УДК 517.9

©2010 р. Ю.В. Теплінський, К.В. Пасюк

Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка,
Буковинська державна фінансова академія, Чернівці

ПРО НЕПЕРЕРВНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО–РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ВІД ПАРАМЕТРІВ

Знайдено достатні умови неперервності інваріантних торів лінійних та нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах, відносно параметрів, від яких залежать ці системи.

We study the invariant tori of linear and non-linear countable systems of differential-difference equations defined on infinite-dimensional tori. Sufficient conditions for continuous dependence of such invariant tori on system's parameters are established.

1^0. **Постановка задачі та об'єкт дослідження.** В роботах [1-3] доведено теореми існування у банаховому просторі $\mathfrak{M}$ обмежених послідовностей дійсних чисел $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$ ліпшіцевих та гельдерових інваріантних торів лінійних та квазілінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь загального виду, що визначені на нескінченновимірних торах. У цій статті, що є продовженням вказаних робіт, одержано достатні умови неперервної залежності інваріантних торів лінійних та нелінійних систем вказаного виду від параметрів, які входять до цих систем.

2^0. **Випадок лінійної системи**. Розглянемо систему рівнянь виду (1) з [2], що залежить від додатного параметру $p \in [p_1, p_2] \subset R^1$:

$$\frac{d\phi}{dt} = a(p,\phi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P(p, \phi_t^p(\phi))x(t)+ \\ +B(p,\phi^p,t)x(t+\Delta) + c(p,\phi^p,t), \qquad (1)$$

де $a(p,\phi) = \{a_1(p,\phi), a_2(p,\phi), a_3(p,\phi), \dots\}$, $\phi_t^p(\phi)$ — розв'язок першого рівняння цієї системи такий, що $\phi_0^p(\phi) = \phi \in \mathcal{T}_\infty$; $\mathcal{T}_\infty$ — нескінченновимірний тор; $P(p,\phi) = [p_{ij}(p,\phi)]_{ij=1}^\infty$ — нескінченна матриця; через $c(p,\phi^p,t)$ позначено вектор-функцію $\{c_1(p, z_1(p,\phi,t), z_2(p,\phi,t), ...),\ c_2(p, z_1(p,\phi,t), z_2(p,\phi,t), \dots), \dots\}$, точки $z_i(p,\phi,t) = (\phi^p_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\phi), \phi^p_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\phi), ...)$ $\forall t \in R^1$ і $\forall p \in [p_1, p_2]$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Δ_{ij} — сталі відхилення аргументу t; $B(p,\phi,t) = [b_{ij}(p,\phi,t)]_{ij=1}^\infty$ — нескінченна матриця з елементами

$$b_{ij}(p,\phi,t) = b_{ij}(p, y_1(p,\phi,t), y_2(p,\phi,t), \dots),$$

точки

$$y_i(p,\phi,t) = \left(\phi^p_{1_{t+\Gamma_{i1}}}(\phi), \phi^p_{2_{t+\Gamma_{i2}}}(\phi), \dots\right)$$

$\forall t \in R^1$ теж належать тору $\mathcal{T}_\infty$; $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+\Delta_2), \dots)$; Γ_{ij} та Δ_i — сталі відхилення аргументу t, $\{i,j\} \subset N$. Означення інваріантного тору системи (1) ми тут не наводимо, відсилаючи читача, наприклад, до робіт [1, 3].

Вважатимемо, що для системи рівнянь (1) $\forall p \in [p_1, p_2]$ справджуються наступні вимоги (**P**):

1) мають місце ті ж самі умови періодичності відносно ϕ, що і для системи (1) з [1];

2) $\|a(p,\phi)\| \le A = const$, $a(p,\phi) \in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$, $\|c(p,z)\| \le C^0 = const$, $P(p,\phi) \in C_\phi(\mathcal{T}_\infty)$ і $\sum_{j=1}^\infty \sup_{\phi\in\mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(p,\phi)| \le P^0 = const < \infty, s \in N$;

3) $\sum_{j=1}^\infty \sup_{y\in\mathcal{T}_\infty^\infty} |b_{sj}(p,y)| \le B^0 = const < \infty$, $s \in N$;

4) рівняння $\frac{dx(t)}{dt} = P(p, \phi_t^p(\phi))x(t)$ має функцію Гріна-Самойленка (ФГС)

$G_t(p,\tau,\phi)$, яка задовольняє нерівність $\|G_t(p,\tau,\phi)\| \leq K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}$, $K = const > 0, \gamma = const > 0$, і не має обмежених на всій числовій осі розв'язків, крім нульового;

5) множини Δ_{ij}, Γ_{ij} та Δ_i сталих відхилень аргументу t обмежені, тобто $|\Delta_{ij}| \leq \Delta^* = const$, $|\Gamma_{ij}| \leq \Gamma^* = const$ та $|\Delta_i| \leq \Delta_* = const$ $\forall\{i,j\} \subset N$.

Позначимо через $\omega(z)$ скалярну неспадну на відрізку $[0, p_2 - p_1]$ неперервну функцію таку, що $\omega(0) = 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються вимоги* (**P**), $2KB^0 < \gamma$ *та* $\forall\{\phi,\bar\phi\} \subset \mathcal{T}_\infty$, $\forall\{p,\bar p\} \subset [p_1,p_2]$ *і* $\forall\{z,\bar z,y,\bar y\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$ *справджуються нерівності*

$$\|a(p,\phi) - a(\bar p,\bar\phi)\| \leq \alpha[\|\phi-\bar\phi\| + \omega(|p-\bar p|)],$$

$$\|P(p,\phi) - P(\bar p,\bar\phi)\| \leq p^0[\|\phi-\bar\phi\| + \omega(|p-\bar p|)],$$

$$\|c(p,z) - c(\bar p,\bar z)\| \leq \eta[\|z-\bar z\| + \omega(|p-\bar p|)],$$

$$\|B(p,y) - B(\bar p,\bar y)\|\} \leq \beta[\|y-\bar y\| + \omega(|p-\bar p|)],$$

де α, p^0, η, β *— додатні сталі.*

Тоді рівняння (1) визначає інваріантний тор $\mathcal{T}(p)$*, породжуюча функція якого* $u(p,\phi)$ *неперервна за сукупністю змінних* ϕ *та* p.

Доведення. Неважко перевірити, що при кожному фіксованому $p \in [p_1,p_2]$ виконуються всі умови теореми з [2], які гарантують існування неперервного відносно ϕ інваріантного тору системи (1) (виконується перше твердження теореми з [2]).

Провівши міркування, аналогічні до доведення нерівності (7.18) з монографії [4], одержуємо оцінку:

$$\|\phi_t^p(\phi) - \phi_t^{\bar p}(\bar\phi)\| \leq$$
$$\leq \big(\|\phi-\bar\phi\| + \omega(|p-\bar p|)\big)\exp\{\alpha|t|\}. \qquad (2)$$

Розглянемо спочатку рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(p,\phi_t^p(\phi))x(t) + c(p,\phi^p,t).$$

Очевидно, що $\forall p \in [p_1,p_2]$ воно має інваріантний тор $\mathcal{T}^0(p)$, породжений функцією

$$u^0(p,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(p,\tau,\phi)c(p,\phi^p,\tau)d\tau.$$

Переконаємося в неперервності цієї функції за сукупністю змінних. Справджується нерівність $\|u^0(p,\phi) - u^0(\bar p,\bar\phi)\| \leq I_1^0(p) + I_2^0(p)$, де ϕ, та $\bar\phi$ — довільні точки з $\mathcal{T}_\infty$, $\{p,\bar p\} \subset [p_1,p_2]$,

$$I_1^0(p) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\|\|c(p,\phi^p,\tau)\|d\tau,$$

$$I_2^0(p) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\|\|c(p,\phi^p,\tau) - c(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau)\|d\tau.$$

Враховуючи нерівність (2) та співвідношення

$$G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(p,t_1,\phi)\left\{P(p,\phi_{t_1}^p(\phi)) -\right.$$
$$\left.- P(\bar p,\phi_{t_1}^{\bar p}(\bar\phi))\right\} G_{t_1}(\bar p,\tau,\bar\phi)dt_1,$$

$$\|P(p,\phi_{t_1}^p(\phi)) - P(\bar p,\phi_{t_1}^{\bar p}(\bar\phi))\| \leq$$
$$\leq p^0\left\{\omega(|p-\bar p|) + \|\phi_{t_1}^p(\phi) - \phi_{t_1}^{\bar p}(\bar\phi)\|\right\} \leq$$
$$\leq p^0\exp\{\alpha|t_1|\}\{\|\phi-\bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\},$$

послідовно одержуємо оцінки:

$$\|P(p,\phi_{t_1}^p(\phi)) - P(\bar p,\phi_{t_1}^{\bar p}(\bar\phi))\| \leq$$
$$\leq \left\{2P^0(p^0)^\nu\{\|\phi-\bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}} \times$$
$$\times \exp\{\frac{\alpha\nu}{\nu+1}|t_1|\},$$

$$\|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\| \leq \frac{2K^2}{\gamma - \frac{\nu\alpha}{\nu+1}}\times$$
$$\times \left\{2P^0(p^0)^\nu\{\|\phi-\bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}},$$

$$\|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\| \leq$$
$$\leq \left\{\frac{4K^3}{\gamma - \frac{\nu\alpha}{\nu+1}}\left\{2P^0(p^0)^\nu\{\|\phi-\bar\phi\| +\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\omega\left(|p-\bar p|\right)\}^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\exp\{\frac{-\gamma}{2}|\tau|\},$$

де ν — довільне додатне дійсне число, при якому $\frac{\nu\alpha}{\nu+1} < \gamma$. Надалі вважатимемо, що число ν задовольняє цю нерівність.

Тепер можна записати нерівність $I_1^0(p) \leq \leq S_{1p}$, де

$$S_{1p} = \frac{4C^0}{\gamma} \left\{ \frac{4K^3}{\gamma - \frac{\nu\alpha}{\nu+1}} \left\{ 2P^0(p^0)^\nu \{\|\phi - \bar\phi\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\omega(|p-\bar p|)\}^\nu \right\}^{\frac{1}{\nu+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= S_1\{\|\phi - \bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, S_1 = const.$$

Запишемо тепер оцінку для інтеграла $I_2^0(p)$. Використавши (2), одержуємо нерівності

$$\|c(p,\phi^p,\tau) - c(\bar p, \bar\phi^{\bar p}, \tau)\| \leq$$

$$\leq \eta \sup_{i\in N, j \in N} \left\{ |\phi^p_{j_{\tau+\Delta_{ij}}}(\phi) - \phi^{\bar p}_{j_{\tau+\Delta_{ij}}}(\bar\phi)| \right\} +$$

$$+\eta\omega(|p-\bar p|) \leq \eta \exp\{\alpha|\tau|\} \left\{ [\|\phi - \bar\phi\| + \right.$$

$$\left. +\omega(|p-\bar p|)] \exp\{\alpha\Delta^*\} + \omega(|p-\bar p|) \right\},$$

з яких випливає оцінка

$$\|c(p,\phi^p,\tau) - c(\bar p, \bar\phi^{\bar p}, \tau)\| \leq$$

$$\leq K_{\nu p} \exp\left\{ \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau| \right\},$$

де

$$K_{\nu p} = \{2C^0\{2C^0[\eta(\|\phi -$$

$$-\bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)) \exp\{\alpha\Delta^*\}]^\nu\}^{\frac{1}{\nu+1}}\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= K_\nu\{\|\phi - \bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, K_\nu = const.$$

Звідси одержуємо, що $I_2^0(p) \leq S_{2p}$, де

$$S_{2p} = KK_{\nu p} \frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}} =$$

$$= S_2\{\|\phi - \bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, S_2 = const,$$

тобто

$$\|u^0(p,\phi) - u^0(\bar p, \bar\phi)\| \leq$$

$$\leq \Gamma^0\{\|\phi - \bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}.$$

де $\Gamma^0 = S_1 + S_2$. Остання нерівність свідчить про неперервність функції $u^0(p,\phi)$ за сукупністю змінних ϕ та p.

У свою чергу рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(p, \phi^p_t(\phi))x(t) +$$

$$+B(p,\phi^p,t)u^0(p,\phi^p,t+\Delta) + c(p,\phi^p,t),$$

де $u^0(p,\phi^p,t+\Delta) =$

$$= (u_1^0(p, \phi^p_{t+\Delta_1}(\phi)), u_2^0(p, \phi^p_{t+\Delta_2}(\phi)), \dots),$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}^1(p)$, породжений функцією

$$x = u^1(p,\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(p,\tau,\phi)c^1(p,\phi,\tau)d\tau,$$

де $c^1(p,\phi,\tau) = B(p,\phi^p,\tau)u^0(p,\phi^p,\tau+\Delta) + +c(p,\phi^p,\tau)$.

Переконаємося в неперервності цієї функції за сукупністю змінних, довівши правильність нерівності

$$\|u^1(p,\phi) - u^1(\bar p, \bar\phi)\| \leq$$

$$\leq \Gamma^1\{\|\phi - \bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad (3)$$

де $\Gamma^1 = const$.

Міркування, аналогічні до проведених вище, приводять до оцінки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\| \|c^1(p,\phi,\tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{4C^0}{\gamma} \left\{ \frac{4K^3}{\gamma - \frac{\nu\alpha}{\nu+1}} \left\{ 2P^0(p^0)^\nu \{\|\phi - \bar\phi\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\omega(|p-\bar p|)\}^\nu \right\}^{\frac{1}{\nu+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{2KB^0}{\gamma}) = S_{3p} =$$

$$= S_3\{\|\phi - \bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, S_3 = const,$$

а вираз S_{4p} знайдемо, оцінивши інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\| \|c^1(p,\phi,\tau) - c^1(\bar p,\bar\phi,\tau)\| d\tau.$$

Виконуються нерівності:

$$\|c^1(p,\phi,\tau) - c^1(\bar p,\bar\phi,\tau)\| \leq \|c(p,\phi^p,\tau) -$$

$$-c(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau)\| + \|B(p,\phi^p,\tau)\|\times$$
$$\times\|u^0(p,\phi^p,\tau+\Delta) - u^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau+\Delta)\|+$$
$$+\|B(p,\phi^p,\tau) - B(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau)\|\|u^0(\bar p,\bar\phi,\tau+\Delta)\|;$$
$$\|B(p,\phi^p,\tau) - B(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau)\| \le \beta\exp\{\alpha|\tau|\}\times$$
$$\times\left\{\|\phi-\bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\right\}\exp\{\alpha\Gamma^*\};$$
$$\|u^0(p,\phi^p,\tau+\Delta) - u^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau+\Delta)\| \le$$
$$\le \Gamma^0\{\{\|\phi-\bar\phi\|+\omega(|p-\bar p|)\}\exp\{\alpha(|\tau|+\Delta_*)\}+$$
$$+2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \le S_4\{\|\phi-\bar\phi\|+$$
$$+3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}\exp\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\},$$

де $S_4 = const$, з яких випливають оцінки

$$\|B(p,\phi^p,\tau) - B(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau)\| \le$$
$$\le S_5\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\{\|\phi-\bar\phi\|+$$
$$+2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, S_5 = const;$$

$$\|c^1(p,\phi,\tau) - c^1(\bar p,\bar\phi,\tau)\| \le$$
$$\le \left\{K_\nu + B^0S_4 + \frac{2KC^0S_5}{\gamma}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\{\|\phi-\bar\phi\|+$$
$$+3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Отже,

$$S_{4p} = \frac{2K}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}\left\{K_\nu + B^0S_4 + \frac{2KC^0S_5}{\gamma}\right\}\times$$
$$\times\{\|\phi-\bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} =$$
$$= S_6\{\|\phi-\bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, S_6 = const,$$

звідки одержується оцінка (3), оскільки $\|u^1(p,\phi) - u^1(\bar p,\bar\phi)\| \le S_{3p} + S_{4p}$.

Методом повної математичної індукції неважко переконатися, що $\forall p \in [p_1,p_2]$ і $\forall k \in N\bigcup\{0\}$ рекурентне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(p,\phi_t^p(\phi))x(t)+$$
$$+B(p,\phi^p,t)u^k(p,\phi^p,t+\Delta) + c(p,\phi^p,t)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}^{k+1}(p)$, породжений функцією

$$x = u^{k+1}(p,\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(p,\tau,\phi)c^{k+1}(p,\phi,\tau)d\tau,$$

де $c^{k+1}(p,\phi,\tau) = B(p,\phi^p,\tau)u^k(p,\phi^p,\tau+\Delta) + +c(p,\phi^p,\tau)$.

Оскільки за першим твердженням теореми з [2] послідовність $\{u^k(p,\phi)\}_{k=1}^{\infty}$ рівномірно відносно p та ϕ збігається при $k\to\infty$ до породжуючої інваріантний тор системи (1) функції $u(p,\phi)$, то очевидно, що для завершення доведення теореми достатньо обгрунтувати неперервність відносно сукупності змінних p та ϕ функцій $u^k(p,\phi)$ $\forall k \in N$. Для цього знов використаємо метод повної математичної індукції. При $k=1$ це твердження доведено вище.

Припустимо, що для всіх $k = 2,3,4,\ldots,n$ справджується нерівність

$$\|u^k(p,\phi) - u^k(\bar p,\bar\phi)\| \le$$
$$\le \Gamma^k\{\|\phi-\bar\phi\| + (k+2)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad (4)$$

де Γ^k — додатні сталі, і доведемо її для $k = n+1$.

Справджуються нерівності

$$\|u^n(p,\phi^p,\tau+\Delta) - u^n(\bar p,\bar\phi^{\bar p},\tau+\Delta)\| \le$$
$$\le \Gamma^n\left\{(n+2)\omega(|p-\bar p|) + \big(\|\phi-\bar\phi\|+\right.$$
$$\left.+\omega(|p-\bar p|)\big)\exp\{\alpha(|\tau|+\Delta_*)\}\right\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \le$$
$$\le S_4^n\left\{\|\phi-\bar\phi\| + (n+3)\omega(|p-\bar p|)\right\}\times$$
$$\times\exp\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\}, \text{ де } S_4^n = \Gamma^n\exp\{\alpha\Delta_*\}.$$

Тепер неважко одержати оцінку:

$$\|c^{n+1}(p,\phi,\tau) - c^{n+1}(\bar p,\bar\phi,\tau)\| \le$$
$$\le \left\{K_\nu + B^0S_4^n + U^nS_5\right\}\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\times$$
$$\times\{\|\phi-\bar\phi\| + (n+3)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

яка, разом з нерівностями

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\|\times$$

$$\times\|c^{n+1}(p,\phi,\tau)\|d\tau \le$$

$$\le S_3^{n+1}\{\|\phi-\bar\phi\|+2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $S_3^{n+1}=const$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\|\|c^{n+1}(p,\phi,\tau)-$$

$$-c^{n+1}(\bar p,\bar\phi,\tau)\|d\tau \le S_6^{n+1}\{\|\phi-\bar\phi\|+$$

$$+(n+3)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},\ S_6^{n+1}=const,$$

приводить до оцінки (4), якщо через Γ^{n+1} позначити суму $S_3^{n+1}+S_6^{n+1}$. Теорему доведено.

3^0**. Випадок нелінійної системи**. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\phi}{dt}=a(p,\phi),$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=P_1(p,x(t),x(t+Q))x(t)+$$
$$+F(p,v(\phi^p,t),x(t),x(t+\Theta))x(t+\Delta)+$$
$$+c(p,\phi^p,t). \tag{5}$$

Тут матриці $P_1(p,x,\chi)=\left[p^1_{ij}(p,x,\chi)\right]_{i,j=1}^{\infty}$ та $F(p,v,x,\chi)=[f_{ij}(p,v,x,\chi)]_{i,j=1}^{\infty}$ визначено на множинах $D_{*p}=[p_1,p_2]\times D\times D$ і $D^{*p}=[p_1,p_2]\times D^*$ відповідно, множина $D=\{x\in\mathfrak{M}|\|x\|\le d\}$, множина $D^*=D_0\times D\times D$ та множина

$$D_0=\{x\in\mathfrak{M}|\|x\|\le V^0=const>0\},$$

через $v(\phi^p,t)$ позначено векторну функцію

$$\{v_1(\psi_1(\phi^p,t),\psi_2(\phi^p,t),\dots),$$

$$v_2(\psi_1(\phi^p,t),\psi_2(\phi^p,t),\dots),\dots\},$$

точки $\psi_i(\phi^p,t)=\left(\phi^p_{1_{t+\Theta_{i1}}}(\phi),\phi^p_{2_{t+\Theta_{i2}}}(\phi),\dots\right)$ $\forall t\in R^1, p\in[p_1,p_2]$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$.

Поняття інваріантного тору $\mathcal{T}_*(p)$ для системи рівнянь (5) вводиться стандартно. Зокрема, при цьому вимагається виконання рівності

$$\frac{du_*(p,\phi^p_t(\phi))}{dt}=$$

$$=P_1(p,u_*(p,\phi^p_t(\phi)),u_*(p,\phi^p,t+Q))\times \tag{6}$$
$$\times u_*(p,\phi^p_t(\phi))+F(p,v(\phi^p,t),u_*(p,\phi^p_t(\phi)),$$
$$u_*(p,\phi^p,t+\Theta))u_*(p,\phi^p,t+\Delta)+c(p,\phi^p,t),$$

де функція $u_*(p,\phi)$ породжує інваріантний тор $\mathcal{T}_*(p)$, через $u_*(p,\phi^p,t+\Theta)$ позначено векторну функцію

$$\{u_{*_1}(p,\phi^p_{t+\Theta_1}(\phi)),u_{*_2}(p,\phi^p_{t+\Theta_2}(\phi)),\dots\},$$

символи $u_*(p,\phi^p,t+Q)$ та $u_*(p,\phi^p,t+\Delta)$ мають аналогічний сенс.

Вважатимемо, що для системи рівнянь (5) $\forall p\in[p_1,p_2]$ справджуються наступні коефіцієнтні умови ($\mathbf{P_1}$):

1) для функцій $a(p,\phi)$ та $c(p,\phi^p,t)$ мають місце ті ж самі умови періодичності відносно ϕ, що і раніше, а для функцій $v_i(\phi^p,t)$ — ті ж самі умови періодичності, що і в підрозділі 4 з [3] ;

2) $\|a(p,\phi)\|\le A$, $\|c(p,\phi^p,t)\|\le C^0$, $\forall\psi\in\mathcal{T}^\infty_\infty$ $\|v(\psi)\|\le V^0$ та $\forall i\in N$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{(p,x,\chi)\in D_{*p}}|p^1_{ij}(p,x,\chi)|\le P^0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{(p,v,x,\chi)\in D^{*p}}|f_{ij}(p,v,x,\chi)|\le F_0,$$

де A,C^0,V^0,P^0,F_0 — додатні сталі;

3) $\forall\{\psi,\bar\psi,z,\bar z\}\subset\mathcal{T}^\infty_\infty$, $\forall\{\phi,\bar\phi\}\subset\mathcal{T}_\infty$, $\forall\{p,\bar p\}\subset[p_1,p_2]$ справджуються нерівності

$$\|a(p,\phi)-a(\bar p,\bar\phi)\|\le\alpha[\|\phi-\bar\phi\|+\omega(|p-\bar p|)],$$

$$\|c(p,z)-c(\bar p,\bar z)\|\le\eta[\|z-\bar z\|+\omega(|p-\bar p|)],$$

$$\|v(\psi)-v(\bar\psi)\|\le\zeta\|\psi-\bar\psi\|,$$

де α,η,ζ — додатні сталі, а функція $\omega(p)$ визначена в теоремі 1;

4) $\forall$ $\{(p,x,\chi),(\bar p,\bar x,\bar\chi)\}\subset D_{*p}$ і $\forall$ $\{(p,v,x,\chi),(\bar p,\bar v,\bar x,\bar\chi)\}\subset D^{*p}$ мають місце оцінки

$$\|P_1(p,x,\chi)-P_1(\bar p,\bar x,\bar\chi)\|\le$$

$$\le\xi_2\{\|x-\bar x\|+\|\chi-\bar\chi\|+\omega(|p-\bar p|)\},$$

$$\|F(p,v,x,\chi)-F(\bar p,\bar v,\bar x,\bar\chi)\|\le$$

$$\le\xi_1\{\|v-\bar v\|+\|x-\bar x\|+\|\chi-\bar\chi\|+\omega(|p-\bar p|)\},$$

де ξ_1,ξ_2 — додатні сталі;

5) множини відхилень Δ_{ij}, Δ_i, Θ_{ij}, Θ_i та Q_i аргументу t обмежені, тобто $|\Delta_{ij}| \le \Delta^*$, $|\Delta_i| \le \Delta_*$, $|\Theta_{ij}| \le \Theta^*$, $|\Theta_i| \le \Theta_*$ та $|Q_i| \le Q_*$ $\forall \{i,j\} \subset N$, де $\Delta^*, \Delta_*, \Theta^*, \Theta_*, Q_*$ — додатні сталі.

Оберемо будь-яку матрицю $P(p,\phi)$, що задовольняє такі умови:

1) $\|P(p,\phi)-P(\bar{p},\bar{\phi})\| \le \xi_1^*[\|\phi-\bar{\phi}\|+\omega(|p-\bar{p}|)]$ для всіх $\{\phi,\bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ та $\{p,\bar{p}\} \subset [p_1,p_2]$, де $\xi_1^* = const > 0$;

2) $\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{p\in[p_1,p_2],\phi\in\mathcal{T}_\infty} |p_{ij}(p,\phi)| \le P^0$ $\forall i \in N$;

3) виконується четверта умова з вимог $(\mathbf{P})$.

Зрозуміло, що такі матриці, зокрема числові, існують.

Рівняння (5) подамо у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(p,\phi_t^p(\phi))x(t) + P_2(p,\phi_t^p(\phi),x(t),$$
$$x(t+Q))x(t) + F(p,v(\phi^p,t),x(t),x(t+\Theta))\times$$
$$\times x(t+\Delta) + c(p,\phi^p,t),$$

де

$$P_2(p,\phi_t^p(\phi),x(t),x(t+Q)) =$$
$$= P_1(p,x(t),x(t+Q)) - P(p,\phi_t^p(\phi)).$$

Нехай $u_*^0(p,\phi) = u^0(p,\phi)$ — функція, побудована у доведенні теореми 1. Вона задовольняє нерівність

$$\|u_*^0(p,\phi) - u_*^0(\bar{p},\bar{\phi})\| \le$$
$$\le U_*^0\{\|\phi-\bar{\phi}\| + 2\omega(|p-\bar{p}|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де U_*^0 дорівнює Γ^0, в якому p^0 замінено на ξ_1^*, і є неперервною за сукупністю змінних . При цьому, якщо $\frac{2KC^0}{\gamma} \le d$, то $\|u_*^0(p,\phi)\| \le d$.

Тоді має сенс рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(p,\phi_t^p(\phi))x(t) + c_*^0(p,\phi,t), \qquad (7)$$

де

$$c_*^0(p,\phi,t) = P_2^0(p,\phi,t)u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)) +$$
$$+F^0(p,\phi,t)u_*^0(p,\phi^p,t+\Delta) + c(p,\phi^p,t),$$
$$P_2^0(p,\phi,t) =$$
$$= P_2(p,\phi_t^p(\phi),u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)),u_*^0(p,\phi^p,t+Q)),$$
$$F^0(p,\phi,t) =$$
$$= F(p,v(\phi^p,t),u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)),u_*^0(p,\phi^p,t+\Theta)),$$

а функції $u_*^0(p,\phi^p,t+\Delta)$, $u_*^0(p,\phi^p,t+Q)$ та $u_*^0(p,\phi^p,t+\Theta)$ означаються аналогічно до функції типу $u_*(p,\phi^p,t+\Theta)$.

При виконанні умов $(\mathbf{P_1})$ при кожному $p \in [p_1,p_2]$ рівняння (7) має єдиний інваріантний тор $\mathcal{T}_*^1(p)$, породжений функцією

$$u_*^1(p,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(p,\tau,\phi)c_*^0(p,\phi,\tau)d\tau.$$

Покажемо, що ця функція неперервна за сукупністю змінних.

Враховуючи оцінку для $\|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar{p},\tau,\bar{\phi})\|$ з доведення теореми 1, легко переконатися в правильності нерівності

$$I_*^1(p) \stackrel{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar{p},\tau,\bar{\phi})\|\times$$
$$\times\|c_*^0(p,\phi,\tau)\|d\tau \le$$
$$\le S_1^*\{\|\phi-\bar{\phi}\| + 2\omega(|p-\bar{p}|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де S_1^* — додатна стала.

Знайдемо аналогічну оцінку для інтеграла

$$I_*^2(p) \stackrel{df}{=}$$
$$\stackrel{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\bar{p},\tau,\bar{\phi})\|\|c_*^0(p,\phi,\tau) - c_*^0(\bar{p},\bar{\phi},\tau)\|d\tau.$$

Використавши позначення

$$\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|t|\right\}\{\|\phi-\bar{\phi}\|+$$
$$+n\omega(|p-\bar{p}|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} = \exp\{n,p,\phi,\bar{\phi},\nu,t\},$$

оцінку (2) та доведення теореми 1, одержуємо нерівності:

$$\|P(p,\phi_t^p(\phi)) - P(\bar{p},\phi_t^{\bar{p}}(\bar{\phi}))\| \le$$
$$\le P_*\exp\{2,p,\phi,\bar{\phi},\nu,t\},\ \ P_* = const,$$
$$Ç_1(t) \stackrel{df}{=} \|c(p,\phi^p,t) - c(\bar{p},\bar{\phi}^{\bar{p}},t)\| \le$$
$$\le K_\nu\exp\{2,p,\phi,\bar{\phi},\nu,t\},$$

$$\|u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)) - u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\| \le$$
$$\le U_*^0 \exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$
$$\|u_*^0(p,\phi^p,t+Q) - u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+Q)\| \le$$
$$\le U_*^0 \exp\{\alpha Q_*\}\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

які дозволяють записати наступний ланцюжок оцінок:

$$Ç_2(t) \stackrel{df}{=} \|P_2^0(p,\phi,t)u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)) -$$
$$-P_2^0(\bar p,\bar\phi,t)u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\| \le$$
$$\le \{\|P_1(p,u_*^0(p,\phi_t^p(\phi),u_*^0(p,\phi^p,t+Q)) -$$
$$-P_1(\bar p,u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi),u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+Q))\| +$$
$$+\|P(p,\phi_t^p(\phi)) - P(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\|\}d +$$
$$+2P^0\|u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)) - u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\| \le$$
$$\le \xi_2 dU_*^0 \exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} +$$
$$+\xi_2 dU_*^0 \exp\{\alpha Q_*\}\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} +$$
$$+\xi_2 d\omega(|p-\bar p|) + dP_* \exp\{2,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} +$$
$$+2P^0 U_*^0 \exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} \le$$
$$\le \{\xi_2 dU_*^0 + \xi_2 dU_*^0 \exp\{\alpha Q_*\} + dP_* +$$
$$+2P^0U_*^0\}\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} + \xi_2 d\omega(|p-\bar p|).$$

Врахувавши, що $\forall t \in R^1$ справджуються співвідношення

$$\omega(|p-\bar p|) \le \|\phi-\bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|) =$$
$$= (\|\phi-\bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|))^{\frac{\nu+2}{2(\nu+1)}}(\|\phi-\bar\phi\| +$$
$$+3\omega(|p-\bar p|))^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \le \Xi_1 \exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi_1 = (4\pi + 3\omega(p_2-p_1))^{\frac{\nu+2}{2(\nu+1)}},$$

одержуємо нерівність

$$Ç_2(t) \le \Xi^1 \exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi^1 = \xi_2 dU_*^0 + \xi_2 dU_*^0\exp\{\alpha Q_*\} +$$
$$+dP_* + 2P^0U_*^0 + \xi_2 d\Xi_1.$$

Також справджуються такі співвідношення:

$$Ç_3(t) \stackrel{df}{=} \|F^0(p,\phi,t)u_*^0(p,\phi^p,t+\Delta) -$$
$$-F^0(\bar p,\bar\phi,t)u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Delta)\| \le$$
$$\le \|F^0(p,\phi,t) - F^0(\bar p,\bar\phi,t)\|d +$$
$$+F_0\|u_*^0(p,\phi^p,t+\Delta) - u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Delta)\|;$$
$$\|u_*^0(p,\phi^p,t+\Delta) - u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Delta)\| \le$$
$$\le U_*^0\exp\{\alpha\Delta_*\}\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\};$$
$$\|u_*^0(p,\phi^p,t+\Theta) - u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Theta)\| \le$$
$$U_*^0\exp\{\alpha\Theta_*\}\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\};$$
$$\|v(\phi^p,t) - v(\bar\phi^{\bar p},t)\| \le$$
$$\le \zeta\sup_i\{\|\psi_i(\phi^p,t) - \psi_i(\bar\phi^{\bar p},t)\|\} \le$$
$$\le \zeta\{\|\phi-\bar\phi\| + \omega(|p-\bar p|)\}\exp\{\alpha(|t|+\Theta^*)\};$$
$$\|v(\phi^p,t) - v(\bar\phi^{\bar p},t)\| \le$$
$$\le \zeta V_*^0\exp\{\alpha\Theta^*\}\exp\{1,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де V_*^0 — додатна стала;

$$\|F^0(p,\phi,t) - F^0(\bar p,\bar\phi,t)\| = \|F(p,v(\phi^p,t),$$
$$u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)),u_*^0(p,\phi^p,t+\Theta)) - F(\bar p,v(\bar\phi^{\bar p},t),$$
$$u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi)),u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Theta))\| \le$$
$$\le \xi_1\{\omega(|p-\bar p|) + \|v(\phi^p,t) - v(\bar\phi^{\bar p},t)\| +$$
$$+\|u_*^0(p,\phi_t^p(\phi)) - u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\| +$$
$$+\|u_*^0(p,\phi^p,t+\Theta) - u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Theta)\|\} \le$$
$$\le \xi_1\{\Xi_1\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} + \zeta V_*^0\exp\{\alpha\Theta^*\}\times$$
$$\times\exp\{1,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} +$$
$$+U_*^0\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\} + U_*^0\exp\{\alpha\Theta_*\}\times$$
$$\times\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}\} \le \Xi_2\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi_2 = \xi_1\{\Xi_1 + \zeta V_*^0\exp\{\alpha\Theta^*\} + U_*^0 +$$
$$+U_*^0\exp\{\alpha\Theta_*\}\}.$$

Тепер неважко записати нерівність

$$Ç_3(t) \le \Xi^2\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi^2 = d\Xi_2 + F_0U_*^0\exp\{\alpha\Delta_*\}.$$

Нарешті одержуємо оцінку

$$\|c_*^0(p,\phi,\tau) - c_*^0(\bar p,\bar\phi,\tau)\| \le \sum_{i=1}^3 Ç_i(\tau) =$$
$$= (K_\nu + \Xi^1 + \Xi^2)\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,\tau\},$$

що приводить до нерівностей

$$I_*^2(p) \le \int_{-\infty}^{\infty} K(K_\nu + \Xi^1 + \Xi^2)\times$$

$$\times \exp\{-(\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)})|\tau|\}\{\|\phi - \bar\phi\|+$$

$$+3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} d\tau \le$$

$$\le \bar\Xi\{\|\phi-\bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де

$$\bar\Xi = K(K_\nu + \Xi^1 + \Xi^2)\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Таким чином $\forall\{\phi,\bar\phi\} \subset \mathcal{T}_\infty$ та $\forall\{p,\bar p\} \in \in [p_1,p_2]$ справджуються нерівності

$$\|u_*^1(p,\phi) - u_*^1(\bar p,\bar\phi)\| \le I_*^1(p) + I_*^2(p) \le$$

$$\le \bar U_*^1\{\|\phi-\bar\phi\| + 3\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu-1)}}, \qquad (8)$$

де через $\bar U_*^1$ позначено суму $S_1^* + \bar\Xi$.

Це доводить неперервну залежність функції $u_*^1(p,\phi)$ від сукупності змінних p та ϕ.

Запишемо рекурентне формальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(p,\phi_t^p(\phi))x(t) + c_*^k(p,\phi,t), \qquad (9)$$

де

$$c_*^k(p,\phi,t) = P_2^k(p,\phi,t)u_*^k(p,\phi_t^p(\phi))+$$

$$+F^k(p,\phi,t)u_*^k(p,\phi^p,t+\Delta) + c(p,\phi^p,t),$$

$$P_2^k(p,\phi,t) =$$

$$= P_2(p,\phi_t^p(\phi), u_*^k(p,\phi_t^p(\phi)), u_*^k(p,\phi^p,t+Q)),$$

$$F^k(p,\phi,t) =$$

$$= F(p, v(\phi^p,t), u_*^k(p,\phi_t^p(\phi)), u_*^k(p,\phi^p,t+\Theta)),$$

і сформулюємо наступне твердження.

Індуктивна лема 1. *Нехай справджуються умови* $(\mathbf{P_1})$ *і нерівності* $2K(2P^0 + +F_0) < \gamma$, $\frac{2KC^0}{\gamma - 2K(2P^0+F_0)} \le d$.

Тоді $\forall k \in N \cup \{0\}$ *рекурентне рівняння (9) визначає в просторі* $\mathfrak{M}$ *єдиний інваріантний тор* $\mathcal{T}_*^{k+1}(p)$, *породжений функцією*

$$x = u_*^{k+1}(p,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(p,\tau,\phi)c_*^k(p,\phi,\tau)d\tau,$$

що задовольняє умову

$$\|u_*^{k+1}(p,\phi) - u_*^{k+1}(\bar p,\bar\phi)\| \le$$

$$\le \bar U_*^{k+1}\{\|\phi-\bar\phi\| + (k+3)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \quad (10)$$

і обмежена $\forall p \in [p_1,p_2]$ *на торі* $\mathcal{T}_\infty$ *сталою* d, *тобто* $\|u_*^{k+1}(p,\phi)\| \le d$ *і* $\bar U_*^{k+1} = const > > 0$. *При цьому* ν — *довільне додатне число, що задовольняє нерівність* $\frac{\alpha\nu}{\nu+1} < \gamma$.

Доведення леми проведемо методом повної математичної індукції відносно k. При $k = 0$ твердження леми доведено вище. Припустимо, що для всіх $k = 1,2,3,\dots,n-1$ твердження леми має місце і доведемо його для $k = n$. Очевидно, що справджується оцінка

$$I_{1*}^{n+1}(p) \stackrel{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(p,\tau,\phi) - G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\|\|c_*^n(p,$$

$$\phi,\tau)\|d\tau \le S_1^*\{\|\phi-\bar\phi\| + 2\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Для відшукання аналогічної оцінки для інтеграла

$$I_{2*}^{n+1}(p) \stackrel{df}{=}$$

$$\stackrel{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\bar p,\tau,\bar\phi)\|\|c_*^n(p,\phi,\tau) - c_*^n(\bar p,\bar\phi,\tau)\|d\tau$$

використаємо схему доведення нерівностей (8). Неважко переконатися в правильності нерівностей

$$\|u_*^n(p,\phi_t^p(\phi)) - u_*^n(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\| \le$$

$$\le \bar U_*^n \exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

$$\|u_*^n(p,\phi^p,t+Q) - u_*^n(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+Q)\| \le$$

$$\le \bar U_*^n \exp\{\alpha Q_*\}\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

які дозволяють записати наступний ланцюжок оцінок:

$$\text{Ç}_2^n(t) \stackrel{df}{=} \|P_2^n(p,\phi,t)u_*^n(p,\phi_t^p(\phi))-$$

$$-P_2^n(\bar p,\bar\phi,t)u_*^n(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\| \le$$

$$\le \{\|P_1(p,u_*^0(p,\phi_t^p(\phi),u_*^0(p,\phi^p,t+Q))-$$

$$-P_1(\bar p,u_*^0(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi),u_*^0(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+Q))\|+$$

$$+\|P(p,\phi_t^p(\phi)) - P(\bar p,\phi_t^{\bar p}(\bar\phi))\|\}d+$$

$$+2P^0\|u^0_*(p,\phi^p_t(\phi))-u^0_*(\bar p,\phi^{\bar p}_t(\bar\phi))\|\le$$
$$\le\xi_2 d\bar U^n_*\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+$$
$$+\xi_2 d\bar U^n_*\exp\{\alpha Q_*\}\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+$$
$$+\xi_2 d\omega(|p-\bar p|)+dP_*\exp\{n+2,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+$$
$$+2P^0\bar U^n_*\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}\le$$
$$\le\{\xi_2 d\bar U^n_*+\xi_2 d\bar U^n_*\exp\{\alpha Q_*\}+dP_*+2P^0\bar U^n_*\}\times$$
$$\times\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+\xi_2 d\omega(|p-\bar p|).$$

Врахувавши, що $\forall t\in R^1$ справджуються співвідношення

$$\omega(|p-\bar p|)\le\|\phi-\bar\phi\|+(n+3)\omega(|p-\bar p|)=$$
$$=(\|\phi-\bar\phi\|+(n+3)\omega(|p-\bar p|))^{\frac{\nu+2}{2(\nu+1)}}\times$$
$$\times(\|\phi-\bar\phi\|+(n+3)\omega(|p-\bar p|))^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}\le$$
$$\le\Xi^n_1\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi^n_1=(4\pi+(n+3)\omega(p_2-p_1))^{\frac{\nu+2}{2(\nu+1)}},$$

одержуємо нерівність

$$\varsigma^n_2(t)\le\Xi^n\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi^n=\xi_2 d\bar U^n_*+\xi_2 d\bar U^n_*\exp\{\alpha Q_*\}+dP_*+$$
$$+2P^0\bar U^n_*+\xi_2 d\Xi^n_1.$$

Також справджуються такі співвідношення:

$$\varsigma^n_3(t)\stackrel{df}{=}\|F^n(p,\phi,t)u^n_*(p,\phi^p,t+\Delta)-$$
$$-F^n(\bar p,\bar\phi,t)u^n_*(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Delta)\|\le$$
$$\le\|F^n(p,\phi,t)-F^n(\bar p,\bar\phi,t)\|d+$$
$$+F_0\|u^n_*(p,\phi^p,t+\Delta)-u^n_*(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Delta)\|;$$
$$\|F^n(p,\phi,t)-F^n(\bar p,\bar\phi,t)\|=\|F(p,v(\phi^p,t),$$
$$u^n_*(p,\phi^p_t(\phi)),u^n_*(p,\phi^p,t+\Theta))-F(\bar p,v(\bar\phi^{\bar p},t),$$
$$u^n_*(\bar p,\phi^{\bar p}_t(\bar\phi)),u^n_*(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Theta))\|\le$$
$$\le\xi_1\{\omega(|p-\bar p|)+\|v(\phi^p,t)-v(\bar\phi^{\bar p},t)\|+$$
$$+\|u^n_*(p,\phi^p_t(\phi))-u^n_*(\bar p,\phi^{\bar p}_t(\bar\phi))\|+$$
$$+\|u^n_*(p,\phi^p,t+\Theta)-u^n_*(\bar p,\bar\phi^{\bar p},t+\Theta)\|\}\le$$
$$\le\xi_1\{\Xi^n_1\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+$$
$$+\zeta V^0_*\exp\{\alpha\Theta^*\}\exp\{1,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+$$
$$+\bar U^n_*\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}+\bar U^n_*\exp\{\alpha\Theta_*\}\times$$
$$\times\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\}\}\le$$
$$\le\Xi^2_2\exp\{n+3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi^2_2=\xi_1\{\Xi^n_1+\zeta V^0_*\exp\{\alpha\Theta^*\}+$$
$$+\bar U^n_*+\bar U^n_*\exp\{\alpha\Theta_*\}\}.$$

Тепер неважко записати нерівність

$$\varsigma^n_3(t)\le\Xi^2_*\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,t\},$$

де

$$\Xi^2_*=d\Xi^2_2+F_0\bar U^n_{**}\exp\{\alpha\Delta_*\}.$$

Нарешті одержуємо оцінку

$$\|c^n_*(p,\phi,\tau)-c^n_*(\bar p,\bar\phi,\tau)\|\le$$
$$\le(K_\nu+\Xi^n+\Xi^2_*)\exp\{3,p,\phi,\bar\phi,\nu,\tau\},$$

що приводить до нерівностей

$$I^{n+1}_{2*}(p)\le\int_{-\infty}^{\infty}K(K_\nu+$$
$$+\Xi^n+\Xi^2_*)\exp\{-(\gamma-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)})|\tau|\}\times$$
$$\times\{\|\phi-\bar\phi\|+(n+3)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}d\tau\le$$
$$\le\Xi_n\{\|\phi-\bar\phi\|+(n+3)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де

$$\Xi_n=K(K_\nu+\Xi^n+\Xi^2_*)\frac{2}{\gamma-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Таким чином $\forall\{\phi,\bar\phi\}\subset\mathcal{T}_\infty$ та $\forall\{p,\bar p\}\in\in[p_1,p_2]$ справджуються нерівності

$$\|u^{n+1}_*(p,\phi)-u^{n+1}_*(\bar p,\bar\phi)\|\le I^{n+1}_{1*}(p)+I^{n+1}_{2*}(p)\le$$
$$\le\bar U^{n+1}_*\{\|\phi-\bar\phi\|+(n+3)\omega(|p-\bar p|)\}^{\frac{\nu}{2(\nu-1)}},$$

де через $\bar U^{n+1}_*$ позначено суму $S^*_1+\Xi_n$. Це означає виконання оцінки (10) при всіх натуральних значеннях k. Легко перевірити також, що нерівності з формулювання леми 1 забезпечують оцінку $\|u^k_*(p,\phi)\|\le d$ при всіх натуральних k, що завершує доведення леми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{P_1})$ *і справджуються нерівності*

$$2K\left\{\left[2C^0(\xi_1+\xi_2)\right]^{\frac{1}{2}}+2P^0+F_0\right\}<\gamma,$$

$$\left(\frac{C^0}{2(\xi_1+\xi_2)}\right)^{\frac{1}{2}}\le d<\frac{\gamma-2K(2P^0+F_0)}{4(\xi_1+\xi_2)K}.$$

Тоді рівняння (5) визначає інваріантний тор $\mathcal{T}_*(p)$*, породжуюча функція якого* $u_*(p,\phi)$ *неперервна за сукупністю змінних* ϕ *та* p.

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 1. Спочатку зауважимо, що при умовах теореми 2 виконуються умови індуктивної леми 1. Далі достатньо показати, що при кожному фіксованому $p\in\in[p_1,p_2]$ існує інваріантний тор системи рівнянь(5), породжуюча функція якого $u_*(p,\phi)$ є границею послідовності $\{u_*^k(p,\phi)\}_{k=1}^{\infty}$, що збігається рівномірно відносно (p,ϕ), оскільки за лемою 1 кожна з функцій $u_*^k(p,\phi)$ неперервна за сукупністю змінних (p,ϕ).

Нескладні, але громіздкі перетворення приводять до нерівностей

$$\|c_*^k(p,\phi,t)-c_*^{k-1}(p,\phi,t)\|\le$$
$$\le\left\{(\xi_1+\xi_2)2d+2P^0+F_0\right\}\times$$
$$\times\|u_*^k(p,\phi)-u_*^{k-1}(p,\phi)\|_0,$$
$$\|u_*^k(p,\phi)-u_*^{k-1}(p,\phi)\|_0=$$
$$=\sup_{\{p\in[p_1,p_2],\phi\in\mathfrak{T}_\infty\}}\|u_*^k(p,\phi)-u_*^{k-1}(p,\phi)\|,$$

з яких неважко одержати оцінку

$$\|u_*^{k+1}(p,\phi)-u_*^k(p,\phi)\|_0\le$$
$$\le\left(\frac{2K[(\xi_1+\xi_2)2d+2P^0+F_0]}{\gamma}\right)^k 2d.$$

При умовах теореми $2K[(\xi_1+\xi_2)2d+2P^0++F_0]<\gamma$, отже послідовність $\{u_*^k(\phi)\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною у повному метричному просторі $\mathfrak{M}$ і рівномірно відносно ϕ,p збігається за нормою цього простору до неперервної за сукупністю змінних функції $u_*(p,\phi)$.

Залишається показати, що ця функція визначає інваріантний тор рівняння (5). Оскільки функція $u_*^{k+1}(p,\phi)$ породжує інваріантний тор системи (9), то при всіх $k=0,1,2,\ldots$ справджуються покоординатні рівності

$$\frac{du_{*s}^{k+1}(p,\phi_t^p(\phi))}{dt}=\sum_{j=1}^{\infty}\{p_{sj}(p,\phi_t^p(\phi))\times$$
$$\times u_{*j}^{k+1}(p,\phi_t^p(\phi))+$$
$$+p_{sj}^1(p,u_*^k(p,\phi_t^p(\phi)),u_*^k(p,\phi,t+Q))\times \quad (11)$$
$$\times u_{*j}^k(p,\phi_t^p(\phi))-p_{sj}(p,\phi_t^p(\phi))u_{*j}^k(p,\phi_t^p(\phi))+$$
$$+f_{sj}(p,v(\phi^p,t),u_*^k(p,\phi_t^p(\phi)),u_*^k(p,\phi,t+\Theta))\times$$
$$\times u_{*j}^k(p,\phi,t+\Delta)\}+c_j(p,\phi,t),\ \ s\in N,\phi\in\mathcal{T}_\infty.$$

Очевидно, що $\forall s\in N$ ряди, які знаходяться в правих частинах останніх рівностей, мажоруються збіжним числовим рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{2\sup_{(p,\phi)}|p_{sj}(p,\phi)|+\sup_{D_{*p}}|p_{sj}^1(p,x,\chi)|+\right.$$
$$\left.+\sup_{D^{*p}}|f_{sj}(p,v,x,\chi)|\right\}d,$$

де $(p,\phi)\in[p_1,p_2]\times\mathcal{T}_\infty$. Це дає можливість у рівностях (11) перейти до границі при $k\to\infty$ і одержати тотожність (6).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пасюк К.В.* Про існування ліпшіцевих інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь, що містять нескінченну кількість відхилень скалярного аргументу // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. — Випуск 421.— С. 75 - 79.

2. *Теплінський Ю.В., Пасюк К.В.* Про існування інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. — Випуск 454.— С. 108 - 115.

3. *Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В.* Про існування інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, №3 — С. 347 - 367.

4. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.* Счётные системы дифференциальных уравнений.— Киев: Издательство Института математики НАН Украины, 1993. — 308 с.