УДК 517.51, 517.98

©2010 р. В.К.Маслюченко, К.М.Фішман

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича

ДО ПИТАННЯ ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ В АНАЛІТИЧНИХ ПРОСТОРАХ У КРУЗІ

Запропоновано метод для перенесення теорем про еквівалентність матричних операторів з простору ℓ_1 на простори аналітичних функцій.

We suggest a new method for extension of theorems on the equivalence of the matrix operators from the space ℓ_1 to the spaces of analytic functions.

Запропонований в [1] метод встановлення умов лінійної еквівалентності нескінченних матриць з фінітними рядками в аналітичних просторах у крузі стає менш ефективним при переході до нижньотрикутних матриць. Метод зовсім не застосовний у випадку строго нижньотрикутних матриць у просторі $\mathfrak{A}_\infty$ цілих функцій.

У даній замітці пропонується інший підхід до встановлення еквівалентності, що базується на перенесенні ознак еквівалентності з деяких банахових просторах у аналітичні простори.

Позначимо через $\mathfrak{A}_R$ $/\overline{\mathfrak{A}}_R/$ простір аналітичних функцій у крузі $|z| < R$ $/|z| \le R/$ з загальноприйнятою топологією [2-4], а через $l(\alpha)$, $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$, $\alpha_n > 0$, – банаховий простір комплексних послідовностей $x = \{x_n\}_0^\infty$ з нормою $\|x\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|\alpha_n < \infty$.

Нехай $\mathcal{N}$ – нескінченна підмножина добутку $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, де $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Позначимо через $\mathcal{L}_\mathcal{N}$ множину нескінченних матриць $A = [a_{ij}]_0^\infty$, для яких

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad (i,j) \notin \mathcal{N}. \qquad (1)$$

Через $\mathcal{L}(X)$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних операторів у просторі X. У всіх розглянутих тут просторах $\ell(\alpha), \mathfrak{A}_R, \overline{\mathfrak{A}}_R$ матриці задають лінійні неперервні оператори в природному базисі $\{e_n\}_0^\infty$, $e_n = \{\delta_{ni}\}_{i=0}^\infty$.

Означення. Казатимемо, шо послідовність $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(R, \mathcal{N})$ $/(\overline{R}, \mathcal{N})/$, якщо для кожного $\varrho < R$ $/r > R/$ існують $r < R$ $/\varrho > R/$ і $C > 0$, такі, що

$$\frac{\varrho^i}{r^j} \le C\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \quad \text{для всіх} \quad (i,j) \in \mathcal{N}. \qquad (2)$$

Теорема 1. Для того, щоб кожна матриця $A = [a_{ij}]_0^\infty$, що належить до $\mathcal{L}_\mathcal{N} \cap \mathcal{L}(\ell(\alpha))$, належала б і до $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\mathcal{R})$, необхідно і досить, щоб послідовність $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ задовольняла умову $(R, \mathcal{N})$.

Доведення. Достатність. Нехай виконується (2) і $A \in \mathcal{L}(\ell(\alpha))$, тобто $\sup\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} < \infty$. Згідно з припущенням для кожного $\varrho < R$ при відповідних значеннях r і C будемо мати:

$$\sup_j \sum_i |a_{ij}| \frac{\varrho_i}{r^j} \le C \sup_j \sum_i |a_{ij}| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} < \infty,$$

тобто $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}_\mathcal{R})$ (див. [5]).

Необхідність. Виберемо деяку строго зростаючу послідовність $\{r_n\}_1^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$. Нехай умова (2) не виконується. Тоді існує таке значення n, що для довільних натуральних m і k існують $(i_k(m), j_k(m)) \in \mathcal{N}$, такі, що

$$\frac{r_n^{i_k(m)}}{r^{j_k(m)}} > k^3 \frac{\alpha_{i_k(m)}}{\alpha_{j_k}(m)} \quad (k, m = 1, 2, ...) \qquad (3)$$

і при цьому $(i_k(m), j_k(m)) \neq (i_{k'}(m), j_{k'}(m))$ при $k \neq k'$.

Покладемо

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \frac{\alpha_j}{\alpha_i k^2} & \text{при} \quad (i,j) = (i_k(m), j_k(m), k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

Матриці $A_m = [a_{ij}^{(m)}]_0^\infty$ належать до $\mathcal{L}_\mathcal{N}$, $|a_{ij}^{(m)}| \le \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$,

$$S_m = \sup_j \sum_i |a_{ij}^{(m)}| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \le \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} < \infty$$

і $S_m \ge 1$ для всіх m.

Розглянемо матрицю $A = [a_{ij}]_0^\infty$, де

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2 S_m} a_{ij}^{(m)}.$$

Очевидно, що $A \in \mathcal{L}_\mathcal{N}$. Маємо

$$\sup_j \sum_i |a_{ij}^{(m)}| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} =$$

$$= \sup_j \sum_i \sum_m \frac{1}{m^2 S_m} |a_{ij}^{(m)}| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} =$$

$$= \sup_j \sum_m \frac{1}{m^2 S_m} \sum_i |a_{ij}^{(m)}| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \le$$

$$\le \sup_j \sum_m \frac{1}{m^2} < \infty.$$

З другого боку, для довільного m

$$\sup_j \sum_i |a_{ij}| \frac{r_n^i}{r_m^j} \ge \sup_j \sum_i \frac{1}{m^2 S_m} |a_{ij}^{(m)}| \frac{r_n^i}{r_m^j} =$$

$$= \frac{1}{m^2 S_m} \sup_j \sum_i |a_{ij}^{(m)}| \frac{r_n^i}{r_m^j} \ge$$

$$\ge \frac{1}{m^2 S_m} a_{i_k(m), j_k(m)}^{(m)} \cdot \frac{r_n^{i_k(m)}}{r_m^{j_k(m)}} \ge \frac{k}{m^2 S_m}$$

для кожного $k = 1, 2, ...$, отже, $\sup\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}| \frac{r_n^i}{r_m^j} = +\infty$ для кожного $m = 1, 2, \ldots$. Таким чином, матриця A належить до $\mathcal{L}_\mathcal{N} \cap \mathcal{L}(\ell(\alpha))$ і не належить до $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\mathcal{R})$.

Аналогічно доводиться

Теорема 2. Для того щоб кожна матриця $A = [a_{ij}]_0^\infty$, що належить до $\mathcal{L}_\mathcal{N} \cap \mathcal{L}(\ell(\alpha))$, належала б і до $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_\mathcal{R})$, необхідно і досить, щоб α задовольняла умову $(\overline{R}, \mathcal{N})$.

Нехай $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \ge j\}$. Якщо $\left\{\frac{\varrho^i}{\alpha_i}\right\}_0^\infty$ монотонно спадає при $i \ge i_0(\varrho)$, то

$$\frac{\varrho^i}{\alpha_i} \le \frac{\varrho^j}{\alpha_j} \le \frac{r^j}{\alpha_j}$$

при $i \ge j \ge i_0(\varrho)$ і $\varrho < r < R$, отже, умова (2) виконується. Так, наприклад, у даному випадку умова (2) виконується при $\alpha_n = R^n$ або при $\alpha_n = \frac{R^n}{n^p}$, де $p > 0$, якщо $\varrho < r < R$ або $R < \varrho < r$, $(n = 1, 2, ...)$, $\alpha_0 = 1$. Цю ж умову при $R = \infty$ задовольняють послідовності $\alpha_n = n!$ і $\alpha_n = \left(\frac{n}{p}\right)^n$, де $p > 0$.

Нагадаємо, що матриці A і B еквівалентні у просторі X, якщо існує такий ізоморфізм T простору X, що $AT = TB$.

Теорема 3. Нехай $S = [s_{ik}]_0^\infty$, де $s_{ik} = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ при $i = k+1$ і $s_{ik} = 0$ при $i \ne k+1$, і $P = [p_{ik}]_0^\infty$, $p_{ik} = 0$ $(k \ge i)$, $p_{k+1,k} \ne -\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ і $\sum\limits_{i,k} |p_{ik}| \frac{\alpha_i}{\alpha_k} < \infty$. Якщо $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(R, \mathcal{N}) / (\overline{R}, \mathcal{N}) /$ з $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \ge j\}$, то сума $S + P$ еквівалентна до S у просторі $\mathfrak{A}_R$ $/\overline{\mathfrak{A}}_R/$.

Доведення. Простір $\ell(\alpha)$ ізоморфний до простору ℓ_1. Ізоморфізмом є відображення $T_\alpha : \ell(\alpha) \to \ell_1$, $T_\alpha e_i = \alpha_i e_i$. При такому ізоморфізмі матриці $A = [a_{ik}]$ в $\ell(\alpha)$ відповідає матриця $\widetilde{A} = [a_{ik} \frac{\alpha_i}{\alpha_k}]$ в ℓ_1. Нехай $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову теореми 1. Матрицям S і P відповідають в ℓ_1 матриці $\widetilde{S} = [\widetilde{s}_{ik}]$ і $\widetilde{P} = [\widetilde{p}_{ik}]$, де $\widetilde{s}_{ik} = 1$ при $i = k+1$, $\widetilde{s}_{ik} = 0$ при $i \ne k+1$, $\widetilde{p}_{ik} = 0$ при $k \ge i$, $\widetilde{p}_{k+1,k} \ne 1$ і $\sum\limits_{i,k} |\widetilde{p}_{i,k}| < \infty$. Тоді на основі одного результату Дж. Фрімена [6] $\widetilde{S} + \widetilde{P}$ і $\widetilde{S}$ еквівалентні у просторі ℓ_1, а тому $S + P$ і S еквівалентні в $\ell(\alpha)$, причому ізоморфізм T, що здійснює еквівалентність, і його обернений T^{-1} нижньотрикутні. На основі теореми 1 T і T^{-1} – це неперервні відображення в $\mathfrak{A}_R$ і $TT^{-1} = T^{-1}T = I = [\delta_{ik}]$. Друге твердження теореми доводиться аналогічно.

Теорема Фрімена була узагальнена в [7]. Цим же методом отриманий там результат може бути перенесений на аналітичні простори.

Теорема 4. Нехай $\Lambda = [\lambda_{ik}]_0^\infty$, де $\lambda_{ik} = \lambda_k$ при $i = k+1$ і $\lambda_{ik} = 0$ при $i \neq k+1$, причому $\lambda_n \neq 0$ при $n = 0,1,...,$ і $\sup\limits_{m\geq n} \prod\limits_{k=n}^{m} |\lambda_k| \ \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < \infty$. Нехай далі $P = [p_{ik}]_0^\infty$, $p_{ik} = 0$ при $k \geq j$, $p_{k+1,k} \neq -\lambda_k$ при $k = 0,1,...$ і $\sum\limits_{j>k} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda_{j-1}^{-1}| \cdot ... \cdot |\lambda_k^{-1}||p_{jk}| < \infty$. Тоді якщо $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(R,\mathcal{N})$ $/(\overline{R},\mathcal{N})/$ з $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \geq j\}$, то сума $\Lambda + P$ еквівалентна до Λ у просторі $\mathfrak{A}_R$ $/\overline{\mathfrak{A}}_R/$.

Аналогічно, спираючись на результати з [8], встановлюється

Теорема 5. Нехай $\Lambda = \text{diag}\ \{\lambda_n\}_0^\infty$ – діагональна матриця, у якої $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$ і $P = [p_{ik}]_0^\infty$ – строго нижньотрикутна матриця, що задовольняє умови:

$$a)\max\{\sup_k \sum_{j=k+1}^{\infty} m_{jk}|p_{jk}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k}, \sup_j \sum_{k=0}^{j-1} m_{jk}|p_{jk}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k},\} < \infty,$$

де $m_{j0} = \frac{1}{|\lambda_j - \lambda_0|}$,
$m_{jk} = \max\{\frac{1}{|\lambda_j-\lambda_k|}, \frac{m_{js}}{|\lambda_k-\lambda_s|m_{ks}}, \frac{m_{js}}{|\lambda_j-\lambda_k|m_{ks}}$
$(s = 0,1,...,k-1)\}$;

б) існує таке натуральне N, що

$$\max\{\sup_{k\geq N} \sum_{j=k+1}^{\infty} m_{jk}|p_{jk}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k}, \sup_{j>N} \sum_{k=0}^{j-1} m_{jk}|p_{jk}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k},\} < 1.$$

Тоді якщо $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(R,\mathcal{N})$ $/(\overline{R},\mathcal{N})/$ з $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \geq j\}$, то сума $\Lambda + P$ еквівалентна до Λ у просторі $\mathfrak{A}_R$ $/\overline{\mathfrak{A}}_R/$.

Застосовуючи двоїстість аналітичних просторів, з теорем 3-5 отримуємо відповідні результати у спряжених просторах.

Теорема 3′. Нехай $S = [s_{ki}]_0^\infty$, де $s_{ki} = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ при $i = k+1$ і $s_{ki} = 0$ при $i \neq k+1$, $P = [p_{ki}]_0^\infty$, $p_{ki} = 0$ при $(k \geq i)$, $p_{k+1,k} \neq -\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ і $\sum\limits_{i,k} |p_{ki}|\frac{\alpha_i}{\alpha_k} < \infty$. Якщо $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(\frac{1}{R},\mathcal{N})/(\overline{\frac{1}{R}},\mathcal{N})/$ з $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \geq j\}$, то сума $S + P$ еквівалентна до S у просторі $\overline{\mathfrak{A}}_R$ $/\mathfrak{A}_R/$.

Теорема 4′. Нехай $\Lambda = [\lambda_{ki}]_0^\infty$, де $\lambda_{ki} = \lambda_k$ при $i = k+1$ і $\lambda_{ki} = 0$ при $i \neq k+1$, причому $\lambda_k \neq 0$ при $k = 0,1,...,$ $\sup\limits_{m\geq n} \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \prod\limits_{k=n}^{m} |\lambda_k| < \infty$ і $P = [p_{ki}]_0^\infty$, $p_{ki} = 0$ при $k \geq i$, $p_{k+1,k} \neq -\lambda_k$ при $k = 0,1,...$ і $\sum\limits_{j>k} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda_{j-1}^{-1}| \cdot ... \cdot |\lambda_k^{-1}|\ |p_{kj}| < \infty$. Якщо $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(\frac{1}{R},\mathcal{N})$ $/(\overline{\frac{1}{R}},\mathcal{N})/$ з $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \geq j\}$, то сума $\Lambda + P$ еквівалентна до Λ у просторі $\overline{\mathfrak{A}}_R$ $/\mathfrak{A}_R/$.

Теорема 5′. Нехай $\Lambda = \text{diag}\ \{\lambda_n\}_0^\infty$ – діагональна матриця, у якої $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$ і $P = [p_{ki}]_0^\infty$ – строго верхньотрикутна матриця, що задовольняє умови:

$$a)\max\{\sup_k \sum_{j=k+1}^{\infty} m_{jk}|p_{kj}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k}, \sup_j \sum_{k=0}^{j-1} m_{jk}|p_{kj}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k},\} < \infty;$$

б) існує такий номер N, що

$$\max\{\sup_{k\geq N} \sum_{j=k+1}^{\infty} m_{jk}|p_{kj}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k}, \sup_{j>N} \sum_{k=0}^{j-1} m_{jk}|p_{kj}|\frac{\alpha_j}{\alpha_k},\} < 1.$$

Якщо $\alpha = \{\alpha_n\}_0^\infty$ задовольняє умову $(\frac{1}{R},\mathcal{N})$ $/(\overline{\frac{1}{R}},\mathcal{N})/$ з $\mathcal{N} = \{(i,j) : i \geq j\}$, то сума $\Lambda + P$ еквівалентна до Λ у просторі $\overline{\mathfrak{A}}_R$ $/\mathfrak{A}_R/$.

Приклад. Розглянемо оператори $Q : f(z) \mapsto zf(z)$ та $J : f(z) \mapsto \int\limits_0^z f(\xi)d\xi$. Доведемо, спираючись на теорему 3, що Q лінійно еквівалентний оператору $Q + \sum\limits_{\nu=2}^{m} q_\nu(z)J^\nu$ у просторі $\mathfrak{A}_R$ $/\overline{\mathfrak{A}}_R/$, якщо функції $q_\nu(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_{\nu n}z^n$ такі, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |q_{\nu n}|R^n < \infty$ $/\sum\limits_{n=0}^{\infty} |q_{\nu n}|r^n < \infty$ для деякого $r > R/$. Враховуючи позначення в теоремі 3, у випадку $\mathfrak{A}_R$ покладемо $\alpha_k = R^k (k = 0,1,...)$, тоді $s_{ik} = \frac{1}{R}$ при $i = k+1$ та $s_{ik} = 0$ при $i \neq k+1$. Для того щоб переконатися у справедливості нашого твердження, досить покласти $P = \frac{1}{R}q_\nu(z)J^\nu$. Тоді

$$p_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} 0, i < k+1, \\ \frac{q_{\nu,i-k-\nu}}{R(k+1)\cdot...\cdot(k+\nu)}, i \geq k+1. \end{array} \right.$$

При цьому $p_{k+1,1} = 0 \neq -\frac{1}{R}$ і

$$\sum_{i,k} |p_{ik}|\frac{\alpha_i}{\alpha_k} = \sum_{i,k} \frac{|q_{\nu,i-k-\nu}|R^{i-k-\nu}}{(k+1)\cdot ... \cdot(k+\nu)} =$$

$$= R^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|q_{\nu j}|R^j}{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+\nu)} \leq$$

$$\leq R^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{j=0}^{\infty}|q_{\nu j}|R^j < \infty.$$

Зауважимо, що у виразі оператора $Q + \sum_{\nu=2}^{m} q_\nu(z)J^\nu$ підсумовування, починаючи з $\nu = 2$ істотне, бо, як показано в [9] оператор Q не еквівалентний до $Q - J$ у просторі $\mathfrak{A}_R$.

Прикінцевий коментар першого співавтора. Ця стаття була написана у 1972 році і деякі з її результатів увійшли до дипломної роботи [10], що виконувалася під керівництвом К.М. Фішмана. Після її відхилення журналом «Мат. заметки» через несправедливу рецензію, вона так ніде і не була опублікована. Депонована стаття [11] постала в результаті ґрунтовної переробки цієї замітки, але туди увійшли далеко не всі подані тут результати. Благословив її появу сам К.М. Фішман, який у 1973 році прочитав її першу редакцію і зробив свої зауваження. До речі, ця перша редакція теж була відхилена на цей раз уже «Вестником Московского университета». Матеріал статті [11] увійшов до кандидатської дисертації [12], в якій є вказівка, що ідея розглянутого методу належить К.М. Фішману. Нехай же публікація цієї праці, яка є першою моєю науковою статтею, що була написана разом з моїм науковим керівником, стане світлим відблиском творчості мого незабутнього вчителя і додасться до списку його публікацій, який ще треба впорядкувати і доповнити.

Список літератури

1. *Фишман К.М.* О подобии некоторых классов строго-финитных матриц в аналитических пространствах в круге // Теория функций, функ. анализ и их прил. – 1971. – **13**. – С.112-140.
2. *Маркушевич А.И.* О базисе в пространствах аналитических функций // Мат. сборник. – 1945. – **17/59**/, №2. – С.211-252.
3. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // Journal f. reine u. angew. Math. – 1953. – **191**, №1-2. – S.30-49.
4. *Хапланов М.Г.* Некоторые свойства аналитических пространств // ДАН СССР. – 1951. – **79**, №6. – С.929-932.
5. *Фишман К.М.* К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств // ДАН СССР. – 1959. – **127**, №1. – С.40-43.
6. *Freeman J.M.* Perturbations of the shift operator // Trans. Amer. Math Soc. – 1965. – **114**, №2. – P.251-260.
7. *Гохберг И.Ц., Сойбельман О.И.* Некоторые замечания о подобии операторов // Матем. исследования АН Молд. СССР. – 1967. – **2**, в.2. – С.166-170.
8. *Сойбельман О.И.* Возмущения диагональных операторов // Матем. исследования Молд. СССР. – 1971. – **6**, в.1. – С.126-145.
9. *Фишман К.М.* О приведении к простейшему виду некоторых линейных операторов в пространстве $\mathfrak{A}_R$ // Сиб. матем. ж. – 1967. – **8**, №2. – С.687-694.
10. *Маслюченко В.К.* О подобии операторов в некоторых пространствах последовательностей (дипломная работа). – Черновцы, 1972. – 32с.
11. *Маслюченко В.К.* О подобии операторов в обобщенных пространствах Кёте. – Черновцы, 1983. – 21с. – Рукопись представлена Черновицким ун-том. Деп. в УкрНИИНТИ 25 окт. 1983г., №1203Ук – Д83.
12. *Маслюченко В.К.* Некоторые вопросы теории обобщенных пространств Кёте. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Черновцы, 1983. – 131с.