УДК 519.21, 519.217, 519.718

©2010 р. І.В. Малик, Б.В. Савчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МАКСИМАЛЬНЕ ЗАПІЗНЕННЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Дана робота присвячена асимптотичній стійкості в $l.i.m.$ стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу та пошуку максимального запізнення, яке не порушує стійкість.

The asymptotical mean square stability of solution of stochastic differential equation of neutral type is considered in the article. The search of maximal delay witch doesn't disturb stability is complete.

Метою даної роботи є дослідження максимального запізнення, при якому стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НСДРР) не змінить своїх асимптотичних властивостей. Розглянемо деякі результати, що раніше були отримані з даного питання. Для цього розглянемо детерміноване рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = (1-D)^{-1}(A+B)x(t) \qquad (1)$$

та відповіне йому диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу

$$\frac{dx(t)}{dt} - D\frac{dx(t-\tau)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad (2)$$

де D, A, B – матриці з дійсними коефіцієнтами.

Тоді вірна

Теорема 1 [5]. Нехай рівняння (1) асимптотично стійке. Тоді при $0 \le \tau < \tau_0$ розв'язок рівняння (2) асимптотично стійкий, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{min}(C)}{2l(0)\sqrt{\varphi(H)}}\left[|H(E-D)^{-1}Dl(0)| + |H(E-D)^{-1}B|\right]^{-1}, \qquad (3)$$

матриці H, C – матриці з рівняння Ляпунова

$$\left[(E-D)^{-1}(A+B)\right]^T H + H\left[(E-D)^{-1}(A+B)\right] = -C,$$

$\lambda_{min}(\bullet)$ – мінімальне власне значення матриці, $l(0) := \frac{|A|+|B|}{1-|D|}$, $\varphi(H) = \frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}$.

Розглянемо рівняння [8]:

$$dx(t) = (A_1x(t) + A_2x(t-\tau_1))dt + (B_1x(t) + B_2x(t-\tau_2))dw(t), \qquad (4)$$

де $w(t)$ – вінерів процес [7].

Теорема 2 [8]. Припустимо, що існують додатні константи q та θ такі, що

$$\lambda_1 > \lambda_2,$$

де

$$\lambda_1 := -[\lambda_{max}(A_1+A_2) + \lambda_{max}(B_1) + \theta - 1]q,$$

$$\lambda_2 := \lambda_{max}(B_2).$$

Нехай

$$\tau^* := \frac{1}{\lambda_{max}(A_1) + \lambda_{max}(A_2)} * \left(\sqrt{(\lambda_{max}(B_1-q))^2 + K} - \lambda_{max}(B_1) - \lambda_{max}(B_2)\right),$$

$$K = 2\theta(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{(\lambda_{max}(A_1) + \lambda_{max}(A_2)}{q\lambda_{max}(A_2)}.$$

Якщо $\tau_1 < \tau^*$ та $\tau_1 << \tau_2$, то тривіальний розв'язок рівняння (4) асимптотично стійкий в $l.i.m.$.

У двох попередніх твердженнях як метод доведення використовується другий метод

Ляпунова. В даній роботі скористаємось іншим методом, що в деякій мірі спрощує знаходження "максимального запізнення". Також слід звернути увагу на те що в більшості робіт по знаходженню максимального запізнення, що не змінює асимптотику розв'язку рівняння, розглядається одне, у кращому випадку – два запізнення. В цій роботі розглядається система зі скінченним числом запізнень.

На імовірнісному базисі [7] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im \equiv \{F_t := \sigma(w(s), s \le t), t \ge 0\}$ - натуральна фільтрація вінерового процесу, $F \in \lim\limits_{t\to\infty} F_t$, задано випадковий процес $x(t) := x^h(t)$, який задовольняє стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НСДРР)

$$dDx_t = Lx_t dt + Gx_t dw(t) \tag{5}$$

та початкову умову

$$x_0 = \varphi, \tag{6}$$

де

$$D\psi := \sum_{i=0}^{n} A_i \psi(-h\tau_i);\ L\psi := \sum_{i=0}^{n} B_i \psi(-h\tau_i),$$

$$G\psi := \sum_{i=0}^{n} C_i \psi(-h\tau_i), \tag{7}$$

A_i, B_i, C_i – матриці з дійсними коефіцієнтами, $A_0 = E$,

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n = 1.$$

Для задачі (5), (6) має місце терема існування та єдиності розвязку [3].

Поряд з рівнянням (5) розглянемо відповідне рівняння без запізнення, а саме

$$\tilde{A}x(t) = \tilde{B}dt + \tilde{C}dw(t), \tag{8}$$

де

$$\tilde{A} := \sum_{i=0}^{n} A_i, \tilde{B} := \sum_{i=0}^{n} B_i, \tilde{C} := \sum_{i=0}^{n} C_i.$$

Будемо припускати, що розв'язок рівняння (8) асимптотично стійкий в середньому квадратичному, а саме, справедливе твердження:

Теорема 3 [1]. Розв'язок рівняння (8) асимптотично стійкий в середньому квадратичному, якщо $\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$ – матриця Гурвіца та існує додатно визначений розв'язок $H (H = H^T > 0)$ матричного рівняння Сільвестра

$$(\tilde{A}^{-1}\tilde{B})^T H + H\tilde{A}^{-1}\tilde{B} +$$
$$+(\tilde{A}^{-1}\tilde{C})^T H \tilde{A}^{-1}\tilde{C} = -E,$$

де E – одинична матриця.

Дана умова при $h = 0$ є "початковою" в деякому сенсі.

Введемо до розгляду детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу, що відповідає (5):

$$dDx_t = Lx_t dt. \tag{9}$$

Тоді має місце

Теорема 4 [6]. Нехай розв'язок рівняння (9) асимптотично стійкий. Розв'язок рівняння (5) буде асимптотично стійким в середньому квадратичному тоді і лише тоді, коли всі власні значення матриці

$$U(h) := \int_0^\infty X_1(t;h) \otimes X_1^T(t;h) dt \tag{10}$$

менші 1 за модулем, де

$$X_1(t;h) = \sum_{i=0}^{n} C_i X(t;h),$$

$X(t;h)$ – матриця Коші для рівняння (9).

Розглянемо ще один результат, необхідний для доведення основного твердження роботи:

Лема 1 [4]. Якщо розв'язок рівняння (5) асимптотично стійкий в середньому квадратичному, то розв'язок відповідного детермінованого рівняння (9) є також асимптотично стійкий.

Слід відмітити, що даний принцип вірний для всіх лінійних систем. Підтвердження даного факту можна знайти в [1] або [4]. Хоча слід зазначити, що для нелінійних систем цей принцип не слід застосовувати, про що свідчить приклад, наведений в [4].

Сформулюємо основний результат роботи у вигляді теореми:

Теорема 5. Нехай розв'язок рівняння (8) асимптотично стійкий(випадок $h = 0$).

Тоді максимальне запізнення знаходиться з співвідношення

$$\tau_{max} = \sup_{h \in Q} h, \qquad (11)$$

де

$$Q = \{h > 0 : \lambda_{max}(U(h)) < 1\}.$$

Доведення. Введемо до розгляду множину Q_1, що містить лише ті h, при яких розв'язок рівняння (9) асимптотично стійкий.

На основі леми 1 можна зробити висновок про те, що $Q \subseteq Q_1$.

Отже, слід врховувати лише асимптотичну поведінку рівняння (5).

При зростанні запізнення (в нашому випадку при збільшенні h) можливі три випадки зміни асимптотичної поведінки розв'язку рівняння (5)[4]:

• при деякому $h_0 > 0$ розв'язок рівняння (5) стане нестійким;

• при будь-якому $h > 0$ розв'язок рівняння (5) буде асимптотично стійким;

• при жодному $h > 0$ розв'язок рівняння (5) буде нестійким.

В першому випадку буде мати місце співвідношення $Q = [0, h)$, в другому – $Q = [0, \infty)$, в третьому – $Q = \oslash$.

Отже, завжди можна вказати максимальне h.

Розглянемо по черзі всі випадки:

1. Оскільки $\exists h > 0$, для якого рівняння (5) є асимптотично нестійким, то, враховуючи неперервну залежність власних значень матриці $U(h)$ від h та $\lambda_{max}U(0) < 1$, можна вказати $0 \le h_0 \le h$, таке що $\lambda_{max}U(h_0) = 1$. Дане h_0 і буде максимальним запізненням.

2. Оскільки при кожному $h > 0$ розв'язок рівняння (5) є асимптотично стійким, то, використовуючи теорему 4, можна стверджувати що для $\forall h > 0$ $\lambda_{max}U(h) < 1$. В цьому випадку зрозуміло є те, що $h_0 = \infty$.

3. Третій випадок, так як і другий, є "критичним" в деякому розумінні. Знову таки ж використовуючи теорему 4, можна стверджувати, що для $\forall h > 0$ $\lambda_{max}U(h) < 1$.

Теорема 5 доведена.

Як приклад розглянемо рівняння

$$d(x(t) - 0.5x(t-h)) = (x(t) - 2x(t-2h))dt +$$

$$(0.5x(t) + 0.4x(t-3h))dw(t). \qquad (12)$$

При $h = 0$ рівняння (12) асимптотичне стійке в середньому квадратичному[2], оскільки $\alpha = 2 - 4 = -2 < 0$ та $\alpha + \frac{\sigma^2}{2} = -2 + 1,82 = -0.18 < 0$.

Обчисслимо $U(h)$[6]:

$$U(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{|0.5 + 0.4e^{-3his}|^2}{|is(1 - 0.5e^{-ish}) - 1 + 2e^{-2his}|^2} ds.$$

Для знаходження максимального запізнення, знайдемо h_0, для якого

$$U(h_0) = 1.$$

Дане значення h_0 буде рівним $0,046$. Тому на основі теореми 5 можна стверджувати, що розв'язок рівняння (12) при $0 \le h < 0,046$ є асимптотично стійким в середньому квадратичному.

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради д. ф.-м. наук, професору Ясинському В.К.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кореневський* Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах. – К.: Академпериодика, 2008. - 128с.

2. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика.* - Чернівці: Видавництво "Золоті литаври",2009. - 798 с.

3. *Малик І.В. Про існування і единість сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра з інтегралом Скорохода* // Математичний вісник НТШ. – 2008. – С. 135-150.

4. *Хасьминский Р.З. Устойсивость систем дифференциальных уравнений прри случайных возмущениях их параметров.* - М.:Главная редакция физико-математической литературы,1969. - 368 с.

5. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем.* - К.:Из-во Киевского университета,1997. - 236 с.

6. *Царков Є.Ф., Малик І.В.* Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доповіді НАН України. - 2008. № 7.- С. 52-57.

7. *Jacod J., Shiryaev A.N.* (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer - CityplaceVerlang, StateBerlin.

8. *Xuerong Mao, Leonid Shaikhet Delay-dependent stability criteria for stochastic diferential delay equations with Markovian switching*. Stability and Control: Theory and Application, 2000. V.3, № 2, p. 88-102.