УДК 517.2

©2010 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ФЛЕТТА

Наведено узагальнення теореми Флетта.

We obtain a generalization of the Flette theorem.

Про теорему Флетта я дізнався зі спогадів В.К. Маслюченка про М.І. Нагнибіду (див. Микола Іванович Нагнибіда у спогадах, Чернівці, 2009). Ця теорема міститься також у посібнику [1] (задача 38*) і подається у вигляді.

Теорема 1. *Якщо функція f диференційовна на $[a,b]$ і $f'(a)=f'(b)$, то є така точка $c\in[a,b]$, що*

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Наводжу узагальнення цього твердження.

Теорема 2. *Нехай функції f і g диференційовні на $[a,b]$, $g'(x)\neq 0$ для всіх $x\in[a,b]$ і*

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)}. \tag{1}$$

Тоді є така точка $c\in(a,b]$, що

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(c)-f(a)}{g(c)-g(a)}. \tag{2}$$

Доведення. На підставі теореми Дарбу [2, с. 224] $g'(x)>0$ для всіх $x\in[a,b]$ або $g'(x)<0$ для всіх $x\in[a,b]$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що справджується перший випадок. Тоді функція g є строго зростаючою на $[a,b]$ і, отже, має обернену диференційовну на $[m,M]$ функцію g^{-1}, де $m=g(a)$ і $M=g(b)$ (див. [2, с. 172,196]). Використаємо неперервні функції

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{f(g^{-1}(t))-f(a)}{t-g(a)}, & \text{якщо } t\in(m,M],\\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)}, & \text{якщо } t=m,\end{cases}$$

і

$$G(t)=f(g^{-1}(t))-f(a).$$

Ці функції диференційовні на $(m,M]$ і $[m,M]$ відповідно і

$$G'(m)=G'(M)=F(m). \tag{3}$$

Якщо $G'(M)=F(M)$, то завдяки (1) і (3) твердження теореми справджується при $c=b$.

Розглянемо випадок $G'(M)\neq F(M)$. Оскільки для функції

$$H(t)=G(t)-F(M)(t-g(a)).$$

виконуються співвідношення

$$H(m)=H(M)=0 \ \text{ і } \ H'(m)=H'(M)\neq 0,$$

то

$$H(m+\varepsilon)H(M-\varepsilon)<0$$

для досить малого $\varepsilon>0$. Тому на підставі теореми Больцано–Коші [2, с. 168] існує така точка $\omega\in(m+\varepsilon,M-\varepsilon)$, що $H(\omega)=0$. Отже, $F(\omega)=F(M)$. За теоремою Ролля [2, с. 225] існує точка $\gamma\in(\omega,M)$, для якої $F'(\gamma)=0$, тобто

$$\frac{f'(g^{-1}(\gamma))}{g'(g^{-1}(\gamma))(\gamma-g(a))}=\frac{f(g^{-1}(\gamma))-f(a)}{(\gamma-g(a))^2}.$$

Звідси випливає, що справджується рівність (2), де $c=g^{-1}(\gamma)$.

Теорему 2 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нагнибіда М.І., Настасієв П.П.* Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи. – К.: Вища школа, 1981. – 224 с.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I. – М.: Наука, 1966. – 608 с.