УДК 517.948

©2010 р. Я.Й. Бігун, Л.П. Костишин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Івано-Франківський національний університет імені Василя Стефаника

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОГО АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Розглянуто двоточкову крайову задачу для лінійного диференціального рівняння із лінійно перетвореним аргументом. Побудовано ітераційний алгоритм однопараметричного агрегаційно-ітеративного методу та доведено його збіжність.

The authors consider the two-point boundary problem for a linear differential equation with linearly transformed argument. The iteration algorithm of monoparametric aggregation-iterational method is constructed and its convergence is proved.

Вступ. Проекційно-ітеративні методи для різних класів лінійних задач беруть свій початок з праць Ю.Д. Соколова, М.О. Красносельського і О.В. Соболєва [1]. Основи цих методів закладені в працях М.С. Курпеля [2], Б.А. Шувара [3,4] та інших математиків. Добре вивчено застосування цих методів для побчудови наближених розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з крайовими умовами [4,5]. У даній роботі розглядається лінійне диференціальне рівняння із лінійно перетвореним аргументом. Такі рівняння активно вивчаються [6–8] і мають різноманітні застосування, наприклад, при дослідженні стійкості коливань струмоприймача локомотива, який рухається, в момент проходження опори [9].

1. Зведення до інтегральної задачі. Побудуємо і дослідимо агрегаційний метод у застосуванні до диференціального рівняння другого порядку з крайовими умовами

$$x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x'(\lambda t) + f(t), \qquad (1)$$

$$x(0) = x_1, x(l) = x_2, \qquad (2)$$

де a і b – дійсні, двічі неперервно диференційовні функції на інтервалі $(0, l)$, f – дійсна неперервна функція $(0, l)$, $\lambda \in (0, l)$.

Зведемо крайову задачу (1),(2) до інтегральної задачі. Для цього проінтегруємо двічі рівняння (1), використовуючи інтегрування частинами і крайові умови (2). Одержимо таке інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_0^t k_1(t,s)x(s)ds + \int_0^t k_2(t,s)x(\lambda s)ds - -\frac{t}{l}\int_0^l k_1(l,s)x(s)ds - \frac{t}{l}\int_0^l k_2(l,s)x(\lambda s)ds + p(t), \qquad (3)$$

де $p(t) = \frac{l-t}{l}x_1 + \frac{t}{l}x_2 +$

$$+\int_0^t (t-s)f(s)ds - \frac{t}{l}\int_0^l (l-s)f(s)ds,$$

$$k_1(t,s) = a(s) - (t-s)a'(t),$$

$$k_2(t,s) = \frac{1}{\lambda}\left[b(s) - (t-s)b'(t)\right].$$

Приєднаємо до рівняння (3) додаткове рівняння [5]

$$y = \Lambda y - \int_0^l \varphi(t)p(t)dt - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_1(t,s)\times \times x(s)ds - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_2(t,s)x(\lambda s)ds, \qquad (4)$$

де $\Lambda \neq 1$ і дійсна неперервна функція $\varphi(t)$ задані так, щоб виконувалися рівності

$$-\int_0^l \frac{t}{l}k_1(l,s)\varphi(t)dt = \Lambda\varphi(s),$$

$$-\int_0^l \frac{t}{l} k_2(l,s)\varphi(t)dt = 0. \qquad (5)$$

Для дослідження важливу роль відіграє множина ε_0, яку визначимо, як сукупність таких пар $\{x(t),\ y\}$, для яких виконується рівність

$$\int_0^l \varphi(t)x(t)dt + y = 0. \qquad (6)$$

Лема 1. *Якщо* $\Lambda \neq 1$, *то розв'язок* $\{x^*(t), y^*\}$ *системи (3), (4) задовольняє рівність (6).*

Доведення. З інтегрального рівняння (3) та допоміжного (4), враховуючи умови (5), одержимо

$$\int_0^l \varphi(t)x^*(t)dt + y^* = \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_1(t,s)\times$$

$$\times x^*(s)ds + \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_2(t,s)x^*(\lambda s)ds -$$

$$-\int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_1(l,s)x^*(s)ds \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \times$$

$$\times \int_0^l k_1(l,s)x^*(s)ds + \int_0^l \varphi(t)p(t)dt + \Lambda y^* -$$

$$-\int_0^l \varphi(t)p(t)dt - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_1(t,s)x^*(s)ds -$$

$$-\int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_2(t,s)x^*(\lambda s)ds = \Lambda y^* -$$

$$-\int_0^l x^*(s)ds \int_0^l \frac{t}{l}k_1(l,s)\varphi(t)dt - \int_0^l x^*(\lambda s)ds \times$$

$$\times \int_0^l \frac{t}{l}k_2(l,s)\varphi(t)dt = \Lambda y^* + \int_0^l \Lambda\varphi(s)x^*(s)ds =$$

$$= \Lambda\left(y^* + \int_0^l \varphi(s)x^*(s)ds\right).$$

Оскільки, $\Lambda \neq 1$, то з останньої рівності одержуємо співвідношення $\{x^*(t), y^*\} \in \varepsilon_0$.

2. Збіжність ітераційного методу. Встановимо умови збіжності однопараметричного агрегаційно-ітеративного методу для задачі (3), (4) вигляду

$$x^{(n+1)}(t) = \int_0^t k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int_0^t k_2(t,s)\times$$

$$\times x^{(n)}(\lambda s)ds - \frac{t}{l}\int_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$-\frac{t}{l}\int_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\lambda s)ds + p(t) + a^{(n)}(t)\times$$

$$\times(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \qquad (7)$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - \int_0^l \varphi(t)p(t)dt -$$

$$-\int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$-\int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_2(t,s)x^{(n)}(\lambda s)ds. \qquad (8)$$

Функції $a^{(n)}(t)$ вибрані так, щоб виконувалась умова

$$\int_0^l \varphi(t)a^{(n)}(t)dt = \Lambda. \qquad (9)$$

Встановимо належність ітерацій до множини ε_0 таким твердженням.

Лема 2. *Якщо* $\Lambda \neq 1$ *і початкове наближення* $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$ *та виконується рівність (9), то* $\{x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}\} \in \varepsilon_0$.

Доведення. Нехай $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$. Припустимо, що $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\} \in \varepsilon_0$, тоді маємо:

$$\int_0^l \varphi(t)x^{(n+1)}(t)dt + y^{(n+1)} =$$

$$= \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int_0^l \varphi(t)dt \times$$

$$\times \int_0^t k_2(t,s)x^{(n)}(\lambda s)ds - \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_1(l,s)\times$$

$$\times x^{(n)}(s)ds - \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\lambda s)ds +$$

$$+ \int_0^l \varphi(t)p(t)dt + \int_0^l \varphi(t)a^{(n)}(t)(y^{(n)} - y^{(n+1)})dt +$$

$$+\Lambda y^{(n+1)} - \int_0^l \varphi(t)p(t)dt - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_1(t,s)\times$$

$$\times x^{(n)}(s)ds - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^t k_2(t,s)x^{(n)}(\lambda s)ds =$$

$$= \Lambda y^{(n+1)} - \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$- \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\lambda s)ds +$$

$$+(y^{(n)} - y^{(n+1)}) \int_0^l \varphi(t)a^{(n)}(t)dt.$$

Враховуючи, що функції $a^{(n)}(t)$ визначені за формулою (9), а також умови (5), (6), одержимо рівності

$$\int_0^l \varphi(t)x^{(n+1)}(t)dt + y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} +$$

$$+\Lambda \int_0^l \varphi(s)x^{(n)}(s)ds + \Lambda(y^{(n)} - y^{(n+1)}) =$$

$$= \Lambda \left(\int_0^l \varphi(t)x^{(n)}(t)dt + y^{(n)} \right) = 0.$$

Лему доведено.

З лем 1 та 2, як наслідок, випливає така рівність

$$\int_0^l \varphi(t)(x^{(n)}(t) - x^*(t))dt + (y^{(n)} - y^*) = 0, \quad (10)$$

яку використаємо при встановленні збіжності ітераційного процесу (7), (8). Нехай

$$h_1(t,s) = \frac{t}{l}k_1(l,s) + a^{(n)}(t)\varphi(s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\times$$

$$\times \int_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$h_2(t,\frac{u}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{t}{l}k_2(l,\frac{u}{\lambda}) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\times$$

$$\times \int_{\frac{u}{\lambda}}^l k_2(\tau,\frac{u}{\lambda})\varphi(\tau)d\tau\Big), \quad \|u\| = \max_{t\in[0,l]}|u(t)|.$$

Теорема. *Нехай* $\Lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$, *а також виконуються нерівності*

$$|k_1(t,s)| \le k_1, \quad \Big|k_2(t,\frac{u}{\lambda})\Big| \le k_2, \quad |h_1(t,s)| \le h_1,$$

$$\Big|h_2(t,\frac{u}{\lambda})\Big| \le h_2, \quad (11)$$

$$\left(k_1 + h_1 + \frac{1}{\lambda}(k_2 + h_2)\right) l = q < 1. \quad (12)$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}(t)\}$ *збігається рівномірно на* $[0;l]$ *до розв'язку рівняння (3) не повільніше за геометричну прогресію зі знаменником* q.

Доведення. Згідно з лемою 2 $\{x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}\} \in \varepsilon_0$. Розглянемо різницю $(n+1)$-го наближення з формули (7) і розв'язку інтегрального рівняння (3). Маємо:

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_0^t k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds +$$

$$+ \int_0^t k_2(t,s)x^{(n)}(\lambda s)ds - \frac{t}{l}\int_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\lambda s)ds+p(t)+a^{(n)}(t)(y^{(n)}-$$

$$-y^{(n+1)})-\int\limits_0^t k_1(t,s)x^*(s)ds-\int\limits_0^t k_2(t,s)\times$$

$$\times x^*(\lambda s)ds+\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)x^*(s)ds+\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)\times$$

$$\times x(\lambda s)ds-p(t)=\int\limits_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds+$$

$$+\int\limits_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)\times$$

$$\times(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)(x^{(n)}(\lambda s)-$$

$$-x^*(\lambda s))ds+a^{(n)}(t)(y^{(n)}-y^*)-a^{(n)}(t)(y^{(n+1)}-y^*).$$

Із рівнянь (8) та (4) знайдемо різницю

$$y^{(n+1)}-y^*=\Lambda y^{(n+1)}-\int\limits_0^l \varphi(t)p(t)dt-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^t k_2(t,s)\times$$

$$\times x^{(n)}(\lambda s)ds-\Lambda y^*+\int\limits_0^l \varphi(t)p(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^t k_1(t,s)x^*(s)ds+\int\limits_0^l \varphi(t)dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t k_2(t,s)x^*(\lambda s)ds=\Lambda(y^{(n+1)}-y^*)-$$

$$-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds-$$

$$-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds.$$

Підставивши знайдений результат у різницю $x^{(n+1)}(t)-x^*(t)$ і врахувавши (10) одержимо

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\int\limits_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds+$$

$$+\int\limits_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)\times$$

$$\times(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)(x^{(n)}(\lambda s)-$$

$$-x^*(\lambda s))ds-a^{(n)}(t)\int\limits_0^l \varphi(s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds.$$

Змінивши у двох останніх інтегралах порядок інтегрування одержимо

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\int\limits_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds+$$

$$+\int\limits_0^t k_2(t,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds-$$

$$-\int\limits_0^l\left(\frac{t}{l}k_1(l,s)+a^{(n)}(t)\varphi(s)\right)(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds-$$

$$-\int\limits_0^l\frac{t}{l}k_2(l,s)(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int\limits_0^l(x^{(n)}(s)-x^*(s))ds\int\limits_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int\limits_0^l(x^{(n)}(\lambda s)-x^*(\lambda s))ds\int\limits_s^l k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau=$$

$$= \int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))ds + \int_0^t k_2(t,s)\times$$

$$\times(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))ds - \int_0^l \Big(\frac{t}{l}k_1(l,s) + a^{(n)}(t)\times$$

$$\times\varphi(s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big)(x^{(n)}(s) -$$

$$-x^*(s))ds - \int_0^l \Big(\frac{t}{l}k_2(l,s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int_s^l k_2(\tau,s)\times$$

$$\times\varphi(\tau)d\tau\Big)(x^{(n)}(\lambda s) - x^*(\lambda s))ds.$$

Виконавши заміну $u = \lambda s$, одержимо

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_0^t k_1(t,s)(x^{(n)}(s) - x^*(s))ds +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^t k_2(t,\frac{u}{\lambda})(x^{(n)}(u) - x^*(u))du -$$

$$-\int_0^l \Big(\frac{t}{l}k_1(l,s) + a^{(n)}(t)\varphi(s) -$$

$$-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big)(x^{(n)}(s) - x^*(s))ds -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^l \Big(\frac{t}{l}k_2(l,\frac{u}{\lambda}) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\Lambda}\int_{\frac{u}{\lambda}}^l k_2(\tau,\frac{u}{\lambda})\times$$

$$\times\varphi(\tau)d\tau\Big)(x^{(n)}(u) - x^*(u))du.$$

Врахуємо позначення для h_1 і h_2 та оцінки (11), (12) одержимо

$$\|x^{(n+1)} - x^*\| \le q\|x^{(n)} - x^*\| \le$$

$$\le q^{n+1}\|x^{(0)} - x^*\|.$$

Звідси випливає збіжність ітераційних наближень $\{x^{(n)}(t)\}$ з лінійною швидкістю до розв'язку рівняння (3), отже, й до розв'язку крайової задачі (1),(2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Красносельський М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 255 с.

2. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – К.: Наукова думка, 1968. – 243 с.

3. Шувар Б.А. Про ітеративне агрегування і метод послідовних наближень // Вісник Львів. політехн. ін-ту. - Львів. – 1991. – С. 139–141.

4. Шувар Б.А., Ментинський С.М. Двосторонній алгоритм для апроксимації розв'язків крайової задачі Валле Пуссена // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С. 33–36.

5. Шувар Б.А., Костишин Л.П. Застосування одного агрегаційно-ітеративного методу до крайових задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 31–36.

6. Kato T., McLeod J.V. The functional-differential equation $y' = ay(x) + by(\lambda x)$ // Bull. American Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891–937.

7. Кук К., Россовский Л.Е., Скубачевский А.Л. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 7. – С. 1366–370.

8. Ронто А.Н., Самойленко А.М. Об однозначной разрешимости некоторых краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Доп. НАН України. – 2002. – №9. – С. 42–46.

9. Гребенщиков Б.Г., Ложников А.В. Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, N 12.– С.1587–1595.