УДК 517.925

©2010 р. **О.В.Матвій, С.А.Пернай, І.М.Черевко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АПРОКСИМАЦІЯ НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ КВАЗІПОЛІНОМІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ЗАПІЗНЕННЯМИ

Досліджено схему підвищеної точності для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями.

A scheme of higher accuracy for approximate finding of non-asymptotic roots of quasi-polynomials for linear differential-difference equations with several delays is constructed and investigated.

Схема апроксимації диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вперше була запропонована в роботах М.М.Красовського, Ю.М.Рєпіна [1,2] при дослідженні задачі про синтез оптимального регулятора в системах із запізненням.

Узагальнення схеми апроксимації Красовського-Рєпіна у різних функціональних просторах розглянуто в працях [3-5] та інших. При цьому точність апроксимації забезпечується за рахунок збільшення розмірності апроксимуючої системи. Схема апроксимації скалярних диференціальних рівнянь із запізненням підвищеної точності досліджувалась у працях [6,7].

Метою даної роботи є поширення схеми апроксимації підвищеної точності для лінійних диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями та її застосування для побудови алгоритмів наближеного знаходження неасимптотичних коренів їх квазіполіномів.

1. Розглянемо спочатку лінійне диференціальне рівняння із двома запізненнями і сталими коефіцієнтами вигляду

$$x'(t) = A_0x(t)+A_1x(t-\tau_1)+A_2x(t-\tau_2), \quad (1)$$

де $A_0, A_1, A_2 \in R,\ 0 < \tau_1 < \tau_2 = \tau$.

Характеристичний квазіполіном рівняння (1) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = A_0 - \lambda + A_1e^{-\lambda\tau_1} + A_2e^{-\lambda\tau_2}. \quad (2)$$

Застосуємо схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь підвищеної точності [6,7] для рівняння (1). Тоді, відповідна рівнянню (1), апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{array}{l} z_0'(t) = A_0z_0(t) + A_1z_k(t) + A_2z_m(t), \\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_j''(t) + \frac{\tau}{m}z_j'(t) + z_j(t) = z_{j-1}(t), \\ j=\overline{1,m},\ m\in\mathbb{N},\ k=[\frac{m\tau_1}{\tau_2}]. \end{array} \quad (3)$$

Ввівши позначення $z_j'(t) = z_{m+j}(t),\ \ j = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau}$, запишемо систему (3) у вигляді

$$\begin{array}{l} z_0'(t) = A_0z_0(t) + A_1z_k(t) + A_2z_m(t), \\ z_i'(t) = z_{m+j}(t), \\ z_{m+j}'(t) = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t), \\ j=\overline{1,m},\ m\in\mathbb{N}. \end{array} \quad (4)$$

Лема 1. *Для характеристичного рівняння системи (4) здійснюється рівність*

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m +$$

$$+A_1(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{m-k} + A_2 = 0. \quad (5)$$

Доведення. Для знаходження аналітичного вигляду характеристичного рівняння системи (4) використаємо метод математичної індукції. Перевіримо, що при $m = 2,3$ рівність (5) справедлива.

Для $m = 2$ (для визначеності припускаємо, що $k = [\frac{2\tau_1}{\tau_2}] = 1$), безпосередньо обчислюючи, маємо:

$$D_5(\lambda) = (A_0 - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^2 +$$

$+A_1(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m})) + A_2 = 0.$

Для $m = 3$ (без втрати загальності покладемо $k = [\frac{3\tau_1}{\tau_2}] = 1$)маємо:

$$D_7(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} A_0-\lambda & A_1 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи виписаний визначник за першим рядком, одержимо

$$D_7(\lambda) = (A_0 - \lambda)\times$$

$$\times \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{k+2}A_1\times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{m+2}A_2\times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 & 0 & 0 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix}.$$

Позначивши виписані визначники через I_1^3, I_2^3, I_3^3 дістанемо характеристичне рівняння

$$D_7(\lambda) = (A_0 - \lambda)I_1^3 + (-1)^{k+2}A_1I_2^3 +$$

$$+(-1)^{m+2}A_2I_3^3 = 0. \qquad (6)$$

Обчислюючи визначники I_1^3, I_2^3, I_3^3, маємо

$I_1^3 = (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)I_1^2 = (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^3,$

$I_2^3 = -2\mu^2(\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^2,$
$I_3^3 = ((-1)^{m+2}2\mu)^3.$

Підставляючи значення I_1^3, I_2^3, I_3^3 у рівність (6) та покладаючи $\mu = \frac{m}{\tau}$, одержимо

$$D_7(\lambda) = (A_0 - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^3 +$$

$+A_1(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^2 + A_2 = 0.$

Отже, для $m = 2,3$ рівність (5) вірна. Припустимо, що для деякого $m-1$ вона вірна і доведемо, що вона справджується для m.

Виписуючи характеристичне рівняння системи (4)

$$D_{2m+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} A_0-\lambda & 0 & \dots & 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ 2\mu^2 & -2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і розкриваючи одержаний визначник за елементами першого рядка, маємо:

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0 - \lambda)I_1^m + A_1(-1)^{k+2}I_2^m +$$

$$+A_2(-1)^{m+2}I_3^m = 0. \qquad (7)$$

Для визначників I_1^m та I_2^m неважко одержати рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)I_1^{m-1}, \\ I_2^m &= ((-1)^{(m+2)+(m+1)})^k(2\mu^2)^kI_1^{m-k}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Із рекурентних співвідношень (8) одержуємо

$$\begin{aligned} I_1^m &= (\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^m, \\ I_2^m &= (-1)^{(2m+3)k}(2\mu^2)^k(\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^{m-k}. \end{aligned}$$

Обчислюючи визначник I_3^m, використавши його структуру, маємо

$$I_3^m = (-1)^{m(m+2)}(2\mu^2)^m.$$

Підставляючи значення I_1^m, I_2^m, I_3^m у рівняння (7), маємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0 - \lambda)(\lambda(2\mu + \lambda) + 2\mu^2)^m +$$

$$+A_1(-1)^{2(m+km+1)}(2\mu^2)^k(\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2)^{m-k}+$$

$$+A_2(-1)^{(m+1)(m+2)}(2\mu^2)^m = 0.$$

Зважаючи на те, що $(m+1)(m+2)$ завжди парне, а $\mu = \frac{m}{\tau}$,одержуємо

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0 - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m +$$

$$+A_1(1 + \tfrac{\lambda\tau}{m}(1 + \tfrac{\lambda\tau}{2m}))^{m-k} + A_2 = 0.$$

Лема 1 доведена.

2. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами та багатьма запізненнями вигляду

$$x'(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i x(t - \tau_i), \tag{9}$$

квазіполіном якого має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i} - \lambda, \tag{10}$$

де A_i, $i = \overline{0,n}$ – сталі, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_n = \tau$.

Відзначимо, що наближення рівняння із запізненням (9) системою звичайних диференціальних рівнянь згідно схеми Красовського-Рєпіна

$$\begin{array}{l} z_0'(t) = \sum\limits_{i=0}^{p} A_i z_{l_i}(t), \\ z_i'(t) = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \\ i = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau},\ l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}],\ m \in \mathbb{N} \end{array} \tag{11}$$

досліджено в працях [4,8].

Для характеристичного рівняння системи (11) одержано зображення

$$\Psi_m(\lambda) = (A_0 - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} A_i(1 + \frac{\lambda\tau}{m})^{m-l_i} = 0 \tag{12}$$

і показано, що корені характеристичного рівняння (12) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (10)[4].

Апроксимуюча система підвищеної точності для рівняння (9) має вигляд

$$\begin{array}{l} z_0'(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i z_{l_i}(t), \\ z_i'(t) = z_{m+j}(t), \\ z_{m+j}'(t) = 2\mu^2(z_{i-1}(t) - z_i(t)) - 2\mu z_{m+j}(t), \\ j = \overline{1,m},\ \mu = \frac{m}{\tau},\ l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}],\ m \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{13}$$

Не важко показати, аналогічно як для системи (4), що характеристичне рівняння системи (13) має вигляд

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0 - \lambda)(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^{m-l_i} = 0. \tag{14}$$

Лема 2. *Для фіксованих $\lambda \in \mathbb{N}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{D_{2m+1}(\lambda)}{(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m \in \mathbb{N} \tag{15}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (10).

Доведення. Розгляне фіксоване $\lambda \in \mathbb{Z}$. Тоді $\lambda \neq -\frac{m}{\tau} \pm \frac{m}{\tau}i$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in \mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m \in \mathbb{N}$.

Враховуючи рівність (14), маємо

$$H_m(\lambda) = (A_0-\lambda)+\sum_{i=1}^{n} A_i(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{-l_i} = 0. \tag{16}$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{\lambda\tau}{m} + \frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{\frac{-\tau_i m}{\tau}} = e^{-\lambda\tau_i}$$

та означення числа l_i одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}((A_0 - \lambda) + \sum_{i=1}^{n} A_i(1 + \frac{\lambda\tau}{m}(1 + \frac{\lambda\tau}{2m}))^{-l_i}) =$$

$= A_0 - \lambda + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i}$.

Отже, переходячи в рівності (16) до границі при $m \to \infty$, для фіксованого $\lambda \in \mathbb{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty} H_m(\lambda) = -\lambda + \sum_{i=0}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i}.$$

Лема 2 доведена.

Зауваження 1. Функція $H_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (15), апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (10). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (10). Так як нулі функцій $D_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно рівності (15), збігаються, то корені характеристичного многочлена (14) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (10).

3. Згідно результатів пункту 2 неасимптотичні корені квазіполінома лінійного рівняння із запізненням можна наближати нулями характеристичного многочлена відповідної апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. Для обчислення коренів многочленів розроблено ряд стандартних процедур у різних пакетах прикладних програм.

Зокрема в пакеті Mathcad можна виділити функцію polyroots(v), яка повертає вектор, що містить всі корені многочлена, коефіцієнти якого є елементами вектора v. При цьому не потрібно задавати початкові наближення шуканих коренів.

Розглянемо випадок диференціального рівняння з двома запізненнями (1) квазіполіном якого (2).

Характеристичне рівняння апроксимуючої системи для рівняння (1) за схемою Красовського-Рєпіна згідно (12) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) = (A_0-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau_2}{m})^m + A_1(1+\frac{\lambda\tau_2}{m})^{m-k} +$$

$+A_2 = 0$, де $k = [\frac{m\tau_1}{\tau_2}]$.

Здійснивши заміну $\lambda = \frac{m}{\tau_2}(s-1)$, дістанемо рівняння

$$s^{m+1} - \frac{\tau_2}{m}(\frac{m}{\tau_2} + A_0)s^m - A_1\frac{\tau_2}{m}s^{m-k} - A_2\frac{\tau_2}{m} = 0,$$

яке має зручний вигляд для чисельного знаходження його коренів на ЕОМ.

У випадку схеми апроксимації підвищеної точності (3) для рівняння (1) характеристичне рівняння має вигляд

$$D_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m +$$

$$+A_1(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^{m-k} + A_2 = 0. \quad (17)$$

Перепишемо рівняння (17) у вигляді

$$(A_0-\lambda)((\frac{\lambda\tau}{m}+1)^2+1)^m +$$

$$+2^k A_1((\frac{\lambda\tau}{m}+1)^2+1)^{m-k} + 2^m A_2 = 0. \quad (18)$$

Приведемо рівняння (18) до вигляду, зручного для реалізації на ЕОМ. Здійснимо в (18) заміну $\lambda = \frac{m}{\tau}(s-1)$, одержимо

$$(A_0 + \frac{m}{\tau} - \frac{m}{\tau}s)(s^2+1)^m + 2^k A_1(s^2+1)^{m-k} +$$

$+2^m A_2 = 0$.

Розкладаючи $(s^2+1)^m$ за степенями s, дістанемо рівняння

$$(A + \frac{m}{\tau} - \frac{m}{\tau}s)\sum_{i=0}^{m} C_m^i s^{2(m-i)} +$$

$$+2^k A_1 \sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j s^{2(m-k-j)} + 2^m A_2 = 0,$$

яке можна записати у стандартному вигляді

$$\alpha_0 s^{2m+1} + \alpha_1 s^{2m} + \alpha_2 s^{2m-1} + \ldots + \alpha_{2m}s +$$

$+\alpha_{2m+1} = 0$,

де $\alpha_0 = -\frac{m}{\tau}$, $\alpha_1 = A_0 + \frac{m}{\tau}$,
$\alpha_{2m} = -\frac{m}{\tau}$, $\alpha_{2m+1} = A_0 + \frac{m}{\tau} + 2^k A_1 + 2^m A_2$,
$\alpha_{2i} = -\frac{m}{\tau}C_m^i$, $i = \overline{0, m-1}$
$\alpha_{2i+1} = (A_0 + \frac{m}{\tau})C_m^i$, $i = \overline{1, k-1}$
$\alpha_{2i+1} = (A_0 + \frac{m}{\tau})C_m^i + 2^k A_1 C_{m-k}^{i-k}$,
$i = \overline{k, m-1}$.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$x'(t) = x(t) + x(t-0.5) + x(t-1) \qquad (19)$$

характеристичний квазіполіном якого має вигляд

$$\lambda = 1 + e^{-0.5\lambda} + e^{-\lambda}. \qquad (20)$$

Здійснимо апроксимацію рівняння (19) за схемою Красовського-Рєпіна і за схемою підвищеної точності. Апроксимуємо корінь квазіполінома (20) з найбільшою дійсною частиною обчислюючи його наближення відповідним коренем характеристичних многочленів апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь. Результати обчислень при різних $m (m > 3)$, наведені в Таблиці 1, де $\lambda_i^{\text{К.Р.}}$ – одержане наближення за схемою Красовського-Рєпіна, а $\lambda_i^{\text{П.Т.}}$ – наближення за схемою підвищеної точності.

Таблиця 1

m	$\lambda_1^{\text{К.Р.}}$	$\lambda_1^{\text{П.Т.}}$
4	1,7263	1,6464
10	1,6741	1,6382
18	1,6575	1,6378

Дійсний корінь квазіполінома з найбільшою дійсною частиною, знайдений методом поділу відрізка навпіл, дорівнює $\lambda = 1,6361$. Із Таблиці 1 видно, що наближення за схемою підвищеної точності є значно ефективнішими ніж наближення за схемою Красовського-Рєпіна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовський Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. — 1964. — Т. 28, №4.– С.716-725.

2. *Репин Ю.М.*О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – Т. 29, №2.– С. 226 - 245.

3. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. – 1999. – №1. –С. 42 - 50.

4. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, №2. — С. 2008 -2016.

5. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2007. — Т. 10, №3. — С. 329 - 335.

6. *Черевко І.М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. – К. :Ін-т математики АН України, 1992. – С. 74-84.

7. *L.A.Piddubna, I.M.Cherevko* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – Vol. 28, N 1. – P. 15 - 21.

8. *Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М.* Про стійкість лінійних систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66-70.