], який дозволяє оцінювати разом з розподілом температур, й тепловий потік за згадуваними спостереженнями.

Перераховані задачі оцінювання мають важливе прикладне значення в багатьох областях, тому їхній теоретичний аналіз є актуальним.

Позначення та допоміжні факти. В роботі використовуються такі позначення:

якщо U_1 та U_2 – лінійні топологічні простори, то $\mathcal{L}(U_1, U_2)$ – клас всіх неперервних відображень U_1 в U_2;

H – гільбертів простір над $\mathbb{R}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$ та нормою $\|\cdot\|_H$;

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – просторова змінна;

$dx = dx_1 \dots dx_n$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$;

через $\chi_M(x)$ будемо позначати характеристичну функцію множини $M \subset \mathbb{R}^n$.

Позначимо через $H^s(\mathbb{R}^n)$ простір Соболєва порядку s:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |y|^2)^{s/2}\mathcal{F}u(y) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

де $s \geq 0$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ простір функцій, сумовних з квадратом в $\mathbb{R}^n$, а через $\mathcal{F}u(y)$ позначено перетворення Фур'є функції $u(x)$. Якщо $s < 0$, то через $H^s(\mathbb{R}^n)$ позначимо простір, двоїстий до $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Нехай D область в $\mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею $\partial D = \Gamma$. Тоді через $d\Gamma$ будемо позначати елементи міри на поверхні Γ. Через $L^2(\Gamma)$ позначимо простір функцій, сумовних з квадратом на поверхні Γ.

Введемо такі простори Соболєва з відповідними нормами:

$$H^s(D) = \{u|_D : u \in H^s(\mathbb{R}^n)\} \ (s \in \mathbb{R}),$$

$$L^2(D) := H^0(D), \quad H^s(\Gamma) = \begin{cases} u|_{\partial D} : u \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^n) & (s > 0), \\ L^2(\Gamma) & (s = 0), \\ H^{-s}(\Gamma)' & (s < 0), \end{cases}$$

[1] Відмітимо, що в роботі [3] подібний метод розроблений для задач оцінювання за неповними даними розв'язків та правих частин лінійних еліптичних рівнянь.

$H^{-s}(\Gamma)'$ – двоїстий простір до $H^{-s}(\Gamma)$.

Для будь-якої ліпшицевої області D позначимо через $\gamma_D : C^0(\bar{D}) \to C^0(\Gamma)$ вигляду $(\gamma_D u)(x) := u(x)$, $x \in \Gamma$, $u \in C^0(\bar{D})$, оператор, що може бути розширений до неперервного та сюр'єктивного оператора $\gamma_D : H^1(D) \to H^{1/2}(\Gamma)$.

Нехай $\mathcal{D}(D)$ (відповідно $\mathcal{D}(\bar{D})$) – простір нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм, що міститься в D (відповідно в $\bar{D}$); $\boldsymbol{\mathcal{D}}(D) = \{\mathcal{D}(D)\}^n$; $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\bar{D}) = \{\mathcal{D}(\bar{D})\}^n$. Позначимо через $\mathcal{D}'(D)$ множину лінійних неперевних функціоналів (розподілів) на D. Якщо $T \in \mathcal{D}'(D)$, то через $< T, \phi >$ позначимо його значення на функції $\phi \in \mathcal{D}(D)$. Покладемо $\boldsymbol{\mathcal{D}'}(D) = \{\mathcal{D}'(D)\}^n$.

Якщо $T \in \mathcal{D}'(D)$, то похідна $\frac{\partial}{\partial x_i}T$ визначається рівністю

$$< \frac{\partial}{\partial x_i}T, \phi >= - < T, \frac{\partial}{\partial x_i}\phi > \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(D).$$

Для будь-якого $v \in \mathcal{D}'(D)$ покладемо

$$\operatorname{grad} v := \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^T,$$

що визначає лінійний диференціальний оператор grad з $\mathcal{D}'(D)$ в $\boldsymbol{\mathcal{D}'}(D)$.

Визначимо лінійний диференціальний оператор div з $\boldsymbol{\mathcal{D}'}(D)$ в $\mathcal{D}'(D)$ рівністю

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \boldsymbol{\mathcal{D}'}(D).$$

Через $H_0^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, позначимо замикання $\mathcal{D}(D)$ в $H^s(D)$.

Далі використовуються такі позначення:

$L^2(D)^n$ – гільбертів простір, що складається з вектор-функцій $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, компоненти яких належать простору $L^2(D)$, із звичайною нормою та скалярним добутком, що відповідають добутку цього простору;

$H(\operatorname{div}; D) := \{\mathbf{v} \in L^2(D)^n, \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(D)\}$ – гільбертів простір з нормою

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div};D)} := \{\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(D)^n} + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2_{L^2(D)}\}^{1/2};$$

$\gamma_{\boldsymbol{\nu}} : H(\operatorname{div}, D) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ – лінійний неперервний оператор такий, що $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}$ = звуженню $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})_{\mathbb{R}^n}$ на Γ для кожної вектор-функції $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\bar{D})$, $\boldsymbol{\nu}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ;

t – часова змінна; $\mathcal{D}((t_0, T))$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм на інтервалі (t_0, T); $L^2(t_0, T; H)$ – простір функцій $t \to f(t)$, що відображають інтервал (t_0, T) в простір H, вимірних (по відношенню до міри Лебега dt) на інтервалі (t_0, T) із значеннями в гільбертовому просторі H й таких, що

$$\int_{t_0}^{T} \|f(\cdot, t)\|_H^2 dt < \infty.$$

Якщо $f \in L^2(t_0, T; H)$, то можна визначити узагальнену похідну df/dt як єдиний елемент простору $\mathcal{D}'((t_0, T); H) = \mathcal{L}(\mathcal{D}((t_0, T)); H))$ узагальнених функцій із значеннями в H, яка задовольняє співвідношення

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = - \int_{t_0}^{T} f(t) \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}((t_0, T)),$$

де інтеграл в правій частині розуміється в сенсі Бохнера.

Через $W(t_0, T)$ позначимо простір функцій $f \in L^2(t_0, T; H_0^1(D))$ таких, що $df/dt \in L^2(t_0, T; L^2(D))$.

В подальшому будемо припускати, що границя Γ області D класу C^2. Нам буде необхідний наступний розклад Ходжа простору $L^2(D)^n$, справедливий для такого класу областей:

$$L^2(D)^n = \operatorname{grad} H_0^1(D) \oplus H_1 \oplus H_2, \qquad (1)$$

де $\operatorname{grad} H_0^1(D)$, H_1, H_2, – взаємно ортогональні простори,

$$\operatorname{grad} H_0^1(D) = \{\mathbf{u} \in L^2(D)^n,\ \mathbf{u} = \operatorname{grad} p,$$
$$p \in H_0^1(D)\},\ H_1 = \{\mathbf{u} \in L^2(D)^n,\ \mathbf{u} = \operatorname{grad} p,$$
$$p \in H^1(D), \Delta p = 0\},$$
$$H_2 = \{\mathbf{u} \in L^2(D)^n, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \gamma_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u} = 0\},$$

будь-які два з яких перетинаються по $\{0\}$ (див., наприклад, [4, 5]).

Постановка задачі. Нехай стан системи характеризується функцією $\varphi(x, t)$, що має зміст температури, та визначається як узагальнений розв'язок початково-крайової задачі Діріхле для рівняння теплопровідності:

$$\varphi_t - \Delta\varphi = f \quad \text{в} \quad Q = D \times (t_0, T), \tag{2}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (t_0, T), \tag{3}$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{на} \quad D \tag{4}$$

під яким, у відповідності до [6, 7], розуміється розв'язок наступної змішаної варіаційної задачі:

$$\varphi \in W(t_0,T), \quad \mathbf{j} \in L^2(t_0,T; H(\mathrm{div}, D)), \tag{5}$$

$$(\mathbf{j}(\cdot,t), \boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n} + (\varphi(\cdot,t), \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)} = 0$$
$$\forall \boldsymbol{\psi} \in H(\mathrm{div}, D), \tag{6}$$

$$(\varphi_t(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} =$$
$$= (f(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} \quad \forall \chi \in L^2(D), \tag{7}$$

$$\varphi(\cdot, t_0) = \varphi_0(\cdot) \quad \text{в} \quad D, \tag{8}$$

де $\mathbf{j} = \mathrm{grad}\,\varphi$, а $f(x,t)$ та $\varphi_0(x)$ – невідомі функції, що належать множині

$$G_0 := \Big\{ (\tilde{f}, \tilde{\varphi}_0) \in L^2(Q) \times L^2(D) : \Big(Q_1(\tilde{f} - f_0), \tilde{f} - f_0\Big)_{L^2(Q)} + \\ + \Big(Q_2(\tilde{\varphi}_0 - a_0), \tilde{\varphi}_0 - a_0\Big)_{L^2(D)} \leq 1 \Big\}, \tag{9}$$

$f_0 \in L^2(Q)$ та $a_0 \in L^2(D)$ – задані функції, $Q_1 : L^2(Q) \to L^2(Q)$, $Q_2 : L^2(D) \to L^2(D)$ – неперервні додатно визначені самоспряжені оператори, обернені до яких є обмеженими, $Q = D \times (t_0, T)$.

Відзначимо, що в (2)–(8) $\mathbf{j}$ та φ ідентифікуються з функціями $\mathbf{j}(x;t)$ та $\varphi(x;t)$, такими, що $\mathbf{j}(t)$ та $\varphi(t)$ позначають функції $x \to \mathbf{j}(x;t)$ та $x \to \varphi(x;t)$ для майже всіх t. Похідна в сенсі розподілів $\frac{d\varphi}{dt}$ ідентифікується з похідною $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ функції φ в $\mathcal{D}'(D \times (t_0,T))$ та рівності (6), (7) виконуються майже скрізь на інтервалі (t_0, T).

Для будь-яких $f \in L^2(Q)$, $\varphi_0 \in L^2(D)$ існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі (5)–(8) показано в [6, 7].

Можна показати, що загальніша задача

$$\varphi \in W(t_0,T), \quad \mathbf{j} \in L^2(t_0,T; H(\mathrm{div}, D)), \tag{10}$$

$$(\mathbf{j}(\cdot,t), \boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n} + (\varphi(\cdot,t), \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)} = \mathbf{g}$$
$$\forall \boldsymbol{\psi} \in H(\mathrm{div}, D), \tag{11}$$

$$(\varphi_t(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} =$$
$$= (f(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} \quad \forall \chi \in L^2(D), \tag{12}$$

$$\varphi(\cdot, t_0) = \varphi_0(\cdot) \quad \text{в} \quad D, \tag{13}$$

а також задача

$$\tilde{\varphi} \in W(t_0,T), \quad \tilde{\mathbf{j}} \in L^2(t_0,T; H(\mathrm{div}, D)), \tag{14}$$

$$(\tilde{\mathbf{j}}(\cdot,t), \boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n} + (\tilde{\varphi}(\cdot,t), \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)} = \tilde{\mathbf{g}}$$
$$\forall \boldsymbol{\psi} \in H(\mathrm{div}, D), \tag{15}$$

$$(\tilde{\varphi}_t(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} + (\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{j}}(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} =$$
$$= (\tilde{f}(\cdot,t), \chi)_{L^2(D)} \quad \forall \chi \in L^2(D), \tag{16}$$

$$\tilde{\varphi}(\cdot, T) = \tilde{\varphi}_0(\cdot) \quad \text{в} \quad D, \tag{17}$$

однозначно розв'язні для будь-яких функцій $\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}} \in L^2(t_0,T; \mathrm{grad}\,H_0^1(D))$ таких, що $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial t} \in L^2(t_0,T; \mathrm{grad}\,H_0^1(D))$, та для будь-яких функцій $f, \tilde{f} \in L^2(Q)$, $\varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \in L^2(D)$. Дійсно, за допомогою заміни $\varphi_1 = \varphi + \varphi^1$, де функція $\varphi^1(\cdot,t) \in H_0^1(D)$ така, що $\mathrm{grad}\,\varphi^1(\cdot,t) = \mathbf{g}(\cdot,t)$, задача (10)–(13) зводиться до задачі вигляду (5)–(8), яка має єдиний розв'язок.

Однозначна розв'язність задачі (14)–(17) випливає того, що в результаті заміни змінної $t' = T - t + t_0$ ця задача зводиться до задачі вигляду (10)–(13). Ці фактори будуть використані в подальшому.

З фізичної точки зору, крайова задача (2)–(4), або еквівалентна їй задача (5)–(8), моделює нестаціонарний процес розповсюдження тепла в області D, при цьому функції $\mathbf{j}(x,t)$ та $f(x,t)$ відповідно мають зміст теплового потоку та об'ємної щільності теплових джерел в точці x в момент часу t.

Задача, що досліджується в цій роботі, полягає в тому, щоб за спостереженнями на часовому інтервалі (t_0, T)

$$\mathbf{y}_{i_1}^{(1)}(x,t,\omega) = \int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_1}^{(1)}} \mathbf{K}_{i_1}^{(1)}(x,t,\xi,\tau) \times \\ \times \mathbf{j}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \boldsymbol{\eta}_{i_1}^{(1)}(x,t,\omega), \ t \in (t_0,T),$$

$$x \in D_{i_1^{(1)}},\ i_1 = \overline{1, n_1}, \tag{18}$$

$$y_{i_2}^{(2)}(x,t,\omega) = \int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_2}^{(2)}} K_{i_2}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times\varphi(\xi)\, d\xi\, d\tau + \eta_{i_2}^{(2)}(x,t,\omega),$$

$$t \in (t_0, T),\ x \in D_{i_2^{(1)}},\ i_2 = \overline{1, n_2} \tag{19}$$

теплового потоку $\mathbf{j}$ та температури φ оцінити значення лінійного функціоналу

$$l(\mathbf{j}, \varphi) := \int_{t_0}^{T} \int_{D} (\mathbf{l}_0^{(1)}(x,t), \mathbf{j}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \int_{D} l_0^{(2)}(x,t)\varphi(x,t)\, dx\, dt \tag{20}$$

в класі лінійних за спостереженнями оцінок вигляду

$$\widehat{l(\mathbf{j}, \varphi)} :=$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{D_{i_1}^{(1)}} (\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(x,t), \mathbf{y}_{i_1}^{(1)}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \sum_{i_1=2}^{n_2} \int_{D_{i_2}^{(2)}} u_{i_2}^{(2)}(x,t) y_{i_2}^{(2)}(x,t)\, dx\, dt + c. \tag{21}$$

Тут $D_{i_k}^{(k)}$, $k = 1, 2$, – підобласті D, причому $(\bar{D}_{i_k}^{(k)} \subset D)$, $K_{i_2}^{(2)} \in L^2(Q_{i_2}^{(2)}) \times L^2(Q_{i_2}^{(2)})$, $\mathbf{K}_{i_1}^{(1)}(x,t,\xi,\tau)$-$n \times n$-матриця з елементами, що належать $L^2(Q_{i_1}) \times L^2(Q_{i_1})$, де

$$Q_{i_1}^{(1)} = D_{i_1}^{(1)} \times (t_0, T),\ Q_{i_1}^{(2)} = D_{i_1}^{(2)} \times (t_0, T).$$

$\mathbf{l}_0^{(1)} \in L^2((t_0,T), L^2(D)^n)$, $\frac{\partial \mathbf{l}_0^{(1)}}{\partial t} \in L^2((t_0,T), L^2(D)^n)$ та $l_0^{(2)} \in L^2(Q)$ – задані функції, $\mathbf{u}_{i_1}^{(1)} \in L^2(Q_{i_1}^{(1)})^n, u_{i_2}^{(2)} \in L^2(Q_{i_2}^{(2)})$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_{i_1}^{(1)}(x,t,\omega) = (y_{i_1,1}^{(1)}(x,t,\omega), \ldots, y_{i_1,n}^{(1)}(x,t,\omega))^T$, $\boldsymbol{\eta}_{i_1}^{(1)}(x,t,\omega)$ та $\eta_{i_2}^{(2)}(x,t,\omega)$ – реалізація невідомих випадкових полів $\boldsymbol{\eta}_{i_1}^{(1)}(x,t) = (\eta_{i_1,1}^{(1)}(x,t), \ldots, \eta_{i_1,n}^{(1)}(x,t))^T$ та $\eta_{i_2}^{(2)}(x,t)$, що є перешкодами у спостереженнях. При цьому припускається, що

$$\boldsymbol{\eta} := (\boldsymbol{\eta}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{n_1}^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \ldots, \eta_{n_2}^{(2)}) \in G_1, \tag{22}$$

де через G_1 позначено множину елементів $\tilde{\boldsymbol{\eta}} := (\tilde{\boldsymbol{\eta}}_1^{(1)}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{n_1}^{(1)}, \tilde{\eta}_1^{(2)}, \ldots, \tilde{\eta}_{n_2}^{(2)})$, компоненти $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t) = (\tilde{\eta}_{i_1,1}^{(1)}(x,t), \ldots, \tilde{\eta}_{i_1,n}^{(1)}(x,t))^T$ та $\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t)$ яких – випадкові поля, визначені в областях $Q_{i_1}^{(1)}$, $i_1 = \overline{1, n_1}$, та $Q_{i_2}^{(2)}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$, зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}$ відповідно, з інтегровними за Лебегом в цих областях невідомими другими моментними функціями другого порядку $\mathbb{E}\|\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t)\|_{\mathbb{R}^n}^2$ та $\mathbb{E}(\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t))^2$ та нульовими середніми, що задовольняють такі умови:

(i) векторні випадкові поля $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t)$ так само, як й випадкові поля $\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t)$ попарно некорельовані, тобто взаємні кореляційні матриці полів $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t)$ та $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{j_1}^{(1)}(x,t)$, а також взаємні кореляційні функції полів $\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t)$ та $\tilde{\eta}_{j_2}^{(2)}(x,t)$ при $i_1 \neq j_1$ та $i_2 \neq j_2$ – нульові; компоненти $\tilde{\eta}_{i_1,j}^{(1)}(x,t)$ векторних випадкових полів $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t)$, $i_1 = \overline{1, n_1}$, $j_1 = \overline{1, n}$, некорельовані з випадковими полями $\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t)$, $i_2 = \overline{1, n_2}$;

(ii) кореляційні матриці $\tilde{\mathbf{R}}_{i_1}^{(1)}(x,t,y,\tau) = \mathbb{E}\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t)(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(y,\tau))^T$ полів $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i_1}^{(1)}(x,t)$, $(x,t,y,\tau) \in Q_{i_1}^{(1)} \times Q_{i_1}^{(1)}$, $i_1 = \overline{1, n_1}$, та кореляційні функції $\tilde{R}_{i_2}^{(2)}(x,t,y,\tau) = \mathbb{E}\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t,\omega)\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(y,\tau,\omega)$ полів $\tilde{\eta}_{i_2}^{(2)}(x,t,\omega)$, $(x,t,y,\tau) \in Q_{i_2}^{(1)} \times Q_{i_2}^{(2)}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$, задовольняють нерівності:

$$\int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_1}^{(1)}} \mathrm{Sp}\,[\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)}(x,t)\tilde{\mathbf{R}}_{i_1}^{(1)}(x,t,x,t)]\, dx\, d \le 1,$$

$$i_1 = \overline{1, n_1},$$

$$\int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_2}^{(2)}} \tilde{Q}_{i_2}^{(2)}(x,t)\tilde{R}_{i_2}^{(2)}(x,t,x,t)\, dx\, dt \le 1,$$

$$i_2 = \overline{1, n_2}, \tag{23}$$

де $\tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}_{i_1}(x,t)$ – додатно визначені $n \times n$-матриці з неперервними в областях $\bar{Q}^{(1)}_{i_1}$ елементами, $\tilde{Q}^{(2)}_{i_2}(x)$ – додатні неперервні в областях $\bar{Q}^{(2)}_{i_2}$ функції, а символ Sp позначає слід матриці $\tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}_{i_1}(x,t)\tilde{\mathbf{R}}^{(1)}_{i_1}(x,t,x,t)$, тобто суму її діагональних елементів.

Крім того, будемо припускати, що інтегральні оператори $G^{(j)}_i$ вигляду

$$G_{i_1}\boldsymbol{\psi}(x,t) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D^{(1)}_{i_1}} \mathbf{K}^{(1)}_{i_1}(x,t,\xi,\tau)\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

та

$$P_{i_1}\boldsymbol{\psi}(x,t) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D^{(1)}_{i_1}} (\mathbf{K}^{(1)}_{i_1})^T(\xi,\tau,x,t)\times$$
$$\times\,\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

є такими, що вони відображають простори $L^2(t_0,T;L^2(D^{(1)}_{i_1})) = L^2(Q^{(1)}_{i_1})$ в $L^2(t_0,T;\operatorname{grad} H^1_0(D^{(1)}_{i_1}))$, причому

$$\frac{\partial(G_{i_1}\boldsymbol{\psi})}{\partial t},\ \frac{\partial(P_{i_1}\boldsymbol{\psi})}{\partial t} \in L^2(t_0,T;\operatorname{grad} H^1_0(D^{(1)}_{i_1})),$$

$i_1 = 1,\ldots,n_1$. Легко побудувати приклади таких операторів, наприклад, з виродженими ядрами.

Введемо позначення $H := L^2(Q^{(1)}_1)^n\times\ldots\times L^2(Q^{(1)}_{n_1})^n \times L^2(Q^{(2)}_1)\times\ldots\times L^2(Q^{(2)}_{n_2})$. Тоді H – гільбертів простір, що складається з елементів

$$\mathbf{u} := (\mathbf{u}^{(1)}_1,\ldots,\mathbf{u}^{(1)}_{n_1},u^{(2)}_1,\ldots,u^{(2)}_{n_2})$$

з компонентами $\mathbf{u}^{(1)}_{i_1} \in L^2(Q^{(1)}_{i_1})^n$, $i_1 = \overline{1,n_1}$, $u^{(2)}_{i_2} \in L^2(Q^{(2)}_{i_2})$, $i_2 = \overline{1,n_2}$, норма в якому визначається за формулою

$$\|\mathbf{u}\|_H := \Big(\int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\|\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(\cdot,t)\|^2_{L^2(D^{(1)}_{i_1})^n}dt+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\|u^{(2)}_{i_2}(\cdot,t)\|^2_{L^2(D^{(2)}_{i_2})}dt\Big)^{1/2}.$$

Означення. Оцінку

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{j},\varphi)}} = \int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int\limits_{D^{(1)}_{i_1}}(\hat{\mathbf{u}}^{(1)}_{i_1}(x,t),$$
$$\mathbf{y}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt + \int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int\limits_{D^{(2)}_{i_2}}\hat{u}^{(2)}_{i_2}(x,t)\times$$
$$\times\, y^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt + \hat{c} \tag{24}$$

будемо називати мінімаксною оцінкою виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$, якщо функції $\hat{\mathbf{u}}^{(1)}_{i_1}(x)$, $\hat{u}^{(2)}_{i_2}(x)$ та число $\hat{c}$ визначаються з умови

$$\inf_{\mathbf{u}\in H,\, c\in\mathbb{R}}\sigma(\mathbf{u},c) = \sigma(\hat{\mathbf{u}},\hat{c}), \tag{25}$$

де

$$\sigma(\mathbf{u},c) := \sup_{(\tilde{\mathbf{f}},\tilde{\varphi}_0)\in G_0,\,\tilde{\boldsymbol{\eta}}\in G_1}\mathbb{E}[l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})}]^2,$$

$(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})$ – розв'язок задачі (6)–(8) при $\mathbf{f}(x,t) = \tilde{\mathbf{f}}(x,t)$, $\varphi_0(x) = \tilde{\varphi}_0(x)$,

$$\widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})} = \int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int\limits_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(x,t),$$
$$\tilde{\mathbf{y}}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}dx\,dt + \int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int\limits_{D^{(2)}_{i_2}}u^{(2)}_{i_2}(x,t)\times$$
$$\times\tilde{y}^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt + c, \tag{26}$$

а

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(1)}_{i_1}(x,t) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D^{(1)}_{i_1}}\mathbf{K}^{(1)}_{i_1}(x,t,\xi,\tau)\tilde{\mathbf{j}}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1}(x,t),$$

$$\tilde{y}^{(2)}_{i_2}(x,t) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D^{(2)}_{i_2}}K^{(2)}_{i_2}(x,t,\xi,\tau)\tilde{\varphi}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2}(x,t).$$

Величину

$$\sigma = [\sigma(\hat{\mathbf{u}},\hat{c})]^{1/2} \tag{27}$$

назвемо похибкою мінімаксного оцінювання виразу (20).

Відмітимо, що інтеграли в (24) та (26), що розуміються як інтеграли Лебега, існують з ймовірністю 1.

Основні результати. Введемо до розгляду при кожному фіксованому $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{n_1}^{(1)}, \ u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}) \in H$ пару функцій $(\mathbf{z}_1(x,t;\mathbf{u}), z_2(x,t;\mathbf{u})) \in L^2((t_0,T), H(\mathrm{div}, D)) \times W(t_0,T)$ як розв'язок такої варіаційної задачі:

$$(\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}),\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n} + (z_2(\cdot,t;\mathbf{u}), \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)}$$

$$= -(\mathbf{l}_0^{(1)} - \sum_{k_1=1}^{n_1} \chi_{D_{k_1}^{(1)}}(\cdot) \int_{t_0}^{T} \int_{D_{k_1}^{(1)}} (\mathbf{K}_{k_1}^{(1)})^T(\xi,\tau,\cdot,\cdot) \times$$

$$\times \mathbf{u}_{k_1}^{(1)}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n} \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in H(\mathrm{div}, D), \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial z_2(\cdot,t;\mathbf{u})}{\partial t}, \chi\right)_{L^2(D)} + (\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(\cdot,t),\chi)_{L^2(D)}$$

$$= -(l_0^{(2)} - \sum_{k_2=1}^{n_2} \chi_{D_{k_2}^{(2)}}(\cdot) \int_{t_0}^{T} \int_{D_{k_2}^{(2)}} K_{k_2}^{(2)}(\xi,\tau,\cdot,\cdot) \times$$

$$\times\, u_{k_2}^{(2)}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \chi)_{L^2(D)} \quad \forall \chi \in L^2(D), \tag{29}$$

$$z_2(\cdot,T) = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{30}$$

де через $\chi_{D_{k_i}}(x)$, $i = 1,2$, позначено характеристичні функції множин D_{k_i}. Функції $\mathbf{z}_1(x,t;\mathbf{u}), z_2(x,t;\mathbf{u})$ визначаються з рівнянь (28) – (30) єдиним чином.

Лема 1. *Задача знаходження мінімаксної оцінки виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, що описується крайовою задачею (28)–(30) з функціоналом вартості вигляду*

$$I(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{T} \int_{D} (Q_1^{-1} z_2(x,t;\mathbf{u}), z_2(x,t;\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{D} Q_2^{-1} z_2(x,t_0;\mathbf{u}) z_2(x,t_0;\mathbf{u})\, dx$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{D_{i_1}^{(1)}} ((\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)})^{-1} \mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(x,t), \mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \sum_{i_2=1}^{n_2} \int_{D_{i_2}^{(2)}} (\tilde{Q}_{i_2}^{(2)})^{-1} u_{i_2}^{(2)}(x) u_{i_2}^{(2)}(x,t)\, dx\, dt \to \min_{\mathbf{u}\in H}. \tag{31}$$

Доведення. Нехай $(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})$ – довільний розв'язок задачі (6)–(8) при $\mathbf{f}(x,t) = \tilde{\mathbf{f}}(x,t), \varphi_0(x) = \tilde{\varphi}_0(x)$. Звідси та зі співвідношень (18)–(21) отримаємо

$$l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})} = \int_{t_0}^{T} \int_{D} (\mathbf{l}_0^{(1)}(x,t), \tilde{\mathbf{j}}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \int_{D} l_0^{(2)}(x,t) \tilde{\varphi}(x,t)\, dx\, dt$$

$$- \int_{t_0}^{T} \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{D_{i_1}^{(1)}} (\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(x,t), \tilde{\mathbf{y}}_{i_1}^{(1)}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{T} \sum_{i_2=1}^{n_2} \int_{D_{i_2}^{(2)}} u_{i_2}^{(2)}(x,t) \tilde{y}_{i_2}^{(2)}(x,t)\, dx\, dt - c$$

$$= \int_{t_0}^{T} \int_{D} (\mathbf{l}_0^{(1)}(x,t), \tilde{\mathbf{j}}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\, dx\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{T} \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{D_{i_1}^{(1)}} (\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(x,t), \int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_1}^{(1)}} \mathbf{K}_{i_1}^{(1)}(x,t,\xi,\tau) \times$$

$$\times \tilde{\mathbf{j}}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau)_{\mathbf{R}^n} dx dt + \int_{t_0}^{T} \int_{D} l_0^{(2)}(x) \tilde{\varphi}(x,t) dx dt -$$

$$- \int_{t_0}^{T} \sum_{i_2=1}^{n_2} \int_{D_{i_2}^{(2)}} u_{i_2}^{(2)}(x,t) \int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_2}^{(2)}} K_{i_2}^{(2)}(x,t,\xi,\tau) \times$$

$$\times \tilde{\varphi}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau\, dx\, dt$$

$$-\int_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(x,t),\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{D^{(2)}_{i_2}}u^{(2)}_{i_2}(x,t)\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt-c=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{D}\Big(\mathbf{l}^{(1)}_0(x,t)-\sum_{i_1=1}^{n_1}\chi_{D_{i_1}}(x)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{K}^{(1)}_{i_1})^T(\xi,\tau,x,t)\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{j}}(x,t)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+\int_{t_0}^{T}\int_{D}\Big(l^{(2)}_0(x,t)-\sum_{i_2=1}^{n_2}\chi_{D_{i_2}}(x)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{i_2}}K^{(2)}_{i_2}(\xi,\tau,x,t)u^{(2)}_{i_2}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big)\times$$

$$\times\tilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(x,t),$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt-\int_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{D^{(2)}_{i_2}}u^{(2)}_{i_2}(x,t)\times$$

$$\times\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt-c. \qquad (32)$$

Тому, враховуючи, що внаслідок теореми Фубіні та (23)

$$\mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(x,t),\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{D^{(2)}_{i_2}}u^{(2)}_{i_2}(x,t)\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt\Big]=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n_1}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1},\mathbb{E}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1})_{L^2(Q^{(1)}_{i_1})^n}+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{n_2}(u^{(2)}_{i_2},\mathbb{E}\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2})_{L^2(Q^{(2)}_{i_2})}=0,$$

із отриманого представлення знаходимо

$$\mathbb{E}[l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})-\widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})}]=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{D}\Big(\mathbf{l}^{(1)}_0(x,t)-\sum_{i_1=1}^{n_1}\chi_{D_{i_1}}(x)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(K^{(1)}_{i_1})^T(\xi,\tau,x,t)\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{j}}(x,t)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+\int_{t_0}^{T}\int_{D}\Big(l^{(2)}_0(x,t)-$$

$$-\sum_{i_2=1}^{n_2}\chi_{D_{i_2}}(x)\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{i_2}}K^{(2)}_{i_2}(\xi,\tau,x,t)u^{(2)}_{i_2}(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big)\times$$

$$\times\tilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt-c.$$

Звідси, враховуючи співвідношення $\mathbb{D}\xi=\mathbb{E}|\xi-\mathbb{E}\xi|^2=\mathbb{E}\xi^2-(\mathbb{E}\xi)^2$ між дисперсією $\mathbb{D}\xi$ випадкової величини ξ та її математичним сподіванням $\mathbb{E}\xi$, в якому ξ визначається правою частиною (32), знаходимо

$$\mathbb{E}\Big|l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})-\widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})}\Big|^2=$$

$$=\Big|\int_{t_0}^{T}\int_{D}\Big(\mathbf{l}^{(1)}_0(x,t)-\sum_{i_1=1}^{n_1}\chi_{D_{i_1}}(x)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(K^{(1)}_{i_1})^T(\xi,\tau,x,t)\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{j}}(x,t)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+\int_{t_0}^{T}\int_{D}\Big(l^{(2)}_0(x,t)-\sum_{i_2=1}^{n_2}\chi_{D_{i_2}}(x)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{i_2}}K^{(2)}_{i_2}(\xi,\tau,x,t)u^{(2)}_{i_2}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big)\times$$

$$\times\tilde\varphi(x.t)\,dx\,dt-c\Big|^2+\mathbb{E}\Big|\int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int\limits_{D_{i_1}^{(1)}}(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(x,t),$$

$$\tilde{\boldsymbol\eta}_{i_1}^{(1)}(x,t,\omega))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+\int\limits_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int\limits_{D_{i_2}^{(2)}}u_{i_2}^{(2)}(x,t)\times$$

$$\times\tilde\eta_{i_2}^{(2)}(x,t,\omega)\,dx\,dt\Big|^2. \qquad (33)$$

Перетворимо суму двох інтегралів в правій частині (33).

Для цього, припускаючи в (28) та (29) $\boldsymbol\psi=\tilde{\mathbf{j}}(\cdot,t)$ та $\chi=\tilde\varphi(\cdot,t)$ відповідно, й інтегруючи обидві частини отриманих рівнянь по t від t_0 до T, отримаємо

$$J:=\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D}\Big(\mathbf{l}_0^{(1)}(x,t)-\sum_{i_1=1}^{n_1}\chi_{D_{i_1}}(x)\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D_{i_1}^{(1)}}(\mathbf{K}_{i_1}^{(1)})^T(\xi,\tau,x,t)\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{j}}(x,t)\Big)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D}\Big(l_0^{(2)}(x,t)-\sum_{i_2=1}^{n_2}\chi_{D_{i_2}}(x)\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D_{i_2}^{(2)}}K_{i_2}^{(2)}(\xi,\tau,x,t)u_{i_2}^{(2)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big)\times$$

$$\times\tilde\varphi(x,t)\,dx\,dt=-\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D}(\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}),\tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n}\,dt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}(z_2(\cdot,t;\mathbf{u}),\operatorname{div}\tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)}\,dt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial z_2(\cdot,t;\mathbf{u})}{\partial t},\tilde\varphi\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\mathbf{z}_1(\cdot,t),\tilde\varphi)_{L^2(D)}\,dt \qquad (34)$$

Інтегруючи частинами третій доданок у правій частині (34), знаходимо[2]

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial z_2(\cdot,t;\mathbf{u})}{\partial t},\tilde\varphi(\cdot,t)\right)_{L^2(D)}dt=$$

$$=(z_2(\cdot,T;\mathbf{u}),\tilde\varphi(\cdot,T))_{L^2(D)}$$

$$-(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde\varphi(\cdot,t_0))_{L^2(D)}-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}\left(z_2(\cdot,t;\mathbf{u}),\frac{\partial\tilde\varphi(\cdot,t)}{\partial t}\right)_{L^2(D)}dt$$

$$=-(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde\varphi_0(\cdot))_{L^2(D)}-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}\left(z_2(\cdot,t;\mathbf{u}),\frac{\partial\tilde\varphi(\cdot,t)}{\partial t}\right)_{L^2(D)}dt. \qquad (35)$$

З іншого боку, легко бачити, що з (6)–(8) при $\mathbf{f}(x,t)=\tilde{\mathbf{f}}(x,t)$, $\varphi_0(x)=\tilde\varphi_0(x)$ випливають співвідношення

$$\int\limits_{t_0}^{T}(\tilde{\mathbf{j}}(\cdot,t),\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}))_{L^2(D)^n}\,dt+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{T}(\tilde\varphi(\cdot,t),\operatorname{div}\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}))_{L^2(D)}\,dt=0, \quad (36)$$

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial\tilde\varphi(\cdot,t)}{\partial t},z_2(\cdot,t;\mathbf{u})\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\boldsymbol{j}(\cdot,t),z_2(\cdot,t;\mathbf{u}))_{L^2(D)}=$$

$$=(f(\cdot,t),z_2(\cdot,t;\mathbf{u}))_{L^2(D)}\,dt. \quad (37)$$

З (34) внаслідок рівностей (35)–(37) маємо

$$J=-\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{D}(\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}),\tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n}\,dt-$$

[2]Законність інтегрування частинами випливає з того, що функції $z_2(\cdot,\cdot;\mathbf{u})$ та $\tilde\varphi$ належать $W(t_0,T)$.

$$-\int_{t_0}^{T}(z_2(\cdot,t;\mathbf{u}),\operatorname{div}\tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)}\,dt$$

$$+\,(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde{\varphi}_0(\cdot))_{L^2(D)}+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left(z_2(\cdot,t;\mathbf{u}),\frac{\partial\tilde{\varphi}(\cdot,t)}{\partial t}\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\mathbf{z}_1(\cdot,t),\tilde{\varphi})_{L^2(D)}\,dt-$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\int_{D}(\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}),\tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n}\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\mathbf{z}_1(\cdot,t),\tilde{\varphi})_{L^2(D)}\,dt$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}(\cdot,t)}{\partial t},z_2(\cdot,t;\mathbf{u})\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{j}},z_2(\cdot,t;\mathbf{u}))_{L^2(D)}\,dt+$$

$$+\,(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde{\varphi}_0(\cdot))_{L^2(D)}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}(\cdot,t)}{\partial t}-\operatorname{div}\tilde{\mathbf{j}},z_2(\cdot,t;\mathbf{u})\right)_{L^2(D)}dt+$$

$$+\,(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde{\varphi}_0(\cdot))_{L^2(D)}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left(\tilde{f}(\cdot,t),z_2(\cdot,t;\mathbf{u})\right)_{L^2(D)}dt+$$

$$+\,(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde{\varphi}_0(\cdot))_{L^2(D)}$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left(\tilde{f}(\cdot,t)-f_0(\cdot,t),z_2(\cdot,t;\mathbf{u})\right)_{L^2(D)}dt+$$

$$+\,(\tilde{\varphi}_0-a,z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}))_{L^2(D)}+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(f_0(\cdot,t),z_2(\cdot,t;\mathbf{u}))_{L^2(D)}\,dt+$$

$$+\,(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),a))_{L^2(D)}\,.$$

Враховуючи останню рівність, з (33) та (34) знаходимо

$$\mathbb{E}\left|l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})-\widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})}\right|^2=$$

$$=\Big|\Big(z_2(\cdot,\cdot;\mathbf{u}),\tilde{f}-f_0\Big)_{L^2(Q)}+$$

$$+\Big(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde{\varphi}_0-a\Big)_{L^2(D)}+$$

$$+\Big(z_2(\cdot,\cdot;\mathbf{u}),f_0\Big)_{L^2(Q)}+\Big(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),a\Big)_{L^2(D)}-c\Big|^2+$$

$$+\mathbb{E}\Big|\int_{t_0}^{T}\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(x,t),\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{D^{(2)}_{i_2}}u^{(2)}_{i_2}(x,t)\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt\Big|^2,$$

звідки

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\sup_{(\tilde{\mathbf{f}},\tilde{\varphi}_0)\in G_0,\tilde{\eta}\in G_1}\mathbb{E}|l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})-\widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})}|^2=$$

$$=\inf_{c\in\mathbb{R}}\sup_{(\tilde{f},\tilde{\varphi}_0)\in G_0}\Big|\Big(z_2(\cdot,\cdot;\mathbf{u}),\tilde{f}-f_0\Big)_{L^2(Q)}+$$

$$+\Big(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),\tilde{\varphi}_0-a\Big)_{L^2(D)}$$

$$+\Big(z_2(\cdot,\cdot;\mathbf{u}),f_0\Big)_{L^2(Q)}+\Big(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),a\Big)_{L^2(D)}-c\Big|^2+$$

$$+\sup_{\tilde{\eta}\in G_1}\mathbb{E}\Big|\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\mathbf{u}^{(1)}_{i_1}(x,t),\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{i_2}}u^{(2)}_{i_2}(x,t)\tilde{\eta}^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt\Big|^2.$$

Звідси, внаслідок узагальненої нерівності Коші-Буняковського та нерівностей (9) та (23), випливає, що

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\sup_{(\tilde{\mathbf{f}},\tilde{\varphi}_0)\in G_0,\,\tilde{\eta}\in G_1}\mathbb{E}[l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})-\widehat{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})}]^2=I(\mathbf{u}),$$

де функціонал $I(\mathbf{u})$ визначається виразом (31), а інфімум за $c\in\mathbb{R}^1$ досягається при

$$c=\Big(z_2(\cdot,\cdot;\mathbf{u}),f_0\Big)_{L^2(Q)}+$$

$$+\Big(z_2(\cdot,t_0;\mathbf{u}),a\Big)_{L^2(D)}. \tag{38}$$

Цим лему доведено.

Далі, під час доведення нижченаведеної теореми 1 показано, що розв'язок задачі умовної оптимізації (28) – (31), в свою чергу, зводиться до розв'язання деякої системи варіаційних рівнянь.

Теорема 1. *Мінімаксна оцінка значення $l(\mathbf{j},\varphi)$ має вигляд*

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{j},\varphi)}}=\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{i_1}}(\hat{\mathbf{u}}^{(1)}_{i_1}(x,t),\mathbf{y}^{(1)}_{i_1}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+$$

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{i_2}}\hat{u}^{(2)}_{i_2}(x,t)y^{(2)}_{i_2}(x,t)\,dx\,dt+\hat{c},$$

де $\hat{c}=\int_{t_0}^{T}\int_{D}(\hat{z}_2(x,t),f_0(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt+\int_D\hat{z}_2(x,t_0)a(x)\,dx,$

$$\hat{\mathbf{u}}^{(1)}_{i_1}=\tilde{\mathbf{Q}}^{(1)}_{i_1}\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{i_1}}\mathbf{K}^{(1)}_{i_1}(\cdot,\cdot,\xi,\tau)\mathbf{p}_1(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$i_1=\overline{1,n_1},$$

$$\hat{u}^{(1)}_{i_2}=\tilde{Q}_{i_2}\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{i_2}}K^{(2)}_{i_2}(\cdot,\cdot,\xi,\tau)p_2(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$i_2=\overline{1,n_2}, \tag{39}$$

а функції $\mathbf{p}_1\in L^2((t_0,T),H(\mathrm{div},D))$ *та* $\hat{z}_2,p_2\in W(t_0,T)$ *знаходяться із розв'язку системи варіаційних рівнянь:*

$$(\hat{\mathbf{z}}_1(\cdot,t),\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n}+(\hat{z}_2(\cdot,t),\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)}=$$

$$=-(\mathbf{l}^{(1)}_0-\sum_{k_1=1}^{n_1}\chi_{D^{(1)}_{k_1}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(1)}_{k_1}}(\mathbf{K}^{(1)}_{k_1})^T(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\hat{\mathbf{u}}^{(1)}_{k_1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n}\quad\forall\boldsymbol{\psi}\in H(\mathrm{div},D), \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial\hat{z}_2(\cdot,t)}{\partial t},\chi\right)_{L^2(D)}+(\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{z}}_1(\cdot,t),\chi)_{L^2(D)}$$

$$=-(l^{(2)}_0-\sum_{k_2=1}^{n_2}\chi_{D^{(2)}_{k_2}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D^{(2)}_{k_2}}K^{(2)}_{k_2}(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\hat{u}^{(2)}_{k_2}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\chi)_{L^2(D)}\quad\forall\chi\in L^2(D), \tag{41}$$

$$\hat{z}_2(\cdot,T)=0\quad \text{в}\quad D, \tag{42}$$

$$(\mathbf{p}_1(\cdot,t),\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n}+(p_2(\cdot,t),\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)}=0$$
$$\forall\boldsymbol{\psi}\in H(\mathrm{div},D) \tag{43}$$

$$\left(\frac{\partial p_2(\cdot,t)}{\partial t},\chi\right)_{L^2(D)}-(\mathrm{div}\,\mathbf{p}_1(\cdot,t),\chi)_{L^2(D)}=$$

$$=(Q_1^{-1}\hat{z}_2,\chi)_{L^2(D)}\quad\forall\chi\in L^2(D), \tag{44}$$

$$p_2(\cdot,t_0)=Q_2^{-1}\hat{z}_2(\cdot,t_0), \tag{45}$$

де функція $\hat{\mathbf{z}}_1\in L^2((t_0,T),H(\mathrm{div},D))$. Задача (40) – (45) однозначно розв'язна.

Похибка мінімаксного оцінювання σ визначається за формулою

$$\sigma=l(\mathbf{p}_1,p_2)^{1/2}. \tag{46}$$

Доведення. Покажемо, що розв'язок задачі оптимального керування (28) – (31) зводиться до розв'язку системи рівнянь (40) – (45). Для цього спочатку відмітимо, що внаслідок вигляду функціоналу $I(\mathbf{u})$ де $\mathbf{u}\in H$, існує єдиний елемент $\hat{\mathbf{u}}\in H$, на якому досягається мінімум цього функціоналу, тобто $I(\hat{\mathbf{u}})=\inf_{\mathbf{u}\in H}I(\mathbf{u})$. Тому, для будь-якого фіксованого $\mathbf{w}\in H$ та $\tau\in\mathbb{R}^1$ функція $s(\tau):=I(\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{w})$ має єдину точку мінімуму при $\tau=0$, тому

$$\frac{d}{d\tau}I(\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{w})\mid_{\tau=0}=0.$$

Звідси, враховуючи (31), для будь-якого $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}_{n_1}^{(1)}, w_1^{(2)}, \ldots, w_{n_2}^{(2)}) \in H$ маємо

$$0 = \frac{1}{2}\frac{dI(\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{w})}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \int_{t_0}^{T}\int_D (Q_1^{-1}z_2(x,t;\hat{\mathbf{u}}),$$

$$\tilde{z}_2(x,t;\mathbf{w}))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt + \int_D Q_2^{-1}z_2(x,t_0;\hat{\mathbf{u}}),$$

$$\tilde{z}_2(x,t_0;\mathbf{w})\,dx+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{D_{i_1}^{(1)}}((\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)})^{-1}\hat{\mathbf{u}}_{i_1}^{(1)}(x), \mathbf{w}_{i_1}^{(1)}(x))_{\mathbb{R}^n}dx+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{D_{i_2}^{(2)}}(\tilde{Q}_{i_2}^{(2)})^{-1}\hat{u}_{i_2}^{(2)}(x)w_{i_2}^{(2)}(x)\,dx. \qquad (47)$$

Перетворимо суму перших двох доданків у правій частині виразу (47). Для цього введемо функції $\mathbf{p}_1(x,t)$ та $p_2(x,t)$ як розв'язок однозначно розв'язної задачі:

$$(\mathbf{p}_1(\cdot,t),\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)^n} + (p_2(\cdot,t),\operatorname{div}\boldsymbol{\psi})_{L^2(D)} = 0$$

$$\forall\boldsymbol{\psi}\in H(\operatorname{div},D), \qquad (48)$$

$$\left(\frac{\partial p_2(\cdot,t)}{\partial t},\chi\right)_{L^2(D)} - (\operatorname{div}\mathbf{p}_1(\cdot,t),\chi)_{L^2(D)} =$$

$$(Q_1^{-1}z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{u}}),\chi)_{L^2(D)} \quad \forall\chi\in L^2(D), \qquad (49)$$

$$p_2(\cdot,t_0) = Q_2^{-1}z_2(\cdot,t_0;\hat{\mathbf{u}}), \qquad (50)$$

та покладемо в (48), (49) $\boldsymbol{\psi} = \tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}})$, $\chi = \tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}})$. Інтегруючи обидві частини отриманих рівностей по t від t_0 до T, знаходимо

$$\int_{t_0}^{T}(\mathbf{p}_1(\cdot,t),\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)^n}\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(p_2(\cdot,t),\operatorname{div}\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt = 0, \qquad (51)$$

$$\int_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial p_2(\cdot,t)}{\partial t},\tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}})\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\mathbf{p}_1(\cdot,t),\tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{T}(Q_1^{-1}z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{u}}),\tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt. \qquad (52)$$

Звідси, інтегруючи частинами перший доданок у лівій частині (52), представимо співвідношення (52), враховуючи (50), у вигляді

$$-\int_{t_0}^{T}\left(p_2(\cdot,t),\frac{\partial\tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}})}{\partial t}\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\mathbf{p}_1(\cdot,t),\tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{T}(Q_1^{-1}z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{u}}),\tilde{z}_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt+$$

$$+(Q_2^{-1}z_2(\cdot,t_0;\hat{\mathbf{u}}),\tilde{z}_2(\cdot,t_0;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}. \qquad (53)$$

Інтегруючи обидві частини рівностей (28), (29) по t від t_0 до T, в яких покладемо $\mathbf{l}_0^{(1)} = 0$, $l_0^{(2)} = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, $\mathbf{z}_1(\cdot,t;\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\mathbf{w})$, $z_2(\cdot,t;\mathbf{u}) = \tilde{z}_2(\cdot,t;\mathbf{w})$, $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{p}_1$, $\chi = p_2$, отримаємо

$$\int_{t_0}^{T}(\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\mathbf{w}),\mathbf{p}_1)_{L^2(D)^n}\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(\tilde{z}_2(\cdot,t;\mathbf{w}),\operatorname{div}\mathbf{p}_1)_{L^2(D)}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\Big(\sum_{k_1=1}^{n_1}\chi_{D_{k_1}^{(1)}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_1}^{(1)}}(\mathbf{K}_{k_1}^{(1)})^T(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\,\mathbf{w}_{k_1}^{(1)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\mathbf{p}_1\Big)_{L^2(D)^n}\,dt, \qquad (54)$$

$$\int_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial \tilde z_2(\cdot,t;\mathbf{w})}{\partial t},p_2\right)_{L^2(D)}+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\mathbf{w}),p_2)_{L^2(D)}\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\sum_{k_2=1}^{n_2}\chi_{D_{k_2}^{(2)}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_2}^{(2)}}K_{k_2}^{(2)}(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\, w_{k_2}^{(2)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,p_2)_{L^2(D)}\,dt,\quad (55)$$

З (53), (54), (51) та (55) маємо

$$\int_{t_0}^{T}(Q_1^{-1}z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{u}}),\tilde z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt+$$

$$+(Q_2^{-1}z_2(\cdot,t_0;\hat{\mathbf{u}}),\tilde z_2(\cdot,t_0;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\left(p_2(\cdot,t),\frac{\partial\tilde z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}})}{\partial t}\right)_{L^2(D)}dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}(\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\mathbf{w}),\mathbf{p}_1)_{L^2(D)^n}\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\sum_{k_1=1}^{n_1}\chi_{D_{k_1}^{(1)}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_1}^{(1)}}(\mathbf{K}_{k_1}^{(1)})^T(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\mathbf{w}_{k_1}^{(1)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\mathbf{p}_1)_{L^2(D)^n}\,dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\left(p_2(\cdot,t),\frac{\partial\tilde z_2(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}})}{\partial t}\right)_{L^2(D)}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(p_2(\cdot,t),\operatorname{div}\tilde{\mathbf{z}}_1(\cdot,t;\hat{\mathbf{w}}))_{L^2(D)}\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\sum_{k_1=1}^{n_1}\chi_{D_{k_1}^{(1)}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_1}^{(1)}}(\mathbf{K}_{k_1}^{(1)})^T(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\mathbf{w}_{k_1}^{(1)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\mathbf{p}_1)_{L^2(D)^n}\,dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}(\sum_{k_2=1}^{n_2}\chi_{D_{k_2}^{(2)}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_2}^{(2)}}K_{k_2}^{(2)}(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times w_{k_2}^{(2)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,p_2)_{L^2(D)}\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\sum_{k_1=1}^{n_1}\chi_{D_{k_1}^{(1)}}(\cdot)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_1}^{(1)}}(\mathbf{K}_{k_1}^{(1)})^T(\xi,\tau,\cdot,\cdot)\times$$

$$\times\mathbf{w}_{k_1}^{(1)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\mathbf{p}_1)_{L^2(D)^n}\,dt$$

Звідси та з рівності (47) отримаємо

$$\sum_{k_1=1}^{n_1}\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_1}^{(1)}}\big(\mathbf{w}_{k_1}^{(1)}(x,t),\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_1}^{(1)}}\mathbf{K}_{k_1}^{(1)}(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times\mathbf{p}_1(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\big)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt$$

$$\sum_{k_2=1}^{n_2}\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_2}^{(2)}}w_{k_2}^{(2)}(x,t)\int_{t_0}^{T}\int_{D_{k_2}^{(2)}}K_{k_2}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times p_2^{(0)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,dx\,dt$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n_1}\int_{t_0}^{T}\int_{D_{i_1}^{(1)}}((\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)})^{-1}\hat{\mathbf{u}}_{i_1}^{(1)}(x,t),\mathbf{w}_{i_1}^{(1)}(x,t))_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt$$

$$+\sum_{i_2=1}^{n_2}\int_{t_0}^{T}\int_{D_{i_2}^{(2)}}(\tilde Q_{i_2}^{(2)})^{-1}\hat u_{i_2}^{(2)}(x,t)w_{i_2}^{(2)}(x,t)\,dx\,dt.$$

Отриману тотожність, яка виконується $\forall\mathbf{w}=(\mathbf{w}_1^{(1)},\dots,\mathbf{w}_{n_1}^{(1)},w_1^{(2)},\dots,w_{n_2}^{(2)})\in H$, перепишемо у вигляді

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\left((\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)})^{-1}\Big[\hat{\mathbf{u}}_{i_1}^{(1)}-\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)}\int_{t_0}^{T}\int_{D_{i_1}^{(1)}}\mathbf{K}_{i_1}^{(1)}(\cdot,\cdot,\xi,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{p}_1(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big],\mathbf{w}_{i_1}^{(1)}\right)_{L^2(Q_{i_1}^{(1)})^n}$$

$$+\sum_{i_2=1}^{n_2}\left((\tilde Q_{i_2}^{(2)})^{-1}\Big[\hat u_{i_2}^{(2)}-\tilde Q_{i_2}^{(2)}\int_{t_0}^{T}\int_{D_{i_2}^{(2)}}K_{i_2}^{(2)}(\cdot,\cdot,\xi,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times p_2^{(0)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big],w_{i_2}^{(2)}\right)_{L^2(Q_{i_2}^{(2)})}=0.\qquad(56)$$

Поклавши в (56)

$$\mathbf{w}_{i_1}^{(1)} = \bar{\mathbf{w}}_{i_1}^{(1)} := \hat{\mathbf{u}}_{i_1}^{(1)} - \tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)} \int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_1}^{(1)}} \mathbf{K}_{i_1}^{(1)}(\cdot,\cdot,\xi,\tau)\times$$
$$\times \mathbf{p}_1(\xi,\tau)\, d\xi, d\tau, \quad i_1 = 1,\ldots,n_1,$$
$$w_{i_2}^{(2)} = \bar{w}_{i_2}^{(2)} := \hat{u}_{i_2}^{(2)} - \tilde{Q}_{i_2}^{(2)} \int_{t_0}^{T} \int_{D_{i_2}^{(2)}} K_{i_2}^{(2)}(\cdot,\cdot,\xi,\tau)\times$$
$$\times p_2^{(0)}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \quad i_2 = 1,\ldots,n_2,$$

отримаємо, що

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \Big((\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)})^{-1} \bar{\mathbf{w}}_{i_1}^{(1)}, \bar{\mathbf{w}}_{i_1}^{(1)} \Big)_{L^2(Q_{i_1}^{(1)})^n} +$$
$$+ \sum_{i_2=1}^{n_2} \Big((\tilde{Q}_{i_2}^{(2)})^{-1} \bar{w}_{i_2}^{(2)}, \bar{w}_{i_2}^{(2)} \Big)_{L^2(Q_{i_2}^{(2)})} = 0.$$

Остання рівність, внаслідок додатної визначеності операторів $(\tilde{\mathbf{Q}}_{i_1}^{(1)})^{-1}$ та $(\tilde{Q}_{i_2}^{(2)})^{-1}$, виконується тоді й тільки тоді, коли $\bar{\mathbf{w}}_{i_1}^{(1)} = 0$, $i_1 = 1,\ldots,n_1$ та $\bar{w}_{i_2}^{(2)} = 0$, $i_2 = 1,\ldots,n_2$, тобто тільки тоді, коли виконуються рівності (39). Підставляючи ці значення у співвідношення (28)–(30) та вводячи позначення $\hat{\mathbf{z}}_1(x) = \mathbf{z}_1(x;\hat{\mathbf{u}})$, $\hat{z}_2(x) = z_2(x;\hat{\mathbf{u}})$, враховуючи (48)–(50), прийдемо до задачі (40) – (45), однозначна розв'язність якої випливає з єдиності точки мінімуму $\hat{\mathbf{u}}$ функціоналу (31).

Для доведення формули (46) для похибки мінімаксного оцінювання досить підставити у співвідношення $\sigma = I(\hat{\mathbf{u}})$, де $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{u}}_1^{(1)},\ldots,\hat{\mathbf{u}}_{n_1}^{(1)},\ \hat{u}_1^{(2)},\ldots,\hat{u}_{n_2}^{(2)})$ замість $\hat{\mathbf{u}}_{i_1}^{(1)}$ та $\hat{u}_{i_2}^{(2)}$ їхні вирази, що визначаються з рівностей (39) та провести перетворення, аналогічні наведеним вище. Теорему доведено.

Зауважимо, що можна побудувати чисельні алгоритми розв'язування задачі (40) – (45) на базі методу скінченних елементів, розробленого для початково-крайових задач для рівняння теплопровідності в їх змішаній варіаційній постановці (див., наприклад, [5]).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.

2. *Наконечный А.Г.* Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. Киев: "ВПЦ"Київський університет, 2004. – 103 с.

3. *Подлипенко Ю.К., Горбатенко М.Ю.* Оцінювання узагальнених розв'язків лінійних еліптичних рівнянь, що допускають змішане варіаційне формулювання. – Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки, 2008, № 3. – С. 158–164.

4. *Cessenat M.* Mathematical methods in electromagnetism. Linear theory and applications. – World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996. – 376 p.

5. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.– М.:Мир, 1981. – 408 с.

6. *Thomee V.* Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. – Springer, 2006. – 370 c.

7. *Boffi D., Gastaldi L.* Analysis of finite element approximation of evolution problems in mixed form, SIAM J. Numer. Anal., 42 (2004), pp. 1502–1526.