

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку двоточкової крайової задачі з двома параметрами для системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом.

The question of existence and approximate construction of a solution for a differential equations system with linearly transformed argument and two parameters in two-point boundary conditions is investigated by the numerical-analytical method.

Чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка виявився ефективним та універсальним методом дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1, 2]. У дослідженнях крайових задач для рівнянь з відхиленням аргументом він поки-що не знайшов такого ж широкого застосування [3]. Відзначимо в цьому напрямку праці [1, 4] та [5], де розглянуто деякі крайові задачі відповідно для систем із постійним запізненням та диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

У даній роботі розглядається система диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)), \quad (1)$$

де $t \in [0, T]$; $x, f \in R^n$, $n \geq 3$; $\lambda \in (0, 1)$. Функція $f(t, x, y)$ вважається неперервною по t, x, y в області $G = [0, T] \times D \times D$, де D – замкнена обмежена область в R^n .

Припустимо також, що функція $f(t, x, y)$ в області G обмежена вектором $M \in R^n$, $M_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, та задовольняє умову Ліпшица по x, y з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0; i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y)| \leq M, \quad (2)$$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \underline{x}, \underline{y})| \leq K(|\bar{x} - \underline{x}| + |\bar{y} - \underline{y}|), \quad (3)$$

де $|f(t, x, y)| = (|f_1(t, x, y)|, \dots, |f_n(t, x, y)|)$ і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Відзначимо, що у працях [6-10] для системи (1) обґрунтовано схеми чисельно-аналітичного методу у випадках деяких типів крайових умов без параметрів та з параметрами.

Розглянемо для системи (1) двоточкові крайові умови з двома керуючими параметрами вигляду

$$\mu_1 Ax(0) + Bx(\mu_2) = d, \quad (4)$$

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad (5)$$

де μ_1 і μ_2 – невідомі скалярні керуючі параметри, $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in (0, T]$; A і B – сталі $n \times n$ матриці, $\det B \neq 0$; d – відомий сталий n -вимірний вектор; x_1 і x_2 – відповідно перша та друга координати вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$; x_{01} і x_{02} – задані значення.

Зауважимо, що для системи звичайних диференціальних рівнянь крайові умови вигляду (4), (5) розглядалися в [2].

Задача полягає у відшуванні неперервно диференційовного розв'язку $x = x^*(t)$ системи (1) і таких значень параметрів $\mu_1 = \mu_1^*$, $\mu_2 = \mu_2^*$, щоб трійка $(x^*(t), \mu_1^*, \mu_2^*)$ задовольняла крайові умови (4), (5).

Позначимо через D_β множину точок $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})$, що містяться разом зі своїм β -околом в області D при всіх значеннях параметрів μ_1 і μ_2 із відповідно деяких областей $I_1 = [\mu_1', \mu_1'']$, $I_2 = [\mu_2', T]$, $\mu_2' > 0$, де

$$\beta = \frac{\mu_2}{2} M + |B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0|.$$

Розумітимемо також надалі під D' мно-
жину векторів $y_0 = (x_{03}, \dots, x_{0n}) \in R^{n-2}$, та-
ких, що $x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$ належить D_β .

Нехай

$$D_\beta \neq \emptyset \quad (6)$$

і найбільше власне значення $\nu_{\max}(Q)$ матри-
ці $Q = TK$ не перевищує одиниці

$$\nu_{\max}(Q) < 1. \quad (7)$$

Для компактності подальших записів по-
значимо $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $I = I_1 \times I_2$.

Розглянемо послідовність функцій, що
визначаються рекурентним співвідношен-
ням

$$\begin{aligned} x_m(t, y_0, \mu) &= x_0 + \\ &+ Lf(t, x_{m-1}(t, y_0, \mu), x_{m-1}(\lambda t, y_0, \mu)) + \\ &+ \frac{t}{\mu_2} [B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0], \quad m = 1, 2, \dots, \\ x_0(t, y_0, \mu) &= x_0 \in D_\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

де перші дві компоненти вектора x_0 задаю-
ться згідно з (5), а оператор L діє на непе-
рервну при $t \in [0, \mu_2]$ функцію $g(t)$ насту-
пним чином

$$Lg(t) \equiv \int_0^t \left[g(z) - \frac{1}{\mu_2} \int_0^{\mu_2} g(s) ds \right] dz.$$

Безпосередньою перевіркою легко пере-
конатися, що всі функції $x_m(t, y_0, \mu)$ задо-
вольняють крайові умови (4), (5) для довіль-
них $y_0 \in D'$, $\mu \in I$.

Має місце наступне твердження про збі-
жність послідовних наближень $x_m(t, y_0, \mu)$
вигляду (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови
(2), (3), (6), (7). Тоді послідовність функ-
цій $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8), які для довіль-
них $y_0 \in D'$, $\mu \in I$ задовольняють крайові
умови (4), (5), рівномірно збігається при
 $t \rightarrow \infty$ в області $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu_2] \times D' \times I$ до
граничної функції $x^*(t, y_0, \mu)$, яка задоволь-
няє крайові умови (4), (5) і є розв'язком ін-
тегрального рівняння*

$$x(t) = x_0 + Lf(t, x(t), x(\lambda t)) +$$

$$+ \frac{t}{\mu_2} [B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0], \quad (9)$$

який при $t = 0$ проходить через точку
 $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$. Крім цього,
 $x^*(t, y_0, \mu)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)) + \Delta(y_0, \mu),$$

$$\mu_1 Ax(0) + Bx(\mu_2) = d,$$

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(y_0, \mu) &= \frac{1}{\mu_2} [B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0] - \\ &- \frac{1}{\mu_2} \int_0^{\mu_2} f(t, x(t), x(\lambda t)) dt. \end{aligned}$$

Для відхилення $x^*(t, y_0, \mu)$ від $x_m(t, y_0, \mu)$
при всіх $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu_2] \times D' \times I$ і
 $m = 1, 2, \dots$ вірна оцінка

$$|x^*(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq W_m(y_0, \mu), \quad (11)$$

де $W_m(y_0, \mu) \equiv Q^m(E - Q)^{-1}\beta$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в про-
сторі неперервних вектор-функцій послідов-
ність (8) є фундаментальною.

Встановимо спочатку, що при $(y_0, \mu) \in D' \times I$ всі функції $x_m(t, y_0, \mu) \in D$. На під-
ставі (8) із врахуванням (2) та леми 2.1 [2]
знаходимо

$$\begin{aligned} |x_1(t, y_0, \mu) - x_0| &\leq 2t \left(1 - \frac{t}{\mu_2} \right) M + \\ &+ |B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0| \leq \beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Тому $x_1(t, y_0, \mu) \in D$, як тільки $(y_0, \mu) \in D' \times I$. Індукцією легко показати, що для
всіх $m = 1, 2, \dots$, $t \in [0, \mu_2]$ і будь-яких
 $(y_0, \mu) \in D' \times I$ функції $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду
(8) не виходять за межі області D .

Покладаючи

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) = |x_{m+1}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)|,$$

на підставі (8) із врахуванням (3) отримуємо

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq$$

$$\leq K \left[\left(1 - \frac{t}{\mu_2}\right) \int_0^t \omega_m(s, y_0, \mu) ds + \frac{t}{\mu_2} \int_t^{\mu_2} \omega_m(s, y_0, \mu) ds \right], \quad (13)$$

де

$$\omega_m(s, y_0, \mu) = r_m(s, y_0, \mu) + r_m(\lambda s, y_0, \mu).$$

Згідно з (12),

$$r_1(t, y_0, \mu) = |x_1(t, y_0, \mu) - x_0| \leq \beta,$$

тому із (13) при $m = 1$ знаходимо

$$r_2(t, y_0, \mu) \leq 2K\beta \cdot 2t \left(1 - \frac{t}{\mu_2}\right) \leq Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu_2] \times D' \times I$

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \dots$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність

$$\begin{aligned} & |x_{m+j}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq \\ & \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \right) \beta = Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \quad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8) рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ в області $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu_2] \times D' \times I$ і

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, y_0, \mu) = x^*(t, y_0, \mu). \quad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t, y_0, \mu)$ задовольняють крайові умови (4), (5), то й гранична функція $x^*(t, y_0, \mu)$ для довільних $(y_0, \mu) \in D' \times I$ також їх задовольняє. При $j \rightarrow \infty$ із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх $m = 1, 2, \dots$, $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu_2] \times D' \times I$ отримуємо оцінку

(11). Крім цього, переходячи із врахуванням (16) у (8) до границі при $m \rightarrow \infty$, бачимо, що функція $x^*(t, y_0, \mu)$ є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$. Отже, гранична функція $x^*(t, y_0, \mu)$ справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено.

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну методичку [2], легко обґрунтовуються наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови, щоб гранична функція $x^*(t, y_0, \mu)$ послідовності (8) була розв'язком задачі (1), (4), (5), дає наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t))$, $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0)$, був одночасно і розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), необхідно і досить, щоб пара (y_0, μ) була розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(y_0, \mu) = 0, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(y_0, \mu) = & \frac{1}{\mu_2} [B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0] - \\ & - \frac{1}{\mu_2} \int_0^{\mu_2} f(t, x^*(t, y_0, \mu), x^*(\lambda t, y_0, \mu)) dt. \end{aligned}$$

При цьому $x^*(t) = x^*(t, y_0, \mu)$ і для всіх $m = 1, 2, \dots$, $t \in [0, \mu_2]$ щодо відхилення точно-го розв'язку $x^*(t) = x^*(t, y_0, \mu)$ крайової задачі (1), (4), (5) від її наближеного розв'язку $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8) вірна оцінка (11).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (4), (5):

а) при $(y_0, \mu) \in D' \times I$ згідно з (8) будемо послідовність функцій $x_m(t, y_0, \mu)$, залежну від y_0 та μ як від параметрів;

б) знаходимо її граничну функцію $x^*(t, y_0, \mu)$;

в) знаходимо розв'язок $y_0 = y_0^*$, $\mu = \mu^*$ визначального рівняння (17);

г) знаходимо розв'язок початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t))$, $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, y_0^*)$, або, що те саме, граничну функцію $x^*(t, y_0^*, \mu^*)$ послідовності $x_m(t, y_0^*, \mu^*)$.

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), а за її наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує $W_m(y_0^*, \mu^*)$, можна взяти функцію $x_m(t, y_0^*, \mu^*)$ вигляду (8).

Головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції $x^*(t, y_0, \mu)$. Крім цього, з точки зору практичного застосування важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (4), (5) не за граничною функцією $x^*(t, y_0, \mu)$, а за її m -тим наближенням $x_m(t, y_0, \mu)$.

Тому розглянемо наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(y_0, \mu) = 0, \quad (18)$$

де

$$\Delta_m(y_0, \mu) = \frac{1}{\mu_2} [B^{-1}d - (\mu_1 B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{\mu_2} \int_0^{\mu_2} f(t, x_m(t, y_0, \mu), x_m(\lambda t, y_0, \mu)) dt,$$

яке відрізняється від точного лише тим, що замість граничної функції $x^*(t, y_0, \mu)$ фігурує її m -те наближення $x_m(t, y_0, \mu)$.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (4), (5) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $D'' \times I' \subset D' \times I$, в якій наближене визначальне рівняння (18) має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $(y_0, \mu) = (y_{0m}, \mu_m)$ ненульового індексу;

2) на межі S області $D'' \times I'$ виконується нерівність

$$\inf_{(y_0, \mu) \in S} |\Delta_m(y_0, \mu)| > 2KW_m(y_0, \mu).$$

Тоді крайова задача (1), (4), (5) має розв'язок $(x^*(t), \mu^*)$, $\mu^* \in I'$, початкове зна-

чення $x^*(0) = (x_{01}, x_{02}, y_0^*)$ якого таке, що $y_0^* \in D''$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — К.: Наук. думка, 1985. — 224 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, N 7. — С. 960-979.
4. *Янчук С.В.* Дослідження неавтономних дифференціальних рівнянь та системи Чуа: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1997. — 111 с.
5. *Augustynowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr. — 1990. — 145. — P. 255-269.
6. *Філіпчук М.П., Бігун Я.Й.* Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, N 11. — С. 1581-1585.
7. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2001. — Вип. 7. — С. 243-250.
8. *Філіпчук М.П.* Крайова задача з параметром для системи із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 150. Математика. — Чернівці: Рута, 2002. — С. 103-106.
9. *Філіпчук М.П.* Задача з нефіксованою правою межею для системи із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 191-192. Математика. — Чернівці: Рута, 2004. — С. 137-140.
10. *Філіпчук М.П.* Крайова задача з параметрами для системи з перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 374. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — С. 132-135.