УДК 517.51

©2010 р. К.В. Вербініна, С.Л. Гефтер

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ КЛАСУ ЖЕВРЕ ТА ДЕЯКІ ІНТЕГРАЛЬНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Класичні результати відносно оператора звичайного інтегрування розглянуто з точки зору степеневих рядів класу Жевре. Для деяких диференціальних операторів нескінченного порядку за допомогою формального інтегралу Коші-Лорана отримано інтегральне зображення типу Діксона.

The classical results, concerned with the integration operator, are considered from the Gevrey formal power series point of view. Using the notion of the Cauchy-Laurent integral, the integral representation of the Dickson type is obtained for some differential operators of infinite order.

Диференціальні та інтегральні оператори нескінченного порядку вивчалися з різних точок зору в працях Г. Валірона, Г. Муггли, Р. Сіккеми, Ю.А. Кірютенко, Ю.Ф. Коробейніка, О.Ф. Леонтьєва, Н.І. Нагнибіди, В.В. Городецького, С.С. Лінчука та інших математиків (за бібліографією та історичним оглядом читач може звернутися до монографій [1]-[3]).

В цій статті досліджується зв'язок між такими операторами та степеневими рядами класу Жевре, що інтенсивно вивчаються останнім часом (див., наприклад, [4],[5]). Зазначимо, що вперше інтегральні оператори нескінченного порядку розглядалися в явній формі в зв'язку зі степеневими рядами з нульовим радіусом збіжності в роботі С.Грабінера [6]. В [7] такі степеневі ряди було використано для розв'язання деяких диференціальних рівнянь у банаховому просторі.

В першій частині данної роботи окремі класичні результати стосовно звичайного оператора інтегрування ([2, глава 6]) дещо переформульовані та доповнені з урахуванням поняття степеневого ряду класу Жевре (див. теорему 1 та наслідки 1, 3). Зазначимо, що конструкція доведення теореми 1 в значній мірі спирається на роботу С.С. Лінчука [8].

Друга частина роботи присвячена інтегральному зображенню типу Діксона [9] деяких диференціальних операторів нескінченного порядку. Але, на відміну від випадку, що розглядався Діксоном, ми маємо справу з ситуацією, коли під знаком інтегралу з'являється степеневий ряд з нульовим радіусом збіжності (теореми 2 і 3).

Наведемо спочатку допоміжні означення.

Означення 1. *Нехай* $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - *формальний степеневий ряд і* $M > 0$. *Будемо казати, що* φ *належить до класу Жевре порядку 1 та його тип не перевищує* M, *якщо для кожного* $M_1 > M$ *існує* $C_1 > 0$, *що нерівність* $|a_n| \le C_1 M_1^n n!$ *виконується для всіх* $n \ge 0$. *Для скорочення ми будемо використовувати позначення* $\varphi \in \mathbb{C}[[z]]_{1,M}$. *Якщо порядок* φ *не перевищує* M *для кожного* $M > 0$, *тоді він має нульовий тип і, відповідно,* $\varphi \in \mathbb{C}[[z]]_{1,0}$.

Простір $\mathbb{C}[[z]]_{1,M}$ ми будемо розглядати як проективну границю банахових просторів

$$E_{M_1} = \{\varphi \in \mathbf{C}[[z]] : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n! M_1^n} < +\infty\}, M_1 > M.$$

Крім того, $\mathbb{C}[[z]]_{1,M}$ є мультинормованою алгеброю відносно системи норм $||\varphi||_{M_1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n! M_1^n}$, $M_1 > M$ (див. [4, $\Sigma A.2.1.$] та [10, глава 5]).

Означення 2. *Для степеневого ряду* $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ *будемо називати-*

ти степеневий ряд $(B\varphi)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^n$ *його перетворенням Бореля. Перетворення Лапласа L встановлює відповідність між степеневими рядоми* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *та* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1} n!}{s^n}$.

Нехай A_R - простір усіх функцій, голоморфних у крузі $\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, а $\mathcal{J} : A_R \to A_R$ позначає оператор звичайного інтегрування $(\mathcal{J} f)(z) = \int\limits_0^z f(\zeta) d\zeta$.

Теорема 1. *Числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{J}^n f)(z)$ *збігається на кожній функції* $f \in A_R$ *у кожній точці кола* $\mathcal{D}_R$ *тоді і тільки тоді, коли* $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]_{1, \frac{1}{R}}$. *В цьому випадку функція* $(\varphi(\mathcal{J}) f)(z)$ *є голоморфною в* $\mathcal{D}_R$ *і справджується наступна рівність:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{J}^n f)(z) = \int\limits_0^z (B\varphi)(z-\zeta) f(\zeta) d\zeta, z \in \mathcal{D}_R. \tag{1}$$

Доведення. Необхідність. Приймаючи до уваги тотожність $\mathcal{J}^n 1 = \frac{1}{n!} z^n$, отримуємо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ для кожного $|z| < R$. Звідси

$$\forall z \in \mathcal{D}_R \ \exists C > 0 : \frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{C}{|z|^n}, n \geq 0.$$

Розглянемо $R_1 < R$ та покладемо в останній нерівності $z = R_1$:

$$\exists C_1 > 0 : \frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{C_1}{R_1^n}.$$

Таким чином, $\varphi \in \mathbb{C}[[z]]_{1, \frac{1}{R}}$.

Достатність. Якщо φ має тип менший або рівний $\frac{1}{R}$, то для кожного $R_1 < R$ та відповідного $C_1 > 0$ справджується нерівність $|a_n| \leq C_1 \frac{n!}{R_1^n}$. Розглянемо голоморфну в $\mathcal{D}_R$ функцію f та $R_2 < R_1$. Достатньо перевірити рівномірну збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{J}^n f)(z)$ у крузі $\mathcal{D}_{R_2}$. Добре відомо, що

$$(\mathcal{J}^n f)(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^z (z-\zeta)^{n-1} f(\zeta) d\zeta,$$

$n \geq 1, f \in A_{R_2}$. Отже,

$$|(\mathcal{J}^n f)(z)| \leq \frac{R_2}{(n-1)!} \max_{|\zeta| \leq R_2} |(z-\zeta)^{n-1} f(\zeta)| \leq$$

$$\leq \frac{R_2^n}{(n-1)!} ||f||_{R_2}.$$

Відповідно,

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{J}^n f)(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{R_2^n}{(n-1)!} ||f||_{R_2} \leq$$

$\leq \widetilde{C} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \frac{R_2^n}{R_1^n}$. Останній числовий ряд є, очевидно, збіжним за умови $R_2 < R_1$. Зазначимо, якщо $\varphi \in \mathbb{C}[[z]]_{1, \frac{1}{R}}$, то $B(\varphi) \in A_R$. Тому права частина виразу (1) є коректно означеною і

$$\int\limits_0^z (B\varphi)(z-\zeta) f(\zeta) d\zeta =$$

$$= \int\limits_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} (z-\zeta)^{n-1} f(\zeta) d\zeta.$$

Оскільки права частина рівняння (1) рівномірно збігається на кожному компакті в $\mathcal{D}_R$, порядок інтегрування та підсумовування може бути змінено:

$$\int\limits_0^z (B\varphi)(z-\zeta) f(\zeta) d\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} \int\limits_0^z (z-\zeta)^{n-1} f(\zeta) d\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{J}^n f)(z), \ |z| < R.$$

Доведення завершено.

Нехай $L(A_R)$ - алгебра неперервних лінійних операторів у просторі A_R. На $L(A_R)$ ми будемо розглядати топологію обмеженої збіжності (див., [11, глава 3, Σ3]).

Наслідок 1. *Відображення* $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{J})$ *є неперервним ін'єктивним гомоморфізмом з алгебри* $\mathbb{C}[[z]]_{1, \frac{1}{R}}$ *в алгебру* $L(A_R)$.

Приклад 1. *Нехай* $R = 1$ *і* $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^n$. *Відповідно до теореми 1,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(\mathcal{J}^n f)(z)$ *збігається на кожній функції, що є голоморфною в одиничному крузі . Підрахуємо* $B\varphi$ *для цього випадку:*

$$(B\varphi)(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)!}\zeta^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta^{n-1} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n\right)' = \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)' = \frac{1}{(1-\zeta)^2}.$$

Підбиваючи підсумки, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\mathcal{J}^n f)(z) = \int\limits_0^z \frac{f(\zeta)}{(1-(z-\zeta))^2} d\zeta, |z| < 1.$$

Приклад 2. *Якщо* $R = +\infty$ *та* $\varphi(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{\ln^n n} z^n$, *тоді* φ *має нульовий тип Жевре і тому* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{\ln^n n}(\mathcal{J}^n f)(z)$ *збігається на усіх* $f \in A_\infty$ *в будь-якій точці* $z \in \mathbb{C}$.

Наступне твердження є переформулюванням часткового випадку класичного результату Н.І. Нагнибіди [2, теорема 6.1.2.].

Наслідок 2. *Неперервний лінійний оператор* $T : A_R \to A_R$ *є переставним з оператором* $\mathcal{J}$ *тоді і тільки тоді, коли існує такий ряд* $\varphi \in \mathbb{C}[[z]]_{1,\frac{1}{R}}$, *що* $(Tf)(z) = (\varphi(\mathcal{J})f)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (\mathcal{J}^n f)(z)$, $f \in A_R$, $z \in \mathcal{D}_R$.

Використовуючи теорему Банаха про обернений оператор, отримуємо таке твердження.

Наслідок 3. *Відображення* $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{J})$ *здійснює топологічний ізоморфізм алгебри* $\mathbb{C}[[z]]_{1,\frac{1}{R}}$ *на комутант оператора* $\mathcal{J}$ *в алгебрі* $L(A_R)$.

Розглянемо тепер деякі випадки інтегрального зображення типу Діксона [9] для диференціального оператора нескінченного порядку. Для цього нам потрібно ввести означення формального інтегралу Коші-Лорана.

Означення 3. *Нехай* V *- довільний комплексний векторний простір, а* $V[[\zeta, \frac{1}{\zeta}]]$ *- це простір усіх формальних рядів Лорана з коефіцієнтами з* V. *Для* $g(\zeta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \zeta^n \in V[[\zeta, \frac{1}{\zeta}]]$ *покладемо*

$$\oint g(\zeta) d\zeta \stackrel{def}{=} 2\pi i b_{-1}. \tag{2}$$

Будемо називати це лінійне відображення з $V[[\zeta, \frac{1}{\zeta}]]$ *на* V *інтегралом Коші-Лорана.*

Теорема 2. *Нехай* $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *- ціла функція експоненціального типу* $\sigma > 0$, *а функція* $g(z)$ *є довільною цілою. Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g^{(n)}(z)$ *збігається в* $\mathbb{C}$, *його сума* $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g^{(n)}(z)$ *також є цілою і*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{zs} \varphi(s)(Lg)(s) ds,$$

де ми розуміємо останній інтеграл у сенсі (2).

Доведення. Нехай $R > R_1 > \sigma_1 > \sigma$. Якщо $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, тоді існує $M > 0$ таке, що $|c_n| \le \frac{M}{R^n}$, і виконується нерівність

$$|g^{(n)}(z)| \le \sum_{m=n}^{\infty} |c_m| \frac{m!}{(m-n)!} |z|^{m-n} \le$$

$$\le M \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m! |z|^{m-n}}{(m-n)! R^m}.$$

Оскільки φ має експоненціальний тип σ, то знайдеться $C > 0$, що $|a_n| \le \frac{C\sigma_1^n}{n!}$. Отже,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^{(n)}(z)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{CM\sigma_1^n}{n!} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m! |z|^{m-n}}{(m-n)! R^m} \le$$

$$\le K \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\sigma_1}{R}\right)^m \left|\frac{z}{R}\right|^n.$$

Маємо, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g^{(n)}(z)$ є рівномірно збіжним в крузі $|z| \le \frac{R_1}{2}$. Виходить, його сума є цілою функцією.

Покажемо тепер справедливість інтегрального зображення для $w(z)$. Зазначимо, що перетворення Лапласа Lg може мати нульовий радіус збіжності. Далі перевіримо, що вираз $(e^{zs}\varphi(s))(Lg)(s)$ належить до простору $\mathbb{C}[[z]][[s,\frac{1}{s}]]$, тобто є степеневим рядом Лорана відносно s з коефіцієнтами, що є степеневими рядами від z, а тому інтеграл (2) має сенс в цьому випадку. Маємо

$$e^{zs}\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}z^k}{k!}\right)s^n\in\mathbb{C}[z][[s]].$$

Позначивши $e^{zs}\varphi(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n(z)s^n$, отримуємо

$$(e^{zs}\varphi(s))(Lg)\,(s)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z)c_{n+k}(n+k)!\right)\frac{1}{s^{n+1}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}d_{n+k+1}(z)c_k k!\right)s^n.$$

Неважко перевірити, що кожен коефіцієнт при s^n, $n\in\mathbb{Z}$ є цілою функцією. Для степені $\frac{1}{s}$ цей коефіцієнт дорівнює

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n c_{n+k}(n+k)!\right)\frac{z^k}{k!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=n}^{\infty}c_k\frac{k!z^{k-n}}{(k-n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n g^{(n)}(z)=w(z),$$

і оскільки $w(z)$ є цілою, порядок підсумовування може бути змінений. Таким чином,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint e^{zs}\varphi(s)(Lg)(s)ds=w(z).$$

Зауважимо, що безпосередньою перевіркою можна переконатися, що множення e^{zs} на $\varphi(s)$ та $(Lg)(s)$ є асоціативним. Теорему доведено.

В аналогічний спосіб може бути доведена слідуюча теорема.

Теорема 3. *Нехай ціла функція* $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *має нульовий експоненціальний тип, а функція* $g(z)$ *є голоморфную в крузі* $\mathcal{D}_R$. *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ng^{(n)}(z)$ *збігається в* $\mathcal{D}_R$, *його сума* $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ng^{(n)}(z)$ *також є голоморфною і*

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{zs}\varphi(s)(Lg)\,(s)\,ds.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. - Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. - 154 с.

2. *Фаге М.К., Нагнибида Н.И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. – Новосибирск: Наука, 1987. – 150 с.

3. *Городецький В.В.* Задачі Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. - Чернівці: Рута, 2005.

4. *Yasutaka Sibuya.* Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation. – Providence: AMS, 1990.

5. *D. Sauzin.* Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials. Renormalization and Galois theories // IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 15, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009, p. 83 - 163.

6. *S. Grabiner.* A formal power series operational calculus for quasinilpotent operators // Duke Math. J., no.38 (1971), p. 641 - 658.

7. *Гефтер С.Л., Мокренюк В.* Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!z^n$ и голоморфные решения некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Журнал мат. физики, анализа и геометрии, 1 (2005), стр. 53 - 70.

8. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність інтегральних операторів нескінченного порядку до деяких класів цілих функцій // Науковий вісник Чернівецького університету, випуск 349, математика, 2007, с. 70 - 73.

9. *D.G. Dickson.* Infinite order differential equations // Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 15, No. 4 (Aug., 1964), p. 638 - 641.

10. *Хелемский А.Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория представления гомологии. - Москва: Наука, 1989. - 464 с.

11. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. - Москва: Изд-во иностранной лит-ры, 1959. - 410 с.