УДК 517.95

©2010 р. Н.П. Процах

Національний лісотехнічний університет України, Львів

# МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В НЕЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

У нециліндричних областях розглянуто мішану задачу для ультрапараболічних рівнянь зі степеневими нелінійностями. Знайдено класи областей, в яких існує єдиний розв'язок мішаної задачі для вказаного типу рівнянь та отримано оцінки та поведінку розв'язку при $t \to \infty$ залежно від вихідних даних задачі.

A mixed problem for ultraparabolic equations that contain a power nonlinearities is considered in non-cylindrical domains. The classes of domains in which the problem has the unique solution are found. Some estimates and the behaviour for the solution as $t \to \infty$ depending on the initial data of the problem are found.

Розв'язність крайових задач для ультрапараболічних рівнянь в циліндричних областях вивчалася у працях [1-4]. Зокрема, у працях [2-4] встановлено умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для ультрапараболічних рівнянь зі степеневими нелінійностями в просторах Соболєва. Відкритим залишалося питання існування розв'язку мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь в нециліндричних областях.

Гіперболічні та параболічні рівняння в нециліндричних областях вивчалася в ряді робіт. Зокрема, у працях [5,6] для дослідження існування слабких розв'язків мішаних задач для вказаних типів рівнянь використано метод штрафу, в працях [7,8] – перехід до циліндричної області. Знайдені умови існування розв'язку мішаних задач залежать від типу області (як область розширюється, чи спадає зі зростанням $t$). Подібні результати також отримано в роботах [9,10]. Поряд з питанням розв'язності крайових задач для ультрапараболічних рівнянь великий інтерес представляє також поведінка їх розв'язку при $t \to \infty$. Оцінки розв'язку задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь розглянуто в [11], поведінку розв'язку при зростанні часової змінної для деяких класів нелінійних ультрапараболічних рівнянь в циліндричних областях отримано в [3,4].

У цій статті розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння в нециліндричній області. Прикладом такої області є область, яка при фіксованому $x$ містить праву криволінійну межу, задану рівнянням, і прямолінійну ліву межу. Знайдено класи областей вказаного типу, для яких існує єдиний розв'язок цієї задачі. Також для області, яка "звужується", або обмежено зростає, отримано оцінку норми розв'язку задачі при великих $t$.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^l$ – обмежені області з межею $\partial\Omega \in C^1$ та $\partial D \in C^1$ відповідно, $T$ – фіксоване число з проміжка $(0,\infty)$, $\alpha(t)$, $t \in [0,T]$, – неперервно диференційовна функція, така, що $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 0$ для всіх $t$, $D_t = \{y : \ y = \alpha(t)\cdot z, \ z \in D\}$, $x \in \Omega$, $y \in D_t$, $0 < t < T$, $Q_\tau = \{(x,y,t) : \ x \in \Omega, y \in D_t, \ 0 < t < \tau\}$, $\tau \in (0,\infty)$, $Q \equiv Q_\infty$, $G = \Omega \times D_t$.

В області $Q_T$ для довільного $T > 0$ розглянемо мішану задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \\ + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t); \quad (1)$$

$$u|_{S_T^1} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0; \quad (3)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (4)$$

де $S_T=\{(x,y,t)\colon\ x\in\Omega, y\in\partial D_t,\ 0<t<T\}$, $\Sigma_T=\{(x,y,t)\ :\ x\in\partial\Omega, y\in D_t, 0<\ t\ <T\}$ $S_T^1=\{(x,y,t)\in S_T\ :\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)<0\}$, $S_T^2=\{(x,y,t)\in S_T\ :\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)\geq 0\}$, $\nu$ – зовнішня нормаль до $S_T$.

Введемо простори $V_1(Q)=\{v:\ v\in L^q(Q)\cap L^2(Q),\ v_{x_i}, v_{y_j}, v_t\in L^2(Q),\ i\ \in\ \{1,\ldots,n\},\ j\ \in\ \{1,\ldots,l\}, v|_{S_T^1}=0,\ v|_{\Sigma_T}=0\}$ з нормою $\|v;V_1(Q)\|=\|v;L^q(Q)\|+\|v;L^2(Q)\|+\sum\limits_{j=1}^{l}\|v_{y_j};L^2(Q)\|+\sum\limits_{i=1}^{n}\|v_{x_i};L^2(Q)\|$; $V_2(Q)=\{v:\ v\in L^q(Q)\cap L^2(Q), v_{x_i}\in L^2(Q), i\in\{1,\ldots,n\}, v|_{\Sigma_T}=0\}$ з нормою $\|v;V_2(Q)\|=\|v;L^qQ)\|+\|v;L^2(Q)\|+\sum\limits_{i=1}^{n}\|v_{x_i};L^2(Q)\|$.

**Означення 1.** *Функцію $u$ з простору $V_1(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, назвемо розв'язком мішаної задачі (1) – (4), якщо вона задовольняє умову (4) та рівність*

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[u_tv+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}v+ +\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+c(x,y,t)uv+ +g(x,y,t,u)v-f(x,y,t)v\Bigg]\,dx\,dy\,dt=0 \quad (5)$$

*для всіх функцій $v\in V_2(Q_T)$.*

Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

**(A):** $a_{ij}\in L^\infty(0,T;C(\overline{G})), a_{ij}=a_{ji}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j\geq a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, $a_0$ – додатна стала;

**(Q):** число $q$ таке, що $q\in(1,\infty)$;

**(C):** $c\in L^\infty(Q_T),\ c(x,y,t)\geq c_0>0$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, $c_0$ – стала;

**(G):** $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за $(x,y,t)$ в області $Q_T$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^1$, неперервна за $\xi$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T; |g(x,y,t,\xi)|\leq g^0|\xi|^{q-1}$, $(g(x,y,t,\xi)-g(x,y,t,\eta))(\xi-\eta)\geq$ $\geq g_0|\xi-\eta|^q$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^1$, де $g_0,\ g^0$ – такі сталі, що $g^0>0$, а $g_0>0$ для $q\geq 2$ і $g_0=0$ для $q\in(1,2)$;

**(L):** $\lambda_i\in L^\infty(0,T;C(\overline{G})),\ \lambda_{iy_i}\ \in L^\infty(Q_T)$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $i\in\{1,\ldots,l\}$;

**(F):** $f\in L^2(Q_T)$;

**(U):** $u_0\in L^2(G)$.

Нехай $\tilde{Q}_T=\Omega\times D\times(0,T),\ \tilde{G}=\Omega\times D$, $\tilde{\Sigma}_T=\partial\Omega\times D\times(0,T)$, $\tilde{S}_T=\Omega\times\partial D\times(0,T)$.

Розглянемо в області $\tilde{Q}_T$ допоміжну задачу

$$w_t+\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\tilde{\lambda}_i(x,z,t)}{\alpha(t)}-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i\right)w_{z_i}- -\sum_{i,j=1}^{n}(\tilde{a}_{ij}(x,z,t)w_{x_i})_{x_j}+\tilde{c}(x,z,t)w+ +\tilde{g}(x,z,t,w)=\tilde{f}(x,z,t); \quad (6)$$

$$w|_{\tilde{S}_T^1}=0, \quad (7)$$

$$w|_{\tilde{\Sigma}_T}=0, \quad (8)$$

$$\tilde{w}(x,z,0)=u_0(x,z), \quad (9)$$

де $\tilde{S}_T^1=\{(x,z,t)\in\tilde{S}_T:\sum\limits_{i=1}^{l}\left(\frac{\tilde{\lambda}_i(x,z,t)}{\alpha(t)}-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i\right)\cos(\nu_1,z_i)<0\}$, $\tilde{S}_T^2=\{(x,z,t)\in\tilde{S}_T:\sum\limits_{i=1}^{l}\left(\frac{\tilde{\lambda}_i(x,z,t)}{\alpha(t)}-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i\right)\cos(\nu_1,z_i)\geq 0\}$, $\nu_1$ – зовнішня нормаль до $\tilde{S}_T$, коефіцієнти рівняння (6) та (1) пов'язані співвідношеннями $\tilde{\lambda}_i(x,z,t)=\lambda_i(x,\alpha(t)z,t)$, $\tilde{a}_{ij}(x,z,t)=a_i(x,\alpha(t)z,t)$, $\tilde{c}(x,z,t)=c(x,\alpha(t)z,t)$, $\tilde{g}(x,z,t,w)=g(x,\alpha(t)z,t,u(x,\alpha(t)z,t))$, $\tilde{f}(x,z,t)=f(x,\alpha(t)z,t)$.

Припускатимемо, що для функцій $\tilde{\lambda}_i$ ($i \in \{1,\dots,l\}$) виконується умова

**(S) :** Існує $\tilde{\Gamma}_1 \subset \mathbb{R}^{l-1}$ таке, що $\operatorname{mes}\tilde{\Gamma}_1 > 0$ і поверхню $\tilde{S}^1_T$ можна представити у вигляді $\tilde{S}^1_T = \Omega \times \tilde{\Gamma}_1 \times (0,T)$.

Також припустимо, що $S^1_T = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$, де $\Gamma_1 \to \tilde{\Gamma}_1$ при заміні $y = \alpha(t)z$.

Позначимо через $\tilde{\Gamma}_2 = \partial D \backslash \tilde{\Gamma}_1$, $V_2(\tilde{G}) = \{v :\ v, v_{x_i}, v_{y_j} \in L^2(\tilde{G}),\ i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,l\}|_{\tilde{\Sigma}_T} = 0, v|_{\tilde{\Gamma}_1} = 0\}$

**Означення 2.** *Функцію $w$ з простору $V_1(\tilde{Q}_T) \cap C([0,T];L^2(\tilde{G}))$, назвемо розв'язком мішаної задачі (6) – (9), якщо вона задовольняє умову (9) та рівність*

$$\int\limits_{\tilde{Q}_T}\Bigg[w_t\tilde{v} + \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\tilde{\lambda}_i(x,z,t)}{\alpha(t)} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}z_i\right)w_{z_i}\tilde{v} + \\ + \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}(x,z,t)w_{x_i}\tilde{v}_{x_j} + \tilde{c}(x,z,t)w\tilde{v} + \\ + \tilde{g}(x,z,t,w)\tilde{v} - \tilde{f}(x,z,t)\tilde{v}\Bigg]dxdzdt = 0 \quad (10)$$

*для всіх функцій $\tilde{v} \in V_2(\tilde{Q}_T)$.*

Зауважимо, що допоміжну задачу (6)–(9) розглядаємо в обмеженій циліндричній області. Доведемо умови існування єдиного розв'язку цієї задачі.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови (A), (Q), (C), (G), (L), (F), (U), ($\tilde{S}$) і, крім того,*

*1) $\alpha(t) \in C^2[0,\infty), \alpha(0) = 1$,*

*2) $\tilde{a}_{iz_j},\ \tilde{a}_{ix_i},\ \tilde{a}_{it},\ \tilde{c}_{z_j},\ \tilde{c}_t \in L^\infty(Q_T),\ \ \tilde{f}_{z_j},\ \tilde{f}_t \in L^2(\tilde{Q}_T),\ u_0 \in V_2(\tilde{G}),\ i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,l\}$;*

*3) існують такі сталі $g^1, g^2$, що для майже всіх $(x,z,t) \in Q_T$ та всіх $i \in \{1,\dots,l\}$, $\xi \in \mathbb{R}^1$ виконуються нерівності $|\tilde{g}_{z_i}(x,z,t,\xi)| \le g^1|\xi|^{q-1}$, $|\tilde{g}_t(x,z,t,\xi)| \le g^2|\xi|^{q-1}$, причому при $q > 2$ числа $g^1 = 0, g^2 = 0$;*

*4) $f|_{\tilde{S}^1_T} = 0$;*

*5) якщо $n + l > 2$, то $2 < q < \frac{2(n+l)}{n+l-2}$, в іншому випадку $1 < q < +\infty$,*

*6) $\dfrac{\tilde{\lambda}_{iz_i} - \alpha'(t)}{\alpha(t)} \in L^\infty(\tilde{Q}_T)$.*

*Тоді існує розв'язок мішаної задачі (6) – (9).*

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G), (L), (Q), (S). Тоді задача (6) – (9) не може мати більше одного розв'язку.*

*Доведення.* Доведення цих теорем можна провести подібно до теореми 1 [2].

**Зауваження 1.** Якщо функція $w$ є розв'язком задачі (6) – (9), то функція $u \equiv w(x, \frac{y}{\alpha(t)}, t)$ є розв'язком задачі (1) – (4).

Справді, в рівності (10) виконаємо заміну

$$z = \frac{y}{\alpha(t)}, \text{де } \alpha(0) = 1.$$

Тоді позначимо $w(x, \frac{y}{\alpha(t)}, t) = u(x,y,t)$, $v_1(x, \frac{y}{\alpha(t)}, t) = v_2(x,y,t)$ та $w_{z_i} = \alpha(t)u_{y_i}$, $w_t = u_t + \dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\sum\limits_{i=1}^{l} u_{y_i}y_i$, $J(z,y) = \frac{1}{(\alpha(t))^l}$, а також область $\tilde{Q} \to Q, \tilde{D} \to D, \tilde{G} \to G$. Позначивши $v = \dfrac{v_2}{(\alpha(t))^l}$, знаходимо рівність (5).

Врахувавши зауваження 1, з теорем 1, 2 отримаємо умови існування єдиного розв'язку задачі (1)–(4):

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови (A), (Q), (C), (G), (L), (F), (U), (S) тоді розв'язок задачі (1)–(4) єдиний.*

*Якщо, крім того,*

*1) $\alpha(t) \in C^2[0,\infty), \alpha(0) = 1$;*

*2) $a_{iy_j},\ a_{ix_i},\ a_{it},\ c_{y_j},\ c_t \in L^\infty(Q_T),\ \ f_{y_j},\ f_t \in L^2(Q_T),\ u_0 \in V_2(G),\ i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,l\}$;*

*3) існують такі сталі $g^1, g^2$, що для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i \in \{1,\dots,l\}$, $\xi \in \mathbb{R}^1$ виконуються нерівності $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)| \le g^1|\xi|^{q-1}$, $|g_t(x,y,t,\xi)| \le g^2|\xi|^{q-1}$, причому при $q > 2$ числа $g^1 = 0, g^2 = 0$;*

*4) $f|_{S^1_T} = 0$;*

*5) якщо $n + l > 2$, то $2 < q < \frac{2(n+l)}{n+l-2}$, в іншому випадку $1 < q < +\infty$,*

*6) $\lambda_{iy_i} - \dfrac{\alpha'}{\alpha} \in L^\infty(\tilde{Q}_T)$.*

*Тоді існує розв'язок мішаної задачі (1) – (4).*

**Зауваження 2.** Розглянемо випадок $l = 1$, для визначеності розглянемо задачу

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \\ + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t); \quad (11)$$

$$u|_{y=\alpha(t)} = 0; \qquad (12)$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0; \qquad (13)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (14)$$

де $\Sigma_T = \{(x,y,t) \colon x \in \partial\Omega, y \in \partial D_t, 0 < t < T\}$.

Тоді умови існування єдиного розв'язку задачі (11)–(14) матимуть вигляд

**Теорема** $3'$**.** *Нехай виконуються умови (A), (Q), (C), (G), (L), (F), (U), (S) та умови 1)–4) теореми 3 і, крім того,*

*1) якщо $n > 1$, то $2 < q < \frac{2(n+1)}{n-1}$, в іншому випадку $1 < q < +\infty$,*

*2) $\lambda(x,0,t) > 0$.*

*Тоді існує розв'язок задачі (11) – (14). За умов теореми 2 цей розв'язок єдиний.*

**Зауваження 3.** Умови існування єдиного розв'язку задачі (1)–(4), записані в теоремі 3, виконуються в області $Q_T$ для довільного фіксованого $T$. Тому $u \in V_{1,\mathrm{loc}}(Q) \cap C(0,\infty; L^2(G))$, де $V_{1,\mathrm{loc}}(Q) = \{v : v \in V_1(Q_T)$ для довільного $T\}$.

**Зауваження 4.** Прикладами області $D_t$, для якої виконуються умови теорем є область, в якій $D$ – обмежена область в $\mathbb{R}^l$, а для функції $\alpha$ ($\alpha \in C^2((0,T]),\ \alpha(0) = 1$) виконується одна з умов

1) $1 < \alpha(t) < \overline{\alpha},\ \ t \in [0,\infty)$, де $\overline{\alpha}$ – стала, $\alpha'$ обмежена. (Область $D_t$ "обмежено розширюється").

2) $\alpha$ може зростати, але $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ є обмеженим на $[0,+\infty)$, тобто, $\alpha(t) < Ce^t$, де $C$ – стала. (Область $D_t$ "розширюється").

3) $\alpha$ незростаюча на $[0,\infty)$ та $0 < \alpha_0 \le \alpha(t) \le 1,\ \ t \in [0,\infty)$, де $\alpha_0$ – стала. (Область $D_t$ "звужується").

4) якщо $l = 1$, то, наприклад, $0 < \alpha \le \left(\frac{1}{2} + \int\limits_0^\infty \sup\limits_{D_t \times \Omega} \lambda(x,y,t)\,dt\right)^{1/2}$.

Отримаємо поведінку розв'язку задачі (1) – (4) при $t \to \infty$.

**Лема 1.** *Нехай функція $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ – гладка функція, визначена в $Q_t$. Тоді виконується рівність*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} F(x,y,t)\,dx\,dy = \int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}\frac{d}{dt}F(x,y,t)\,dx\,dy + \frac{\alpha'}{\alpha}\int\limits_{\Gamma_t}\int\limits_{\Omega} F(x,y,t)(y,\overline{\nu})\,d\Gamma_1 \qquad (15)$$

*де $\overline{\nu}$ – $y$ - компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі $\nu$.*

*Доведення.* Виконаємо заміну змінних: $y = \alpha(t)\cdot z$ [8, с. 1088]. Тоді $dy = \alpha(t)\,dz,\ z \in D$. Якобіан переходу від змінних $(y_i,t)$ до $(z_i,t)$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial z_i} & \frac{\partial y_i}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{\partial z_i} & \frac{\partial t}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\alpha(t))^l & \alpha'(t)z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha(t))^l.$$

Тоді

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} F(x,y,t)\,dx\,dy = \frac{d}{dt}\int\limits_{D}\int\limits_{\Omega} F(x,\alpha(t)z,t)(\alpha(t))^l\,dx\,dz = \int\limits_{D}\int\limits_{\Omega} F_t(x,\alpha(t)z,t)(\alpha(t))^l\,dx\,dz + \int\limits_{D}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial F(x,\alpha(t)z,t)}{\partial y_i}\alpha'(t)z_i(\alpha(t))^l dxdz + l\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int\limits_{D}\int\limits_{\Omega} F(x,\alpha(t)z,t)(\alpha(t))^l\,dx\,dz.$$

Повертаємося до попередніх змінних

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} F(x,y,t)\,dx\,dy = \int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} F_t(x,y,t)\,dx\,dy + \int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial y_i}\frac{y_i}{\alpha(t)}\alpha'(t)\,dx\,dy + l\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} F(x,y,t)\,dx\,dy = \int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} F_t(x,y,t)\,dx\,dy +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_t}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}F(x,y,t)y_i\cos(\nu,y_i)\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\,d\Gamma-$$

$$-l\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}F(x,y,t)\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\,dx\,dy+$$

$$+l\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}F(x,y,t)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}F_t(x,y,t)\,dx\,dy+$$

$$+\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int\limits_{\Gamma_t}\int\limits_{\Omega}F(x,y,t)(y,\overline{\nu})\,d\Gamma.$$

**Зауваження 5.** Справджується формула

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}F(x,y,t)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}\frac{d}{dt}F(x,y,t)\,dx\,dy+$$

$$+\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial y_i}\frac{y_i}{\alpha(t)}\alpha'(t)\,dx\,dy+$$

$$+l\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}F(x,y,t)\,dx\,dy.$$

**Зауваження 6.** Нехай $l=1$, $0<y<\alpha(t)$, $\alpha(0)=1$. Тоді буде виконуватися формула

$$\left(\int\limits_{0}^{\alpha(t)}\int\limits_{\Omega}F(x,y,t)\,dxdy\right)_t=$$

$$=\int\limits_{0}^{\alpha(t)}\int\limits_{\Omega}F_t(x,y,t)\,dxdy+$$

$$+\int\limits_{\Omega}F(x,\alpha(t),t)\alpha'(t)\,dx$$

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теореми 3 для довільного* $T>0$ *та*

*1)* $2\operatorname*{ess\,inf}_{Q}c(x,y,t)-\operatorname*{ess\,sup}_{Q}\sum_{i=1}^{l}\lambda_{iy_i}(x,y,t)>0;$

*2) для довільної функції* $\varphi\in C^1([0;\infty))$ *такої, що* $\varphi(0)=1$, $0\le\varphi'(t)\le k\varphi(t)$, *де* $0<k<2\operatorname*{ess\,inf}_{Q}c(x,y,t)-\operatorname*{ess\,sup}_{Q}\sum_{i=1}^{l}\lambda_{iy_i}(x,y,t)$, *виконується умова*

$$\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}f^2\,dxdydt<+\infty,$$

*3)* $\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}<+\infty$ *для* $t\in[0,T]$,

*4)* $\sum_{i=1}^{l}\left(\lambda_i-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y_i\right)\cos(y_i,\nu)>0$ *на* $\Gamma_{2t}$.

*Тоді для всіх* $t>0$ *розв'язок задачі (1)–(4) задовольняє оцінку*

$$\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}u^2\,dx\,dy\le\frac{M}{\varphi(t)},$$

*де* $M$ *– стала, яка обмежує* $\int_0^\infty\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}u_0^2\,dxdy$, $\int\limits_0^\infty\varphi(t)\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}f^2\,dxdydt$, *та залежить від* $a_0$, $c_0$, $g_0$.

Доведення. Виберемо в означенні 1 $v=u\varphi(t)$, $\varphi(0)=0$ [7, с. 1295] та, використавши умови теореми 4 та лему 1, оцінимо кожен доданок рівності окремо.

$$\mathcal{I}_1\equiv\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}u_tu\varphi(t)\,dx\,dy\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}u^2\varphi(\tau)\,dxdy-\frac{1}{2}\int\limits_{D}\int\limits_{\Omega}u_0^2\,dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}2uu_{y_i}\frac{y_i\alpha'(t)}{\alpha(t)}\,dxdydt-$$

$$-\frac{l}{2}\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}u^2\varphi(t)\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\,dxdydt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}u^2\varphi'(t)\,dxdydt\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}u^2\varphi(\tau)\,dxdy-\frac{1}{2}\int\limits_{D}\int\limits_{\Omega}u_0^2\,dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\Gamma_{2\tau}} u^2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\sum_{i=1}^{l} y_i\cos(y_i,\nu)\varphi(t)\,d\Gamma-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega ku^2\varphi(t)\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_2\equiv\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}u\varphi(t)\,dx\,dy\,dt\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\Gamma_{2t}}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu)\varphi(t)\,d\Gamma-$$

$$-\frac{\lambda^1}{2}\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega|u|^2\varphi(t)\,dx\,dy\,dt,$$

де $\lambda^1=\operatorname*{ess\,sup}_Q\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_{iy}(x,y,t)$.

$$\mathcal{I}_{3,4,5}\equiv\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)|u_{x_i}|^2+$$

$$+c(x,y,t)|u|^2+g(x,y,t,u)u\Bigg]\varphi(t)dxdydt\geq$$

$$\geq\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega\Bigg[a_0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2+c_0|u|^2+$$

$$+g_0|u|^q\Bigg]\varphi(t)dxdydt;$$

$$\mathcal{I}_6\equiv-\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega f(x,y,t)u\varphi(t)\,dx\,dy\,dt\geq$$

$$\geq-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega\left[\varepsilon|u|^2-\frac{1}{\varepsilon}|f|^2\right]\varphi(t)\,dx\,dy\,dt.$$

На підставі оцінок $\mathcal{I}_1$ – $\mathcal{I}_6$ з (5) одержимо

$$\int_{D_\tau}\int_\Omega|u|^2\varphi(\tau)\,dxdy+\int_{\Gamma_{2\tau}}\sum_{i=1}^{l}\left(\lambda_i-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y_i\right)\times$$

$$\times|u|^2\cos(y_i,\nu)\varphi(t)\,d\Gamma+\int_0^\tau\int_{D_t}\int_\Omega\Bigg[(-k-\varepsilon-$$

$$-\lambda^1+2c_0)\varphi(t)u^2+2a_0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\varphi(t)+$$

$$+2g_0|u|^q\varphi(t)\Bigg]\,dx\,dy\,dt\leq\int_{D_0}\int_\Omega|u_0|^2\,dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega|f(x,y,t)|^2\varphi(t)\,dx\,dy\,dt.\qquad(16)$$

Для $0<k<-\lambda^1+2c_0$ з оцінки (16) за умови $\sum\limits_{i=1}^{l}\left(\lambda_i-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y_i\right)\cos(y_i,\nu)>0$ випливає, що

$$\int_{D_\tau}\int_\Omega|u|^2\,dxdy\leq\frac{1}{\varphi(\tau)}\int_0^1\int_\Omega|u_0|^2\,dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{\varphi(\tau)}\int_0^\tau\int_{D_\tau}\int_\Omega|f|^2\varphi(t)dxdydt\leq\frac{M_1}{\varphi(\tau)},\ (17)$$

де стала $M_1=\int\limits_{D_0}\int\limits_\Omega|u_0|^2\,dx\,dy+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_\tau}\int\limits_\Omega|f(x,y,t)|^2\varphi(t)\,dx\,dy\,dt$. Теорему доведено.

**Зауваження 7.** Замість функції $\varphi(t)$, наприклад, можна вибрати функції $e^{kt}$ або $(1+t)^k$. Тоді на нескінченності розв'язок задачі (1) – (4) спадає як $e^{-kt}$ або $(1+t)^{-k}$.

Нехай $l=1$. Розглянемо задачу для рівняння (11), крайовими умовами (12),

$$u|_{\partial\Omega\times(0,\alpha(t))\times(0,\infty)}=0\qquad(18)$$

та початковою умовою (14).

**Теорема** $4'$. *Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови теореми $3'$ і, крім того, 1) існує таке число $k$, що*

$$0<k<2\operatorname*{ess\,inf}_Q c-\operatorname*{ess\,sup}_Q\lambda_y;$$

*2) для довільної неперервно-диференційовної при $t\geq0$ функції $\varphi(t)$ такої, що $\varphi(0)=1$, $0\leq\varphi'(t)\leq k\varphi(t)$ виконується умова для функції $f$:*

$$\int_0^\infty\varphi(t)\int_0^{\alpha(t)}\int_\Omega f^2(x,y,t)\,dx\,dy\,dt<+\infty.$$

*Тоді для при всіх $t>0$ для розв'язку задачі (11), (12),(18), (14)* справджується оцінка

$$\int\limits_0^{\alpha(t)}\int\limits_\Omega u^2(x,y,t)\,dxdy\le \frac{M}{\varphi(t)},$$

де стала $M$ залежить від $f,u_0,\varphi$.

Доведення цієї теореми випливає з доведення теореми 4, де замість оцінок першого та другого доданку ($\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$) в попередній теоремі виконуються оцінки

$$\mathcal{I}_1\equiv\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\alpha(t)}\int\limits_\Omega u_tu\varphi(t)\,dx\,dy\,dt\underset{\text{зауваження 6}}{\ge}$$

$$\ge\frac12\Bigg[\int\limits_0^{\alpha(\tau)}\int\limits_\Omega u^2\varphi(t)\,dxdy-\int\limits_0^1\int\limits_\Omega u_0^2\,dxdy-$$

$$-k\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\alpha(t)}\int\limits_\Omega u^2\varphi(t)\,dx\,dy\,dt\Bigg];$$

$$\mathcal{I}_2\equiv-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\alpha(t)}\int\limits_\Omega\lambda(x,y,t)u_yu\varphi(t)\,dx\,dy\,dt\ge$$

$$\ge\frac12\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)|u|^2\varphi(t)\,dx\,dt+$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\alpha(t)}\int\limits_\Omega|u|^2\varphi(t)\,dx\,dy\,dt,$$

де $\lambda^2=\operatorname*{esssup}_{Q_t}\lambda_y$ Теорему доведено.

Розглянемо випадок $l\ge1$.

**Теорема 5.** Нехай виконуються умови теореми 3 і $1<\alpha(t)\le\overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha}=\mathrm{const}$, та $2\operatorname*{essinf}_Q c(x,y,t)-\operatorname*{esssup}_Q\sum\limits_{i=1}^l\lambda_{iy_i}(x,y,t)>0$, число $q>2$, $f\equiv0$, $u_0\not\equiv0$. Тоді для всіх $t>0$ виконується оцінка

$$\int\limits_{D_t}\int\limits_\Omega u^2\,dxdy\le\left[\frac{C}{t}\right]^{\frac{2}{q-2}},$$

де $C$ – стала, яка залежить тільки від коефіцієнтів задачі (1) – (4), чисел $n,q$ та області $Q$; якщо ж $\|u_0;L^2(G)\|\equiv0$, то $\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\|\equiv0$ для довільного $t>0$.

*Доведення.* Нехай в попередніх теоремах $\varphi(t)\equiv1$, $f\equiv0,u_0\not\equiv0$. Запишемо нерівність (16) у вигляді

$$\int\limits_{D_\tau}\int\limits_\Omega|u|^2\,dxdy+\int\limits_{\Gamma_{2\tau}}\sum_{i=1}^l\left(\lambda_i-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y_i\right)\times$$

$$\times|u|^2\cos(y_i,\nu)\,d\Gamma\le\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_\tau}\int\limits_\Omega\Bigg[(\lambda^1-2c_0)u^2-$$

$$-2a_0\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2-2g_0|u|^q\Bigg]\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\int\limits_{D_0}\int\limits_\Omega|u_0|^2\,dx\,dy. \qquad (19)$$

Нехай $g(\tau)=\left(\int\limits_{D_\tau}\int\limits_\Omega u^2\,dxdy\right)$. Функція $g(\tau)$ – спадна, інакше з (19) випливає, що $u\equiv0$. Якщо $\|u_0;L^2(G)|\equiv0$, то з (19), використавши умови теореми 5 та нерівність Гронуола-Беллмана, знайдемо, що $\|u;L^2(G)|\equiv0$.

Нехай тепер $\|u_0;L^2(G)|\not\equiv0$, тоді за умов $\sum\limits_{i=1}^l\left(\lambda_i-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y_i\right)\cos(y_i,\nu)\ge0$ на $\Gamma_{2t}$ та $\lambda^1-2c_0\le0$, за допомогою нерівності Гельдера та (19), отримаємо оцінку $g(t)\le C_3|G|^{(q-2)/q}\left(\int\limits_{D_\tau}\int\limits_\Omega|u|^q\,dxdy\right)^{2/q}\le C_4|g'(t)|^{2/q}$, де $C_4=\frac{|G|^{(q-2)/q}}{(2g_0)^{2/q}}$ за умови $|D_t|<\operatorname{mes}|D|\cdot\overline{\alpha}$, де $\alpha(t)\le\overline{\alpha}\equiv\mathrm{const}$ тобто, коли область $D_t$ зростає обмеженим чином.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо $g(t)\le\left[\frac{C}{t}\right]^{\frac{2}{q-2}}$. Теорему доведено.

**Теорема 6.** Нехай виконуються умови теореми 3, $f\equiv0$ та виконується одна з умов: 1) $1<\alpha(t)\le\overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha}=\mathrm{const}$ та $2\operatorname*{ess\,inf}_Q c(x,y,t)-\operatorname*{ess\,sup}_Q\sum\limits_{i=1}^l\lambda_{iy_i}(x,y,t)<0$, $a_0>C_1(-c_0+\frac{\operatorname*{ess\,sup}_Q\sum_{i=1}^l\lambda_{iy_i}(x,y,t)}{2})$, де

$C_1 = C_0^{2(n+2)/n}|\Omega|^{2/n}$, $C_0 = \max\left\{\frac{2(n-1)}{n}; \frac{3}{2}\right\}$, $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$; число $q > 2$;

2) $2\operatorname{ess}\inf\limits_Q c(x,y,t) - \operatorname{ess}\sup\limits_Q \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_{iy_i}(x,y,t) > 0$, число $1 < q \le 2$.

Тоді для всіх $t > 0$ виконується оцінка

$$\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} u^2\,dxdy \le (\int\limits_{D}\int\limits_{\Omega} u_0^2\,dxdy)e^{-Ct},$$

де $C$ – стала, яка залежить тільки від коефіцієнтів задачі (1) – (4). У випадку 1) $C \equiv -\operatorname{ess}\sup\limits_Q \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_{iy_i}(x,y,t) + 2c_0 + \frac{2a_0}{C_1}$, а у випадку 2) $C = 2\operatorname{esss}\inf\limits_Q c(x,y,t) - \operatorname{ess}\sup\limits_Q \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_{iy_i}(x,y,t)$ .

*Доведення.* Нехай $\lambda_y > 2c_0$. Тоді за нерівністю Пуанкаре-Фрідріхса

$$\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega} u^2\,dxdy \le C_1\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dxdy.$$

За умови $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \frac{\alpha'}{\alpha}y_i\right)\cos(y_i,\nu) > 0$ на $\Gamma_2$ з (19) одержимо

$$\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}|u|^2\,dxdy \le \int\limits_0^\tau\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}\Big[(C_1(\lambda^1 - 2c_0) - $$

$$-2a_0)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2 - 2g_0|u|^q\Big]\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\int\limits_{D_0}\int\limits_{\Omega}|u_0|^2\,dx\,dy.$$

Звідси, позначивши $g(t) = \int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}|u|^2\,dx\,dy$, за умови $C_1(\lambda^1 - 2c_0) - 2a_0 < 0$ отримаємо $\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt \le \frac{1}{C_1(-\lambda^1+2c_0)+2a_0}|g'(t)|$. Тоді за нерівністю Пуанкаре-Фрідріхса

$$g(t) \le C_1\int\limits_{D_\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \frac{C_1}{C_1(-\lambda^1+2c_0)+2a_0}|g'(t)| \equiv C_2|g'(t)|.$$

Врахувавши, що $g(t)$ спадна, знайдемо $g(t) \le -C_2 g'(t)$ та $g(t) \le g(0)e^{-\frac{1}{C_2}t}$.

Для випадку 2) за умови $\lambda^1 - 2c_0 < 0$ з (19) отримаємо $(-\lambda^1+2c_0)g(t) \le -g'(t)$. Тоді $g(t) \le g(0)e^{-M_1 t}$, де $M_1 = \lambda^1 - 2c_0$. Теорему доведено.


1. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equat.— 1998.— V. 23, № 5,6. — P. 847—868.
2. *Лавренюк С. П., Процах Н.П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією// Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 9. – С. 1192 – 1210.
3. Lavrenyuk S., Protsakh N. Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain// Tatra Mt. Math. Publ.– 2007.–V.38.– P. 131-146.
4. *Процах Н.П.* Властивості розв'язків мішаної задачі для нелінійного ультрапараболічнго рівняння// Укр. матем. журн. – 2009. Т.61, № 6.–С.795-809.
5. *Lions J.-L.* Une remarque sur les problemes d'evolution nonlineaires dans les domaines non cylindriques // Rov. Romaine Pures Appl. Math.– 1964.– V. 9. – P. 11–18.
6. *Medeiros L. A.* Non-linear wave equations in domains with variable boundary // Arch. Rational Mech. Anal. – 1972. – V. 47, № 1.– P. 47–58.
7. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А.* О разрешимости краевых задач для волнового уравнения с нелинейной диссипацией в нецилиндрических областях// Сиб. мат. журн. – 2001.– Т. 42, № 6. – С. 1278-1299.
8. *Santos M.L., Rocha M.P.C., Braga P.L.O.* Global solvability and asymptotic behaviour for a nonlinear coupled system of viscoelastic waves with memory in a noncylindrical domain//J. Math. Anal. Appl.– 2007.– V. 325. – P. 1077–1094.
9. *Алхутов Ю. А.* $L_p$ разрешимость задачи Дирихле для уравнений теплопроводности в нецилиндрических областях // Мат. сб. – 2002.– Т.193, № 9. – С.3-40.
10. *Камынин Л. И., . Масленникова В. Н.* О решении первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрических областях // Мат. сб. – 1962. –Т. 57 (99), № 2. –С. 241-264.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. –**152**.– 390p.