УДК 517.926

©2010 р. Д.І. Спіжавка

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ m-ТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ (ВИПАДОК $m \geq 3$)

Доведено, що розв'язок m-точкової задачі для сингулярного еволюційного рівняння володіє властивістю локального посилення збіжності.

We prove that the solution of m-point Problem for a singularly evolution equation has the property of local strengthening of convergence.

У працях [1,2] встановлено коректну розв'язність m-точкової задачі для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевим оператором у класі крайових умов типу розподілів (у [1] досліджено випадок $m = 2$, в [2]— випадок $m \geq 3$). Розв'язок $u(t,x)$ такої задачі є гладкою за змінною x функцією, у той же час відповідну крайову умову він задовольняє в сенсі узагальнених функцій, тобто в слабкому розумінні збіжності. Природно виникає запитання: якщо гранична узагальнена функція збігається на деякій відкритій множині з гладкою функцією, то чи буде тоді відбуватися локальне посилення збіжності вказаного розв'язку (локальна рівномірна або поточкова збіжність розв'язку). У праці [1] дається позитивна відповідь на поставлене запитання у випадку двоточкової задачі. Тут досліджується вказана властивість розв'язку m-точкової задачі, де $m \geq 3$. Виділено певний клас X' крайових умов (узагальнених функцій типу розподілів), який є вужчим, ніж клас крайових умов, знайдений в [1] такий, що розв'язок m-точкової задачі з граничною функцією $\varphi \in X'$ володіє властивістю локального посилення збіжності.

1. **Простори основних та узагальнених функцій.** Нехай γ — фіксоване число з множини $(1; +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, ν — фіксоване число з множини $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots\right\}$, $\widetilde{p_0} := 2\nu + 1$, $\gamma_0 := 1 + [\gamma] + \widetilde{p_0}$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi = \left\{\varphi \in {}^{\infty}(\mathbb{R}) : \ |D_x^k \varphi(x)| \leq c_k (1 + |x|)^{-(\gamma_0 + k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+\right\}.$$

Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, \ p \in \mathbb{Z}_+;$$

при цьому Φ перетворюється в повний досконалий зліченно-нормований простір [1].

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи — основними функціями.

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена і неперервна операція узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \cdot \int_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}\right) \times$$

$$\times \sin^{2\nu} \omega d\omega, \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu + 1) / (\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2))$. За допомогою оператора T_x^ξ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначається згортка двох функцій:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi, \{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi}.$$

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція перетворення Бесселя F_{B_ν}:

$$F_{B_\nu}[\varphi](x) := \int_0^\infty \varphi(\sigma) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,\ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя. При цьому $F_{B_\nu}[\varphi]$ — парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функція, яка задовольняє умову

$$\forall s \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_s > 0 : \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} |x^s D_x^s F_{B_\nu}[\varphi](x)| \le c_s;$$

у функції $D_x^s F_{B_\nu}[\varphi](x)$, $x \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x\to\pm 0} D_x^s F_{B_\nu}[\varphi](x)$; функція $D_x^{2s} F_{B_\nu}[\varphi](x)$, $x \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, у точці $x = 0$ має усувний розрив [1]. У просторі $\overset{\circ}{\Psi} := F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{\Phi}\right]$ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм [3]:

$$\|\psi\|_p := \sup_{x\in(0;\infty)} \left\{ \sum_{s=0}^p x^{2s} |D_x^{2s}\psi(x)| \right\},$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi},\ s \in \mathbb{Z}_+.$$

Перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$, при цьому $F^{-1}_{B_\nu}$ визначається формулою

$$F^{-1}_{B_\nu}[\psi](\sigma) = c_\nu \int_0^\infty \psi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1}dx,$$

$$\psi \in \overset{\circ}{\Psi},\ c_\nu = \left(2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)\right)^{-1}.$$

Символом $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) =< f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) >\equiv< f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) >,$$
$$\varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де f_ξ позначає дію функціоналу f за змінною ξ; при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною функцією.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$< F_{B_\nu}[f], \varphi >=< f, F^{-1}_{B_\nu}[\varphi] >,\ \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_{B_\nu}[f]$ над простором $\overset{\circ}{\Psi}$.

Узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ та із співвідношення $\varphi_n \to 0$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає збіжність $f * \varphi_n \to 0$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Для перетворення Бесселя узагальнених функцій з простору $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ правильним є таке твердження [1]: якщо узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ справджується формула $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi]$. Надалі клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо символом $\left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$.

2. **Основні результати.** У праці [2] доведено, що розв'язок нелокальної багатоточкової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0,\ (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+, \quad (1)$$

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \ldots -$$
$$-\mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \quad (2)$$

де A — псевдо-Бесселевий оператор [2], $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$, μ, $\mu_1, \ldots, \mu_m > 0$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, задовольняє граничну умову (2) в слабкому сенсі (відповідні границі розглядаються у просторі $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$); при цьому розв'язок вказаної задачі подається у вигляді згортки $(\varphi * \Gamma)(t,x)$, де $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$, а $\Gamma(t,\cdot)$ — фундаментальний розв'язок m-точкової задачі (1), (2) [2]. Граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = (\varphi * \Gamma)(t,\cdot) \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} (\varphi * \Gamma)(t_i,\cdot) = u(t_i,\cdot),$$

$$t_i \in (0,T],\ i \in \{1,\ldots,m\},$$

справджуються у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, оскільки $\Gamma(t,\cdot) \longrightarrow \Gamma(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ [2]. Зокрема, звідси дістаємо, що $u(t,\cdot) \longrightarrow u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $t_i \in (0,T]$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність у співвідношенні (2) значно погіршує перший доданок; це пояснюється тим, що для функції $\Gamma(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою. Крім того, з результатів, отриманих в [2] випливає, що

$$u(t,\cdot) = (\varphi * \Gamma)(t,\cdot) \underset{t\to +0}{\longrightarrow} \varphi * \frac{\delta}{\mu-\mu_0} = \frac{\varphi}{\mu-\mu_0},$$

$$\mu_0 = \sum_{k=1}^{m} \mu_k,$$

тобто вказане граничне співвідношення справджується у просторі $\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$. Однак, при певних обмеженнях на граничну узагальнену функцію $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_*\right)'$ можна отримати локальне посилення збіжності згортки $(\varphi * \Gamma)(t,x)$ при $t \to +0$.

Символом $\left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_0\right)'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{\Phi}_0$. Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)'$, $u(t,x)$ розв'язок задачі (1), (2) з граничною функцією φ. Якщо $\varphi = 0$ на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \ldots -$$

$$-\mu_m \lim_{t\to t_m - 0} u(t,x) = 0 \qquad (3)$$

справджується рівномірно відносно x на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{Q}$.

Доведення. Передусім доведемо, що $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на відрізку $[a,b]$. Оскільки $[a,b] \subset Q$, то знайдеться відрізок $[c,d] \subset Q$, який міститиме в собі відрізок $[a,b]$. Далі побудуємо функцію $\psi \in \overset{\circ}{\Phi}$ з носієм в Q таку, що $\psi(\xi) = 1$ для $\xi \in [c,d]$, $0 \le \psi(\xi) \le 1$ для $\xi \in Q \setminus [c,d]$ (така функція існує, бо $D(\mathbb{R}) \subset \overset{\circ}{\Phi}$). Оскільки при кожному $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}$ функції $\varphi(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)$, $(1-\psi(\xi))\, T_\xi^x \Gamma(t,\xi)$ як функції ξ є елементами простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то правильною є рівність

$$u(t,x) = <\varphi_\xi, \psi(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)> +$$

$$<\varphi_\xi, \eta(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)>,$$

де $\eta = 1-\psi$. Оскільки узагальнена функція φ дорівнює нулеві в області $Q \subset \mathbb{R}$, а $supp\left(\psi(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\right) \subset Q$, то з останнього співвідношення дістаємо, що

$$u(t,x) = t^\alpha <\varphi_\xi, t^{-\alpha} \eta(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)>,$$

де $\alpha > 0$ — деякий параметр, конкретне значення якого ми вкажемо пізніше. Кожна узагальнена функція $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)' \subset \left(\overset{\circ}{\Phi}_0\right)' \subset$ $\subset \left(\overset{\circ}{\Phi}\right)'$ має нульовий порядок, тобто

$$|u(t,x)| \le t^\alpha \|\varphi\|_0 \cdot \|\Psi_{t,x}\|_0,$$

де $\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-\alpha}\eta(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)$, $\|\varphi\|_0$ — норма функціоналу φ. Отже, для доведення того, що $u(t,x) \longrightarrow 0$ при $t \to +0$ рівномірно на відрізку $[a,b] \subset Q$, досить встановити, що сукупність функцій $\Psi_{t,x}$ обмежена за нормою простору $\overset{\circ}{\Phi}_0$, тобто $\|\Psi_{t,x}\|_0 \le c_0$, причому стала c_0 не залежить від параметрів t і x, які змінюються наступним чином: $t \in (0,t_1) \subset (0,T]$, $x \in [a,b]$. Оскільки $\Psi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [c,d]$, то оцінку $\|\Psi_{t,x}\|_0 \le c_0$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [c,d]$.

Функція $\psi \in \overset{\circ}{\Phi} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overset{\circ}{\Phi}_j$, зокрема, $\psi \in \overset{\circ}{\Phi}_0$. Отже, $|\psi(\xi)| \le \widetilde{c}_0 / M(\xi)^{\gamma_0}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $|\eta(\xi)| \le \widetilde{\widetilde{c}}_0$,

$\xi \in \mathbb{R}$. Далі скористаємося нерівністю (див. [2])

$$|\Gamma(t,x)| \le c\,|\Gamma_2(t,x)|\,,\ (t,x) \in (0,t_1)\times\mathbb{R}_+,$$

де $\Gamma_2(t,\xi)$ — фундаментальний розв'язок двоточкової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0,\ (t,x)\in(0,t_1)\times\mathbb{R}_+,$$

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_0 u(t,\cdot)|_{t=t_1} = \varphi,$$

з граничною функцією $\varphi \in \left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)'$, з якої випливає, що для $t\in(0,t_1)$ справджується наступна нерівність

$$|T^x_\xi \Gamma(t,x)| = |T^x_\xi \Gamma(t,\xi)| \le \widetilde{c}\ |T^x_\xi \Gamma_2(t,\xi)|,$$

Із результатів, отриманих в [1] щодо оцінок фундаментального розв'язку двоточкової задачі випливає, що для $|x-\xi|\ \ge a_0 > 0$ правильною є нерівність

$$|T^x_\xi \Gamma_2(t,\xi)| \le \beta t^{\nu-1/2}|x-\xi|^{-\gamma_0},\ t\in(0,t_1),$$

$$\gamma_0 = [\gamma] + 2\nu + 2,$$

де стала $\beta > 0$ не залежить від t, а $\nu - 1/2 > 0$.

Якщо $\xi \in [c,d]$, $x\in[a,b]$, $[a,b]\subset[c,d]$, то $|x-\xi|\ \ge a_0$, де $a_0 = \min\{a-c, d-b\}$. Зазначимо також, що

$$\exists L > 0\ \forall x\in[a,b]\ \forall\xi\in\mathbb{R}\setminus[c,d]:$$

$$M(\xi)/|x-\xi| \le L.$$

Урахувавши ці зауваження знаходимо, що

$$M(\xi)^{\gamma_0}|\eta(\xi)|\cdot|T^x_\xi\Gamma(t,\xi)| \le \widetilde{c}\cdot\widetilde{c}_0 M(\xi)^{\gamma_0}\times$$

$$\times|T^x_\xi\Gamma_2(t,\xi)| \le \widetilde{c}_0\cdot\widetilde{c}\beta t^{\nu-1/2}\frac{M(\xi)^{\gamma_0}}{|x-\xi|^{\gamma_0}} \le \widetilde{L}\cdot t^{\nu-1/2},$$

$$\widetilde{L} = \widetilde{c}_0\widetilde{c}\beta L,\ t\in(0,t_1),\ \xi\in\mathbb{R}\setminus[c,d],\ x\in[a,b],$$

стала $\widetilde{L} > 0$ не залежить від t і x. Покладемо тепер $\alpha = \nu - 1/2$. Тоді $\|\Psi_{t,x}\|_0 \le \widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta} = \widetilde{L}\|\varphi\|_0$, стала $\widetilde{\beta}$ не залежить від t і x, а $|u(t,x)| \le \widetilde{\beta}t^{\nu-1/2}$, $\forall x\in[a,b]$. Цим доведено, що $u(t,x)\to 0$ при $t\to+0$ рівномірно по $x\in[a,b]$.

Зауважимо, що із результатів, отриманих в [2], випливає співвідношення

$$\mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,\cdot) - \ldots - \mu_m\lim_{t\to t_m-0}u(t,\cdot) = \frac{\mu_0\varphi}{\mu-\mu_0},$$

яке виконується рівномірно відносно $x\in[a,b]$. Звідси вже дістаємо, що граничне співвідношення (3) справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[a,b]\subset Q$.

Теорема доведена.

Символом $M_{\overset{\circ}{\Phi}}$ позначатимемо клас мультиплікаторів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Теорема 2. *Нехай* $\varphi\in\left(\overset{\circ}{\Phi}_{0,*}\right)'$, $u(t,x)$ *— розв'язок задачі (1), (2) з граничною функцією* φ, $Q\subset\mathbb{R}$ *— відкрита множина,* $[a,b]\subset Q$. *Якщо узагальнена функція* φ *збігається в* Q *з функцією* $g\in M_{\overset{\circ}{\Phi}}$, *то граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x) - \mu_1\lim_{t\to t_1}u(t,x) - \ldots -$$

$$-\mu_m\lim_{t\to t_m-0}u(t,x) = g(x),$$

справджується у кожній точці відрізка $[a,b]$.

Доведення. Нехай $[a,b]\subset[c,d]\subset Q$, ψ — основна функція, побудована при доведенні теореми 1. Оскільки $\psi(\varphi-g)=0$ в Q, то $\psi(\varphi-g)=0$ на $[a,b]$, $(1-\psi)\varphi=0$ на $[c,d]$ і за доведеним у теоремі 1 граничні співвідношення

$$\mu\lim_{t\to+0}<\psi(\varphi-g), T^x_\xi\Gamma(t,\xi)> = 0,$$

$$\mu\lim_{t\to+0}<(1-\psi)\varphi, T^x_\xi\Gamma(t,\xi)> = 0,$$

$$\mu_1\lim_{t\to t_1}<\psi(\varphi-g), T^x_\xi\Gamma(t,\xi)> - \ldots -$$

$$-\mu_m\lim_{t\to t_m-0}<\psi(\varphi-g), T^x_\xi\Gamma(t,\xi)> = 0,$$

$$\mu_1\lim_{t\to t_1}<(1-\psi)\varphi, T^x_\xi\Gamma(t,\xi)> - \ldots -$$

$$-\mu_m\lim_{t\to t_m-0}<(1-\psi)\varphi, T^x_\xi\Gamma(t,\xi)> = 0$$

справджуються рівномірно відносно $x\in[a,b]$. Крім того,

$$u(t,x) = (\varphi*\Gamma)(t,x) =<\varphi, T^x_\xi\Gamma(t,\xi)>=$$

$$=<\psi(\varphi-g), T_\xi^x\Gamma(t,\xi)>+$$
$$+<(1-\psi)\varphi, T_\xi^x\Gamma(t,\xi)>+<\psi g, T_\xi^x\Gamma(t,\xi)>,$$

причому

$$<\psi g, T_\xi^x\Gamma(t,\xi)>=\int\limits_0^\infty T_\xi^x\Gamma(t,\xi)\times$$
$$\times\ \psi(\xi)g(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\equiv J(t,x).$$

Урахувавши зауваження, зроблене при доведенні теореми 1, робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що $J(t,x)\longrightarrow\frac{(\psi g)(x)}{\mu-\mu_0}$ при $t\to+0$ у кожній точці $x\in[a,b]$, оскільки граничне співвідношення

$$\mu_1\lim_{t\to t_1}J(t,x)-\ldots-\mu_m\lim_{t\to t_m-0}J(t,x)=$$
$$=\frac{\mu_0}{\mu-\mu_0}(\psi g)(x),$$

виконується рівномірно відносно $x\in[a,b]$. Це пояснюється тим, що із означення згортки двох функцій у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає зображення $J(t,x)$ у вигляді наступної згортки: $J(t,x)=\Gamma(t,x)*(\psi g)(x)$. Оскільки ψg — фінітна функція з простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то її можна розуміти як фінітний функціонал, який є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}_0$. Звідси вже дістаємо, що

$$J(t,x)=\Gamma(t,x)*(\psi g)(x)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\frac{\delta}{\mu-\mu_0}*(\psi g)(x)=$$
$$=\frac{(\psi g)(x)}{\mu-\mu_0}$$

у кожній точці відрізка $[a,b]\subset Q$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В.* Двоточкова задача для одного класу еволюційних рівнянь / Василь Городецький, Олег Ленюк // Математичні студії. — 2007. — Т. 28, №2. — С. 175-182.

2. *Городецький В.В.* Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами / Василь Городецький, Дмитро Спіжавка // Доп. НАН України. — 2009. — №12. — С. 7-12.

3. *Городецький В.В.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно диференційовних функцій / Василь Городецький, Олег Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2007. — Вип. 15. — С. 51-66.