УДК 517.9

©2010 р. О.Ю. Теплінський

Інститут математики НАН України

ПІДГОМОЛОГІЧНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЕРГОДИЧНОГО ГОМЕОМОРФІЗМУ КОЛА

Розглянуто клас функціональних рівнянь, що асоціюються з відомим адитивним гомологічним рівнянням для ірраціонального повороту кола і пов'язані з динамічними системами з дискретним часом на двовимірному циліндрі, які з'являються зокрема як математичні моделі певних електронних пристроїв. Для цих рівнянь наведено умови існування та єдиності неперервних розв'язків та показано, що решта розв'язків не є вимірними.

We consider a class of functional equations associated with the renowned additive homologic equation for an irrational circle rotation. They are connected with discrete-time dynamical systems on a two-dimensional cylinder which appear in particular as mathematical models of certain electronic devices. For these equations, we establish conditions for the existence and uniqueness of continuous solutions and show that the rest of the solutions are not measurable.

1. Підгомологічне рівняння.

На одиничному колі $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ розглянемо лінійний поворот $T_\rho : \theta \mapsto \theta + \rho$ з ірраціональним числом обертання ρ або будь-який гомеоморфізм T кола $\mathbb{S}$, топологічно еквівалентний T_ρ. Такий гомеоморфізм T є строго ергодичним [1] і породжує на $\mathbb{S}$ інваріантну міру μ, яка є абсолютно неперервною відносно міри Лебега (а у випадку лінійного повороту збігається з нею).

Підгомологічним рівнянням для повороту кола T назвемо функціональне рівняння вигляду

$$f(T\theta) = f(\theta) + G(\theta, f(\theta)) \tag{1}$$

стосовно невідомої функції $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, в якому відома функція $G : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною за двома змінними і задовольняє наступні обмеження на нахил за змінною x:

$$-1 \le \frac{G(\theta, x_1) - G(\theta, x_2)}{x_1 - x_2} \le 0 \tag{2}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \ne x_2$.

Рівняння зазначеного вигляду природно виникають при дослідженні математичних моделей певних електронних пристроїв [2, 3], а їхні неперервні розв'язки задають межі головних динамічних структур у таких моделях [4, 5]. Рівняння (1), (2) називають підгомологічним внаслідок його асоціації з відомим *гомологічним рівнянням*

$$f(T\theta) = f(\theta) + F(\theta), \tag{3}$$

яке для деяких чисел обертання може не мати інтегровних за Лебегом (відносно міри μ) розв'язків навіть коли F аналітична [6] і має нульове середнє значення (остання умова є, очевидно, необхідною для того, аби рівняння (3) мало інтегровний розв'язок). За нашим означенням, рівняння (3) складає частинний випадок рівняння (1), (2) (коли G має нульовий нахил за x), але додаткові умови, за яких ми вивчатимемо підгомологічне рівняння, фактично виключатимуть з розгляду гомологічне.

Зауважимо однак, що випадок, коли нахил G за x є відокремленим від нуля (від'ємною сталою), є значно простішим для аналізу. В моделях [2, 3] функції $G(\theta, \cdot)$, $\theta \in \mathbb{S}$, є кусково-лінійними, і в них саме відрізки нахилу 0 чергуються з відрізками нахилу -1.

Оскільки G не зростає за змінною x, для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ є визначеними характеристики

$$m(\theta) = \lim_{x \to +\infty} G(\theta, x) \in [-\infty, +\infty),$$
$$M(\theta) = \lim_{x \to -\infty} G(\theta, x) \in (-\infty, +\infty].$$

За теоремою про інтегрування монотонної

послідовності [7] можна визначити відповідні інтегральні характеристики

$$
\begin{aligned}
m = \int_{\mathbb{S}} m(\theta) d\mu = \lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{S}} G(\theta, x) d\mu,\\
M = \int_{\mathbb{S}} M(\theta) d\mu = \lim_{x\to-\infty} \int_{\mathbb{S}} G(\theta, x) d\mu,\\
-\infty \le m \le M \le +\infty,
\end{aligned}
$$

причому рівність $m = M$ має місце лише тоді, коли G не залежить від x, тобто рівняння є насправді гомологічним. Саме в термінах характеристик m та M ми в наступному пункті сформулюємо умови існування та єдиності розв'язків рівняння (1), (2) у класах неперервних та вимірних за μ функцій.

2. Формулювання результатів.

Теорема 1 (про існування неперервного розв'язку). *Якщо інтегральні характеристики задовольняють нерівності $m < 0 < M$, то підгомологічне рівняння (1), (2) має неперервний розв'язок. Якщо $m > 0$ або $M < 0$, то таких розв'язків немає.*

Теорема 2 (про єдиність неперервного розв'язку). *Множина всіх неперервних розв'язків рівняння (1), (2) має вигляд $\{f_0(\cdot) + C \,|\, C \in \Xi\}$, де Ξ — певна зв'язна замкнена підмножина $\mathbb{R}$. При $m \ne 0$ множина Ξ є обмеженою згори та при $M \ne 0$ є обмеженою знизу.*

Теорема 3 (про вимірні розв'язки). *Якщо $m \ne 0$ та $M \ne 0$, то будь-який вимірний за μ розв'язок рівняння (1), (2) майже скрізь дорівнює якомусь його неперервному розв'язку.*

3. Доведення теореми 1.

Для доведення застосуємо ідеї, які використовувалися під час дослідження трикутних динамічних систем із ірраціональним поворотом кола в якості бази [4, 5].

Перш за все, зазначимо, що рівнянню (1) відповідає динамічна система з дискретним часом на циліндрі $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, яку породжує неперервне трикутне відображення

$$
\mathcal{F} : (\theta, x) \mapsto (T\theta, x + G(\theta, x)).
$$

Розв'язкам рівняння (1) відповідають інваріантні контури цієї динамічної системи. (*Контуром* на циліндрі $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ ми називаємо графік будь-якої функції з $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}$, а також і власне цю функцію, оскільки останнє не викликає значної плутанини.)

Інтегрування (1) за θ по $\mathbb{S}$ за умов інтегровності f призводить до рівності

$$
\int_{\mathbb{S}} G(\theta, f(\theta)) d\mu = 0. \tag{4}
$$

Якщо припустити, що $m > 0$, то $\int_{\mathbb{S}} G(\theta, x) d\mu > 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Якби рівняння (1) при $m > 0$ мало неперервний розв'язок f, то для $f_{\max} = \max_{\theta\in\mathbb{S}} f(\theta)$ мали б місце нерівності $\int_{\mathbb{S}} G(\theta, f(\theta)) d\mu \ge \int_{\mathbb{S}} G(\theta, f_{\max}) d\mu > 0$, що протирічить (4). Це протиріччя доводить теорему для $m > 0$; випадок $M < 0$ розглядається аналогічно.

Припустимо тепер, що $m < 0 < M$. Наша початкова мета — побудувати неспадну послідовність неперервних контурів L_n, пов'язаних співвідношенням $L_{n+1} = \mathcal{F} L_n$, тобто $L_{n+1}(T\theta) = L_n(\theta) + G(\theta, L_n(\theta))$, для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, $n \ge 0$. Очевидно, що для цього досить побудувати неперервний контур L_0 такий, що $\mathcal{F} L_0 \ge L_0$, а далі послідовність ітерацій цього контуру буде автоматично неспадною (внаслідок неспадності $x + G(\theta, x)$ за x) і складатиметься з неперервних контурів (внаслідок неперервності $\mathcal{F}$). В загальному випадку ця конструкція не є тривіальною, і ми скористаємося підходом, що використовує ергодичні властивості ірраціонального повороту кола.

Для зручності трохи змінимо функцію G, а саме — розглянемо замість неї функцію

$$
G_* : (\theta, x) \mapsto \min\{G(\theta, x), \kappa(x)\}
$$

де $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — довільна функція така, що:

$$
\begin{aligned}
-1 < \frac{\kappa(x_1) - \kappa(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \quad x_1 \ne x_2,\\
\lim_{x\to-\infty} \kappa(x) = +\infty,\\
\lim_{x\to-\infty} (x + \kappa(x)) = -\infty.
\end{aligned}
$$

Легко переконатися, що функція G_* є неперервною, задовольняє обмеження вигляду (2), і для неї $\lim\limits_{x\to-\infty} G_*(\theta,x)d\theta = M(\theta)$.

За теоремою про інтегрування монотонної послідовності [7] маємо $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_{\mathbb{S}} G_*(\theta,x)d\mu = \int_{\mathbb{S}} M(\theta)d\mu = M > 0$, тому існує $x_* \in \mathbb{R}$ таке, що $\int_{\mathbb{S}} G_*(\theta,x_*)d\mu > 0$. З посиленої теореми Біркгофа-Хінчина [1] з урахуванням строгої ергодичності T та компактності $\mathbb{S}$ випливає, що $\int_{\mathbb{S}} G_*(\theta,x_*)d\mu = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} G_*(T^i\theta,x_*)$, де збіжність є рівномірною за $\theta\in\mathbb{S}$. Тому існує $N_*\ge 1$ таке, що

$$\sum_{i=0}^{N_*-1} G_*(T^i\theta,x_*) > 0 \text{ для всіх } \theta\in\mathbb{S}. \qquad (5)$$

Функції κ та $\mathrm{Id}+\kappa$, де Id — тотожнє відображення, строго монотонні. Оберемо довільне число $a_0 \le (\mathrm{Id}+\kappa)^{-N_*}(x_*)$ і розглянемо траєкторію $(\theta_i,x_i) = \mathcal{F}_*^i(\theta_0,x_0)$, $i\ge 0$, відображення

$$\mathcal{F}_* : (\theta,x) \mapsto (T\theta, x+G_*(\theta,x))$$

із $x_0 = a_0$ та довільним $\theta_0\in\mathbb{S}$. З конструкції G_* та вибору x_* випливає, що $\kappa(x_*)>0$, тому $(\mathrm{Id}+\kappa)(x_*) > x_*$, а отже $(\mathrm{Id}+\kappa)^{-i-1}(x_*) < (\mathrm{Id}+\kappa)^{-i}(x_*)$, $i\ge 0$. Оскільки $x_{i+1} = x_i + G_*(\theta_i,x_i) \le (\mathrm{Id}+\kappa)(x_i)$, то в силу вибору a_0 з цього випливає обмеження $x_i\le x_*$ для всіх $0\le i\le N_*$. Відповідно, нерівність (5) тягне за собою те, що $x_{N_*} = x_0+\sum_{i=0}^{N_*-1} G_*(\theta_i,x_i) \ge x_0 + \sum_{i=0}^{N_*-1} G_*(\theta_i,x_*) > x_0$. Отже, в послідовності неперервних контурів $A_i = \mathcal{F}_*^i A_0$, $i\ge 0$, де $A_0(\theta)\equiv a_0$, має місце строга нерівність $A_{N_*} > A_0$. Поклавши $L_0(\theta) = \min\limits_{0\le i\le N_*} A_i(\theta) = \min\limits_{0\le i<N_*} A_i(\theta)$, $\theta\in\mathbb{S}$, одержимо неперервний контур $L_0\le a_0$ такий, що $(\mathcal{F}_*L_0)(\theta) = \min\limits_{0\le i<N_*} A_{i+1}(\theta) = \min\limits_{0<i\le N_*} A_i(\theta) \ge L_0(\theta)$, $\theta\in\mathbb{S}$. А оскільки $G\ge G_*$, то $\mathcal{F}L_0 \ge \mathcal{F}_*L_0 \ge L_0$, отже контур L_0 шуканий.

Розглянемо послідовність $L_n = \mathcal{F}^n L_0$, $n\ge 0$, ітерацій цього контуру під дією відображення $\mathcal{F}$. В попередньому абзаці доведено, що $L_1\ge L_0$. Виходячи з рівності

$$L_{n+1}(T\theta) = L_n(\theta) + G(\theta, L_n(\theta)) \qquad (6)$$

для всіх $\theta\in\mathbb{S}$ та обмежень (2), з яких випливає неспадання функцій $\mathrm{Id}+G(\theta,\cdot)$, $\theta\in\mathbb{S}$, легко довести за індукцією, що $L_{n+1}\ge L_n$, $n\ge 0$, і до того ж усі ці контури неперервні (внаслідок неперервності $\mathcal{F}$).

Аналогічним чином будується неперервний контур U_0 такий, що $U_1 = \mathcal{F}U_0 \le U_0$. Оскільки за побудовою $L_0\le a_0$, де a_0 ми могли обрати як завгодно малим (в сенсі — близьким до $-\infty$), то можна вважати, що $L_0 < U_0$, і відповідно $L_n = \mathcal{F}^n L_0 \le \mathcal{F}^n U_0 \le U_0$, отже неспадна послідовність контурів L_n, $n\ge 0$, є обмеженою згори, а тому має поточкову границю — контур L, який внаслідок граничного переходу в (6) є розв'язком рівняння (1).

Неперервність контуру L доводиться подібно до [4,5]. Для цього розглядаємо *стрибок* функції L в точці $\theta\in\mathbb{S}$:

$$\mathrm{jmp}\, L(\theta) = \limsup_{\theta_1,\theta_2\to\theta} (L(\theta_2) - L(\theta_1)).$$

Нехай $L_{\sup} = \sup\limits_{\theta\in\mathbb{S}} L(\theta) \in\mathbb{R}$. Для будь-якого заданого $\varepsilon>0$ знайдуться $n\ge 1$ та $\theta_0\in\mathbb{S}$ такі, що $L_n(\theta_0) > L_{\sup}-\varepsilon$. Оскільки контур L_n неперервний, існує окіл $I\subset\mathbb{S}$ точки θ_0 такий, що $L_n(\theta)\ge L_{\sup}-\varepsilon$ для всіх $\theta\in I$. Таким чином, маємо $L_{\sup}-\varepsilon \le L(\theta)\le L_{\sup}$ і отже $\mathrm{jmp}\, L(\theta)\le\varepsilon$ для всіх $\theta\in I$. Для $L(\theta_2) > L(\theta_1)$ маємо $L(T\theta_2) - L(T\theta_1) = L(\theta_2) + G(\theta_2, L(\theta_2)) - L(\theta_1) - G(\theta_1, L(\theta_1)) \le L(\theta_2) - L(\theta_1) + G(\theta_2, L(\theta_2)) - G(\theta_1, L(\theta_2))$. Внаслідок неперервності G збіжність $\lim\limits_{\theta_i\to\theta} G(\theta_i,x) = G(\theta,x)$, $i\in\{1,2\}$, є рівномірною за x на обмежених проміжках. Оскільки контур L обмежений, то з цього випливає $\lim\limits_{\theta_1,\theta_2\to\theta} (G(\theta_2,L(\theta_2)) - G(\theta_1,L(\theta_2))) = 0$, а тому $\mathrm{jmp}\, L(T\theta) \le \mathrm{jmp}\, L(\theta)$, $\theta\in\mathbb{S}$. Оскільки ρ ірраціональне, множина точок $\{T^m\theta \,|\, m\ge 0, \theta\in I\}$ являє собою суцільне коло $\mathbb{S}$. Отже, $\mathrm{jmp}\, L(\theta)\le\varepsilon$ для всіх $\theta\in\mathbb{S}$. Але $\varepsilon>0$ ми взяли довільне, тому насправді $\mathrm{jmp}\, L(\theta)\equiv 0$, тобто контур L неперервний.

Теорему 1 доведено.

4. Доведення теореми 2.

Нехай f_1 та f_2 — два неперервні розв'язки рівняння (1), (2), і $d = \max_{\theta\in\mathbb{S}}(f_2(\theta)-f_1(\theta)) > 0$, а $\theta_0 \in \mathbb{S}$ — якась точка, в якій цей максимум досягається. З рівняння (1) випливає, що $f_2(T^{-1}\theta_0)+G(T^{-1}\theta_0, f_2(T^{-1}\theta_0))-f_1(T^{-1}\theta_0)-G(T^{-1}\theta_0, f_1(T^{-1}\theta_0)) = f_2(\theta_0)-f_1(\theta_0) = d > 0$, звідки з урахуванням обмежень (2) дістаємо $f_2(T^{-1}\theta_0) > f_1(T^{-1}\theta_0)$ і далі $f_2(T^{-1}\theta_0) - f_1(T^{-1}\theta_0) \geq d$, отже $f_2(T^{-1}\theta_0) - f_1(T^{-1}\theta_0) = d$. Таким чином ми показали, що якщо додатний максимум різниці $f_2 - f_1$ досягається в точці $\theta_0 \in \mathbb{S}$, то він також досягається в точці $\theta_{-1} = T^{-1}\theta_0$. За індукцією отримуємо, що $f_2(\theta_{-n}) - f_1(\theta_{-n}) = d$ для всіх $n \geq 0$, де $\theta_{-n} = T^{-n}\theta_0$. Оскільки ρ ірраціональне, траєкторія $\theta_{-n} = T^{-n}\theta_0$, $n \geq 0$, скрізь щільна в $\mathbb{S}$, тому за неперервністю f_1 та f_2 маємо рівність $f_2(\theta) - f_1(\theta) = d$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$.

Повертаючись до рівняння (1), з доведеної рівності $f_2 = f_1 + d$ дістаємо, що $G(\theta, f_1(\theta) + d) = G(\theta, f_1(\theta))$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Обмеження (2) тягнуть за собою те, що функції $G(\theta, \cdot)$ є сталими на відрізках $[f_1(\theta), f_1(\theta) + d]$, $\theta \in \mathbb{S}$, і рівняння (1) дає для них формулу $G(\theta, x) = f_1(T\theta) - f_1(\theta)$, $x \in [f_1(\theta), f_1(\theta) + d]$, $\theta \in \mathbb{S}$. З цього зокрема випливає, що функції вигляду $f_1 + c$ є розв'язками рівняння (1), (2) для всіх $0 \leq c \leq d$.

Таким чином ми довели, що будь-які неперервні розв'язки рівняння (1), (2) відрізняються на адитивну константу, до того ж якщо функції f_1 та $f_1 + d$ є розв'язками, то функція $f_1 + c$ є розв'язком для кожного $0 \leq c \leq d$. Таким чином доведено перше твердження теореми 2 (замкненість множини Ξ випливає з неперервності G).

З теореми 1 зрозуміло, що у випадку $m > 0$ або $M < 0$ множина Ξ є порожньою, а у випадку $m < 0 < M$ вона або складається з єдиної точки, або є скінченним замкненим відрізком. Якщо ж відомо лише, що $M > 0$, то згадаємо про існування точки $x_* \in \mathbb{R}$ такої, що $\int_{\mathbb{S}} G(\theta, x_*) d\mu > 0$ (вона використовувалася при доведенні теореми 1 у попередньому пункті), з якого випливає неможливість наявності в (1), (2) неперервного розв'язку, що повністю лежить нижче за x_*, бо це протирічило б рівності (4). Тому у випадку $M > 0$ множина Ξ є обмеженою знизу. Аналогічно доводиться, що при $m < 0$ множина Ξ є обмеженою згори.

Теорему 2 доведено.

5. Доведення теореми 3.

У цьому доведенні ми використовуємо загальні відомості з теорії міри, див. [7]. Нехай f_* — вимірний за μ розв'язок (1). Існує $a_0 \in \mathbb{R}$, для якого $\mu(\{\theta \mid f_*(\theta) \geq a_0\}) > 0$.

Припустимо, що $M > 0$. Тоді, як це показано в доведенні теореми 1, можна знайти неперервний контур $L_0 \leq a_0$ такий, що $\mathcal{F}L_0 \geq L_0$, а отже, вся послідовність неперервних контурів $L_n = \mathcal{F}^n L_0$, $n \geq 0$, є неспадною. Вона має поточкову границю $L : \mathbb{S} \to (-\infty, +\infty]$. Покажемо, що $f_* \geq L$ м. с. (що означає “майже скрізь на $\mathbb{S}$”).

Для цього розглянемо множину $B = \{\theta \mid f_*(\theta) \geq L_0(\theta)\} \subset \mathbb{S}$. За вибором числа a_0 маємо $\mu(B) > 0$. Множина $B_* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^n B$ вимірна і містить B, тому $\mu(B_*) > 0$. Множина $B_{**} = \bigcap_{m=0}^{+\infty} T^m B_*$ також вимірна і $\mu(B_{**}) = \lim_{m\to+\infty} \mu(T^m B_*) = \mu(B_*) > 0$, оскільки послідовність множин $T^m B_* = \bigcup_{n=m}^{+\infty} T^n B$, $m \geq 0$, є монотонно спадною, а міра μ інваріантна відносно T. Легко переконатися, що множина $B_{**} \subset \mathbb{S}$ інваріантна відносно T, тому внаслідок строгої ергодичності T маємо $\mu(B_{**}) = 1$. За змістом означення множини B_{**}, належність $\theta \in B_{**}$ означає, що $\forall m \geq 0\ \exists n \geq m : T^{-n}\theta \in B$, тобто $f_*(T^{-n}\theta) \geq L_0(T^{-n}\theta)$, а отже, $f_*(\theta) \geq L_n(\theta)$. Оскільки остання нерівність виконується для як завгодно великого n, з неї випливає, що дійсно $f_*(\theta) \geq L(\theta)$, $\theta \in B_{**}$.

У випадку $m > 0$ помітимо, що з доведеного випливає $f_* \geq L_0$ м. с. Покладемо $g_n = \min\{f_*, L_0 + n\}$, $n \geq 0$. Означена послідовність вимірних функцій є неспадною, і $g_0 = L_0$ м. с. Відповідно, послідовність функцій $G_n = G(\cdot, g_n(\cdot))$ є незростаючою і обмеженою згори м. с. неперервною функцією $G_0 = G(\cdot, L_0(\cdot))$. Маємо $\lim_{n\to+\infty} G_n(\theta) = G(\theta, f_*(\theta))$, $\theta \in \mathbb{S}$. За теоремою про інтегрування монотонної послідовності $\int\limits_{\mathbb{S}} G(\theta, f_*(\theta))d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{S}} G_n(\theta)d\mu$, і з оцінок $m \le \int\limits_{\mathbb{S}} G(\theta, \max\limits_{\tau\in\mathbb{S}} L_0(\tau) + n)d\mu \le \int\limits_{\mathbb{S}} G_n(\theta)d\mu \le \int\limits_{\mathbb{S}} G_0(\theta)d\mu < +\infty$ випливає, що $0 < m \le \int\limits_{\mathbb{S}} G(\theta, f_*(\theta))d\mu < +\infty$. Але за теоремою 1 з [6] повинно бути $\int\limits_{\mathbb{S}} G(\theta, f_*(\theta))d\mu = 0$. Отримане протиріччя доводить, що при $M \ge m > 0$ рівняння (1) не має вимірних розв'язків.

Аналогічно доводиться такий самий результат для $m \le M < 0$.

У випадку $m < 0 < M$ контур L є неперервним розв'язком (1), і аналогічно до нього можна побудувати неперервний розв'язок U такий, що $f_* \le U$ м. с. Відповідно до теореми 2 маємо $L = f_0 + C_1$, $U = f_0 + C_2$, і неперервний контур $f_0 + C$ є розв'язком для будь-якого $C \in [C_1, C_2]$. Оскільки траєкторія $\mathcal{F}$ не може перестрибнути через інваріантний контур, а T строго ергодичний, то для кожного $C \in [C_1, C_2]$ хоча б одна з нерівностей $f_* \le f_0 + C$ та $f_* \ge f_0 + C$ виконується м. с. З цього випливає, що існує $C_* \in [C_1, C_2]$ таке, що $f_* = f_0 + C_*$ м. с.

Теорему 3 доведено.

6. Прикінцеві зауваження.

Підсумовуючи, є сенс описати ситуацію в різних випадках, об'єднаних формулюваннями щойно доведених теорем. Усі наступні твердження є логічними наслідками теорем 1–3.

У випадку $m > 0$ або $M < 0$ множина Ξ порожня; усі розв'язки рівняння (1), (2) є невимірними.

У випадку $m = 0$ або $M = 0$ неперервні розв'язки підгомологічного рівняння (1), (2) можуть як існувати, так і не існувати. Крім того, можуть існувати вимірні розв'язки, які не дорівнюють майже скрізь неперервним (і навіть не є інтегровними за Лебегом). Відповідні приклади дає гомологічне рівняння (3), досліджене в [6].

Якщо ж $m < 0 < M$, то головним є випадок, коли множина Ξ складається з єдиної точки, тоді як випадок проміжку ненульової довжини є виродженим, маючи місце лише для функцій G спеціального вигляду, а саме — тоді, коли всередині смуги $\{(\theta, x) \,|\, \theta \in \mathbb{S}, x - f_0(\theta) \in \Xi\}$ рівняння (1), (2) є гомологічним, маючи вигляд (3) із $F = f_0 \circ T - f_0$.

Легко перевірити, що контури L та U з доведення теореми 1 у випадку $m < 0 < M$ є власне контурами $f_0 + \min \Xi$ та $f_0 + \max \Xi$ з теореми 2 відповідно.

Всі борелівські множини є вимірними за μ, отже теорема 3 залишатиметься вірною, якщо в її формулюванні замінити слова "вимірний за μ" словом "борелівський".

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 383 с.

2. *Teplinsky A., Condon E., Feely O.* Driven interval shift dynamics in sigma-delta modulators and phase-locked loops // IEEE Trans. Circuits and Systems. Part I. — 2005. — **52**, № 6. — P. 1224–1235.

3. *Tertinek S., Teplinsky A., Feely O.* Phase jitter dynamics of first-order digital phase-locked loops with frequency-modulated input / Proc. of International Symposium on Circuits and Systems. Seattle WA, USA, May 2008. — P. 1544–1547.

4. *Теплінський О. Ю.* Динаміка квантованого гомеоморфізму кола з квазіперіодичним збуренням // Нел. коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 235–250.

5. *Теплінський О. Ю.* Граничний абсорбуючий пояс для квазіперіодично керованого відображення зсуву відрізків // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 3. — С. 408–417.

6. *Аносов Д. В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. — 1973. — **37**, № 6. — С. 1259–1274.

7. *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. — К.: Вища школа, 1989. — 152 с.