УДК 519.217; 519.718

©2010 р. Т.О. Лукашів

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З ПАРАМЕТРИЧНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійних динамічних систем випадкової структури з параметричними збуреннями.

Necessary and sufficient conditions of the exponential stability in the mean square are obtained for solutions of linear dynamical systems of random structure with parametric perturbations.

Вступ

Дослідження на експоненціальну стійкість в середньому квадратичному за ймовірністю та з імовірністю одиниця розв'язків диференціальних рівнянь з марковськими параметрами проводилося за допомогою другого методу Ляпунова багатьма авторами. Причому це були, в основному, достатні умови стійкості в тому чи іншому розумінні.

У даній роботі розглянуто лінійне диференціальне рівняння першого порядку з марковськими параметрами, які є розв'язками автономного дифузійного стохастичного диференціального рівняння.

Для цього класу рівнянь за допомогою апарату теорії збурених лінійних операторів, розроблених Т. Като [4] і М.А. Наймарком [9], одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості розв'язку в середньому квадратичному. Також розглянуто лінійну динамічну систему випадкової структури спеціального вигляду, в якій марковський процес входить лінійно. Для цього класу рівнянь також одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості розв'язків в середньому квадратичному.

1. Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком σ -алгебр $F \equiv \{\mathrm{F}_t, t \geq s \geq 0\}$ задано дифузійний однорідний процес Маркова $\{\xi(t), t \geq 0\}$ за допомогою стохастичного дифузійного диференціального рівняння Іто (СДДІ)

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t), \qquad (1)$$

де $\xi(t) \in Y \subset R^m$, $w(t)$ - стандартний броунівський процес із значеннями в R^m [7]; $b: R^m \to R^m$; $\sigma: R^m \to L_2(R^m)$.

Будемо надалі вважати, що відображення $b(y)$ і $\sigma(y)$ неперервні за y, задовольняють умову Ліпшиця за y і умову рівномірної обмеженості за t, які гарантують існування та єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку задачі Коші $\xi(s) = y$ для всіх $s \geq 0$ і $y \in Y$ [1, 7, 11]. Цей розв'язок будемо позначати $\xi(t, s, y)$.

Марковський процес $\{\xi(t), t \geq 0\}$ визначено перехідною ймовірністю [3]

$$P_y\{\xi(t) \in A\} \equiv P\{\xi(t, 0, y) \in A\} \equiv P\{t, y, A\},$$
$$t \geq 0, \ y \in Y, \ A \in \mathcal{B}_{R^m}. \qquad (2)$$

Згідно з прийнятою термінологією [3, 7], визначимо інфінітезимальний оператор для СДДІ (1):

$$(L^y v)(y) \equiv (b(y), \nabla)v(y) + \frac{1}{2}(\sigma^2(y)\nabla, \nabla)v(y), \qquad (3)$$

де $(\circ, \circ)$ - скалярний добуток, ∇ - градієнт в R^m, відображення $v: Y \to R^1$ двічі неперервно диференційовне.

Розглянемо диференціальне рівняння з марковськими параметрами $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$, $\{\xi(t),\, t \geq 0\} \subset Y \subset R^m$ (ДРМП)

$$dx = f(x,\, \xi(t))dt, \qquad (4)$$

де відображення $f : R^n \times R^m \to R^n$ неперервне за сукупністю змінних, має неперервні рівномірно обмежені похідні за змінною $x \in R^m$ і рівномірно обмежене за змінною $y \in Y$ при $x \equiv 0$.

Тоді f задовольняє глобальну умову Ліпшиця

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C\, |x_1 - x_2| \qquad (5)$$

та умову "лінійного зростання"

$$|f(x_1, y)| \leq C(1 + |x_1|), \qquad (6)$$

для $\forall\, y \in Y$; $\{x_1, x_2\} \subset R^n$ і деякому $C > 0$.

ДРМП (4) з марковськими параметрами $\xi(t)$ розв'язку (1), назвемо лінійною динамічною системою випадкової структури [5].

В цьому випадку ДРМП (4) має єдиний розв'язок $x \in R^n$ задачі Коші з початковою умовою $x(s) = x,\, \forall\, s \geq 0$, при довільній реалізації марковського процесу $\xi(t, s, y) = y$, а пара $\{x(t),\, \xi(t),\, t \geq 0\}$ являє собою однорідний процес Маркова на фазовому просторі $R^n \times Y$ з перехідною ймовірністю [1, 7, 13]

$$P(t, x, \xi, A, B) \equiv P\{\omega : x(t, B, x, y) \in A,$$

$$\xi(t, 0, y) \in B\} \equiv P_{x,y}\{x(t) \in A;\, \xi(t) \in B\},$$

для $\forall\, t \geq 0$, $x \in R^n, y \in Y \subset R^m, A \in B_{R^n}, B \in B_{R^m}$ і слабким інфінітезимальним оператором

$$(Lv)(x, y) \equiv (f(x, y), \nabla_x)v(x, y) + (L^y v)(x, y) =$$

$$= (f(x, y), \nabla_x)v(x, y) + \; (b(y), \nabla_y)v(x, y) +$$

$$+\frac{1}{2}(\sigma^2(y)\nabla_y, \nabla_y)v(x, y), \qquad (7)$$

який визначено на двічі неперервно диференціовних за y і неперервно диференційовних за сукупністю змінних функціях $v(x, y)$, де ∇_x і ∇_y визначають градієнти відповідно за змінними $x \in R^n$ і $y \in R^m$. Тут B_{R^n}, B_{R^m} - мінімальні σ -алгебри напіввідкритих справа n- та m-паралелепіпедів.

Вимогу рівномірної обмеженості похідних $D_x f(x, y)$, $D_x g(x, y)$ для $y \in Y$ можна замінити вимогою локальної обмеженості цих похідних за $x \in R^n$ рівномірно за $y \in Y$, тобто

$$\sup_{\substack{|x| < r \\ y \in Y}} \|D_x f(x, y)\| \leq c_r;$$

$$\sup_{\substack{|x| < r \\ y \in Y}} \|D_x g(x, y)\| \leq c_r, \forall r > 0, \qquad (8)$$

а також рівномірної за $y \in Y$ обмеженості при $x \equiv 0$, тобто

$$|f(0, y)| \leq c, \forall\, y \in Y. \qquad (9)$$

Ці умови гарантують [1, 7] існування та єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку задачі Коші для ДРМП (4) лише до моменту виходу τ_r з кулі $S(x) \equiv \{z \in R^n |\, |z - x| < r\}$ при довільних початкових значеннях $x \in R^n$, $y \in Y$ і $\forall r > 0$. Нехай $\tau \equiv \lim\limits_{r \to +\infty} \tau_r$. Зауважимо, що при виконанні умов (5), (6) до моменту τ можна користуватися формулою Динкіна Є.Б. [3, 6].

Позначаючи $\tau(t) \equiv \min\{t, \tau\}$, формулу Динкіна Є.Б. можна записати у вигляді

$$\mathrm{E}_{x,y} v(x(\tau(t)), y(\tau(t))) =$$

$$= v(x, y) + E_{x,y} \int\limits_0^{\tau(t)} (Lv)(x(s), y(s))ds, \qquad (10)$$

якщо $v \in D(L)$, де $D(L)$ - область визначення інфінітезимального оператора $L(\,\circ\,)$ [3].

У згаданих означеннях стійкості тривіального розв'язку $x \equiv 0$ задачі Коші для ДРМП (4) вважаємо, що $P_{x,y}(\tau = +\infty) = 1$ для $\forall\, x \in R^n$, $\forall\, y \in Y$, а також, що виконується рівність

$$f(0, y) \equiv 0 \quad \text{для всіх} \;\; y \in Y. \qquad (11)$$

Припустимо, що ДРМП (4) має квазілінійну форму (КДРМП)

$$dx = [A(\xi(t))x + g(x, \xi(t))]\,, \qquad (12)$$

причому матриця $A(y)$ рівномірно обмежена

$$\sup_{y\in Y} \|A(y)\| = a < \infty, \tag{13}$$

а відображення $g(x,y)$ неперервне за сукупністю змінних, неперервно диференційовне за x і задовольняє умови

$$g(0,y) \equiv 0; \quad \forall\, y \in Y,$$

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ x\in S_r(v)}} \|D_x g(x,y)\| = c_r < \infty, \forall r > 0, \tag{14}$$

де D_x – похідна Фреше за $x \in R^n$. [14]

Поряд з КДРМП (14) розглянемо лінійне (ЛДРМП) вигляду

$$dz = A(\xi(t))zdt. \tag{15}$$

Можна довести наступні твердження [16].

Теорема 1. *Якщо тривіальний розв'язок $z \equiv 0$ ЛДРМП (15) асимптотично стохастично стійкий, то він експоненціально p - стійкий для будь-яких достатньо малих $p > 0$.*

Теорема 2. *Якщо тривіальний розв'язок $z \equiv 0$ лінійного ДРМП (15) асимптотично стохастично стійкий, то при виконанні вказаних вище обмежень - (11), (13), (14), і умови $\lim_{r\to 0} c_r = 0$ тривіальний розв'язок $x \equiv 0$ ДРМП (12) локально асимптотично стійкий.*

Встановимо необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в $l.i.m.$

2. Необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному лінійних динамічних систем випадкової структури

Для дослідження використаємо методи монографії Є.Ф.Царкова [15] і теорію збурених лінійних операторів [4, 9, 10].

На ймовірнісному базисі (Ω, F, P, F) розглянемо лінійну динамічну систему випадкової структури (ЛДРМП)

$$dx = A(\xi(t))xdt, \tag{16}$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = \ x \in R^n; \xi(t_0) = \ y \in Y \subset R^m, \tag{17}$$

де марковський процес $\xi(t)$ визначається СДДІ

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t) \tag{18}$$

Означення 1. *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ ЛДРМП (16), (17) назвемо експоненціально стійким в $l.i.m.$, якщо $\forall\, x \in R^n$, $y \in Y$ і $t \geq 0$ має місце нерівність*

$$E_{x,y} \left|x(t)\right|^2 \leq M \cdot e^{-\gamma t} \left|x\right|^2,$$

для деяких $M > 0$ і $\gamma > 0$.

Позначимо через $X(t,s)$ фундаментальну матрицю ЛДСВС (16), (17) [15], яка задовольняє умову $X(s,s) = I$.

Тоді нерівність із означення 1 еквівалентна нерівності [15]

$$E_y \left\|X(t,s)\right\|^2 \leq M \cdot e^{-\gamma(t-s)} \tag{19}$$

для $\forall\,[s,t] \subset [0,\infty)$.

Припустимо, що $A(y)$ неперервна за $y \in Y \subset R^m$ і нехай

$$a \equiv \sup \|A(y)\| < \infty. \tag{20}$$

Означення 2. *Визначимо простір V симетричних неперервних обмежених матричних функцій q з нормою*

$$\|q\| = \sup_{y\in Y} \left|(q(y)x,x)\right|, \tag{21}$$

де $(\circ,\circ)$ – скалярний добуток в R^2.

Виділимо в просторі V конус [8] за означенням

$$K \equiv \{q \in V/(q(y)x,x) \geq 0; \forall\; y \in Y, \forall x \in R^n\}. \tag{22}$$

При цьому конус K буде тілесним, а множина

$$\dot{K} \equiv \{q \in V/C_q \equiv \inf_{\substack{y\in Y\\ |x|=1}} (q(y)x,x) > 0\} \tag{23}$$

складається з внутрішніх точок K, причому $q \in \dot{K}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться така стала $C_q > 0$, що

$$(q(y)x,x) \geq C_q \left|x\right|^2, \tag{24}$$

для $\forall\, y \in Y$ і $\forall\, x \in R^n$.

Припустимо, що для дифузійного марковського процесу $\xi(t)$ визначено інфінітезимальний оператор (3), де зсув $b(y)$ і дифузія $\sigma(y)$ неперервні та обмежені за y і мають неперервні обмежені похідні.

Зауваження 1. *Якщо $q \in V$ має дві неперервні обмежені похідні, то $L^y q \in V$ і можна визначити оператор, пов'язаний з оператором $A(y)$ рівняння (16) [6]*

$$(Aq)(y) \equiv A^T(y)q(y) + q(y)A(y) + (L^y q)(y), \tag{25}$$

де ^{T} – знак транспонування.

Визначимо також оператори

$$(T(t)q)(y) \equiv E_y^s\{X^T(t+s,s)q(t+s)\times \times X(t+s,s)\}, \tag{26}$$

де $X(t,s)$ – фундаментальний розв'язок задачі (16), (17), $\forall t \geq 0$, $y \in Y$, число $s \geq 0$ в силу однорідності процесу може бути вибране довільним [15].

Верхній індекс при $E\{\circ\}$ або при $P\{\circ\}$ тут і надалі означає умову, що $\xi(s) = y$.

Мають місце наступні твердження [6, 15].

Теорема 3. *Множина операторів $(T(t)q)(y)$ за означенням (26) визначає сильну неперервну напівгрупу на V, яка залишає інваріантним конус K, а оператор $(Aq)(y)$, визначений за означенням (25), є генератором цієї напівгрупи [4, 14].*

Надалі будемо користуватися наступною термінологією з монографії Като Т.(див. [4]).

Означення 3. *Замкнений оператор G з щільною областю визначення віднесемо*

I) – до класу $Y(M,\beta)$, якщо $\forall\lambda > \beta$ і $\forall k \in N$ вірна нерівність

$$\left\|(G+\lambda I)^{-k}\right\| \leq M(\lambda-\beta)^k; \tag{27}$$

II) – до класу $H(\nu,0)$, якщо його резольвентна множина містить сектор $|\arg\lambda| > \frac{\pi}{2}+\nu$ при деякому $\nu > 0$ і $\forall\varepsilon > 0$,

$$\left\|(G+\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{M\varepsilon}{|\nu|} \text{ при } |\arg\lambda| \geq \frac{\pi}{2}+\nu-\varepsilon;$$

III) – до класу $H(\nu,\beta)$, якщо $G+\beta I \in H(\nu,0)$.

Означення 4. *Якщо оператор $G \in Y(M,\beta)$ є генератором напівгрупи $T(t)$ з класу C_0, то оператор $T(t)$ будемо визначати рівністю*

$$T(t) = e^{tG}. \tag{28}$$

Рівність (13) має місце, бо напівгрупу $T(t)$ можна представити у формі інтеграла Данфорда- Тейлора [4]

$$T(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} e^{\nu t}(I\nu - G)^{-1}d\nu, \tag{29}$$

де контур Γ відповідно вибрано з вищезгаданого сектора $|\arg\lambda| > \frac{\pi}{2}+\nu$.

Теорема 4. *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ ДРМП (16) – (18) експоненціально стійкий в $l.i.m$ тоді і тільки тоді, коли існують такі $q \in \overset{\bullet}{K}$ і $r \in \overset{\bullet}{K}$, що*

$$Aq = -r. \tag{30}$$

Доведення. Достатність. Нехай q і r задовольняють (30). Доведемо стійкість в $l.i.m$ ДРМП (16), що визначаються дифузійним стохастичним рівнянням (18).

Вибираємо квадратичну функцію Ляпунова у вигляді

$$v(x,y) \equiv (q(y)x,x). \tag{31}$$

Обчислимо математичне сподівання $E\{\circ\}$ на розв'язках (16), (17) з урахуванням того, що марковський процес $\xi(t)$ є розв'язком (18) з інфінітезимальним оператором $L^y v$ та оцінимо його зверху

$$E_{x,y}v(x(t),\xi(t)) = v(x,y) + \int\limits_0^t E_{x,y}(Lv)(x(s),\xi(s))ds = v(x,y) - \int\limits_0^t E_{x,y}r(x(s),\xi(s))ds \leq v(x,y) - C_r\int\limits_0^t E_{x,y}\left|x(s)\right|^2 ds \leq x$$

$$\leq v(x,y) - \frac{C_r}{\|q\|}\int\limits_0^t E_{x,y} v(x(s),\xi(s))ds, \quad (32)$$

де $C_r \equiv \inf\limits_{\substack{y\in Y\\ |x|=1}} (r(y)x,x) > 0$.

Звідки випливає нерівність

$$E_{x,y}|x(s)|^2 \leq \frac{1}{C_q} E_{x,y} v(x(t),\xi(t)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{C_q} v(x,y)\exp\left\{-\frac{C_r}{\|q\|}t\right\} \leq \frac{\|q\|}{C_q}\, e^{-\frac{C_r}{\|q\|}t}\, |x|^2,$$

де C_q визначено в означенні $\overset{\bullet}{K}$ (23), звідки випливає експоненціальна стійкість в $l.i.m.$

Необхідність. Нехай розв'язок $\{x(t),\xi(t)\}$ (16) – (18) експоненціально стійкий, тобто

$$E_{x,y}\,|x(t)|^2 \leq M e^{-\gamma t}\,|x|^2, \quad (33)$$

при деяких $M > 0$, $\gamma > 0$ і $\forall\, y \in Y$, $\forall t \geq 0$ і $\forall\, x \in R^n$.

Тоді можна записати $\forall\, T \geq 0$ нерівність

$$c_1\,|x|^2 \leq v(x,y) \equiv \int\limits_0^t E_{x,y}\,|x|^2\,dt \leq$$

$$\leq \frac{M}{\gamma}\left(I - e^{-\gamma t}\,|x|^2\right) = c_2\,|x|^2, \quad (34)$$

для деякого $c_1 > 0$.

Далі за означенням інфінітезимального оператора $(Lv)(x,y) = f(x,y)\nabla_x v(x,y) + (L^y v)(x,y)$ можна одержати нерівність

$$(Lv)(x,y) \equiv \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{x,y} v(x(\Delta),\xi(\Delta)) -$$

$$-v(x,y)] = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\int\limits_0^T E^{\Delta}_{x(\Delta),\xi(\Delta)}\,|x(t)|^2\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^T E_{x,y}\,|x(t)|^2\,dt\right] = E_{x,y}\,|x(T)|^2 -$$

$$-\,|x|^2 \leq (Me^{-\gamma T} - 1)\,|x|^2. \quad (35)$$

Виберемо $\tilde{T} \equiv (\ln M + \ln 2)/\gamma$ і тоді з (33) і (34) випливає існування такої матриці $q \in \overset{\bullet}{K}$, яку можна подати у вигляді

$$q(y) = \int\limits_0^{\tilde{T}} E_y\left\{X^T(t,0)X(t,0)\right\}dt. \quad (36)$$

Для $q(y)$, визначеного (36), виконується умова обмеженості супремума оператора $A(\circ)$ (20) з матрицею $r \in \overset{\bullet}{K}$, яку можна визначити наступним чином

$$r(y) \equiv E_y\left\{X^T(\tilde{T},0)X(\tilde{T},0)\right\} - I,$$

де I – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Необхідність доведена, а, отже, і теорема 4.

Означення 5. *Потенціалом R напівгрупи $T(t)$ назвемо оператор, який визначається з рівняння*

$$(Rq)(y) \equiv \int\limits_0^{\infty}(T(t)q)(y)dt \quad (37)$$

і будемо писати $q \in D(R)$, якщо інтеграл у (37) збігається.

Означення 6. *Резольвентою R_ν назвемо оператор, який визначається з рівняння*

$$(R_\nu q)(y) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\nu t}(T(t)q)(y)dt, \quad (38)$$

де інтеграл є збіжним рівномірно за $y \in Y$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 5. *Тривіальний розв'язок ЛДРМП (16), (17) експоненціально стійкий в l.i.m. тоді і тільки тоді, коли*

$$D(R) \supset K. \quad (39)$$

Доведення. Необхідність. Нехай виконується умова експоненціальної стійкості в $l.i.m.$ (33), тоді інтеграл у (37) є збіжним $\forall\, q \in V \supset K$, бо

$$\|T(t)q\| \equiv \sup_{\substack{y\,\in\, Y,\\ |x|=1}} E_{x,y}\,|x(t)|^2.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $D(R) \supset K$. Встановимо, що напівплощина $\{\nu \in C\,|Re\nu \geq 0\}$ належить резольвентній множині оператора A. Дійсно, для $\forall q \in K$, $\forall t \geq 0$, $\lambda \in R_+$, $\forall x \in R^n$ та $y \in Y$ можна записати

$$e^{-\lambda t}(T(t)q(t)x,x) \geq (T(t)q(y)x,x). \qquad (40)$$

Зауважимо, що довільний елемент $q \in V$ можна записати у вигляді $q = q_1 - q_2$, де $\{q_1, -q_2\} \subset K$, бо конус K є відтворюючим [8]; тоді нерівність (40) має місце $\forall x \in V$. Визначимо $r \in V$ рівнянням

$$(r(y)x,x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t)q(y)x,x)dt, \qquad (41)$$

$\lambda \in R_+$.

Легко встановити [4, 15], що $r(y)$ задовольняє рівняння

$$Ar - \lambda r = -q,$$

тобто $D(A) \supset R$. А згідно з [8] матимемо

$$D(A) \supset \{\lambda \in C\,|Re\lambda \geq 0\}.$$

Оскільки оператор A є сумою оператора L^ξ класу $H(\nu,0)$ [8] і обмеженого оператора A_0, який визначено формулою

$$(A_0 q)(y) = A^T(y)q(y) + q(y)A(y),$$

то тип напівгрупи $T(t)$ є від'ємним. Отже, для розв'язку $x(t)$ виконується (33). Достатність доведено. Теорема 5 доведена.

Теорема 6. *Тривіальний розв'язок (1), (2) експоненціально стійкий в l.i.m. тоді і тільки тоді, коли існує таке* $q \in \overset{\bullet}{K}$, *що*

$$Aq = -I, \qquad (42)$$

де I *– одинична* $n \times n$*-матриця.*

Доведення.

Достатність. Оскільки $I \in R^n$ і $q \in \overset{\bullet}{K}$, то з (42) за теоремою 5 випливає стійкість в $l.i.m.$

Необхідність. Нехай розв'язок $x(t)$ експоненціально стійкий в $l.i.m.$, тобто виконується (33). Доведемо існування $q \in \overset{\bullet}{K}$, яке подамо у вигляді

$$q(y) = \int\limits_0^\infty E_y\left\{X^T(t,0)X(t,0)\right\}dt.$$

Належність $q \in \overset{\bullet}{K}$ випливає з теореми 5. А за означенням напівгрупи $T(t)$ матимемо, що

$$q(y) = \int\limits_0^\infty E_y\left\{X^T(t,0)IX(t,0)\right\}dt =$$

$$= \int\limits_0^{t^*}(T(t)I)(y)dt \equiv (RI)(y), \qquad (43)$$

де $t^* > 0$ є деяким моментом часу. Тоді за означенням $q = RI$ (що випливає з (43)) є розв'язком операторного рівняння (42). Теорема 6 доведена.

3. Необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в $l.i.m.$ **лінійних динамічних систем випадкової структури спеціального вигляду**

Розглянемо лінійну динамічну систему випадкової структури (ЛДСВС) вигляду

$$dx(t) = [A + \gamma\xi(t)B]\,x(t)dt, \qquad (44)$$

де γ – дійсне число, $x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^n$; A, B – матриці з дійсними елементами розмірності $n \times n$; $\xi(t) \in R^1$ – дифузійний марковський процес, що визначається скалярним СДР

$$d\xi(t) = -2\xi(t)dt + \sqrt{2}dw(t). \qquad (45)$$

Зауважимо, що лінійне СДР (45) має єдиний стаціонарний розв'язок $\tilde{\xi}(t)$ зі щільністю e^{-y^2} [13]. Процесу $\xi(t)$ відповідає інфінітезимальний оператор [13]

$$L^y = -2y\frac{d}{dy} + \frac{d^2}{dy^2}, \qquad (46)$$

з яким надалі будемо оперувати у просторі L_2 функцій із скалярним добутком

$$(h,g) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}h(y)g(y)dy. \qquad (47)$$

Зауваження 2. *Оператор L^y в цьому просторі має компактну резольвенту і простий спектр $\sigma(L^y) = \{-2(n-1), n \in N\}$.*

Це можна перевірити, якщо використати базис в L_2 з нормованих поліномів Ерміта [14]

$$f_{n-1}(y) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} e^{y^2} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} e^{-y^2},$$

$$n \in N.$$

Далі слід продовжити оператор L^y на простір симетрично-матричнозначних функцій V_2 із скалярним добутком

$$< g, p >\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} Sp(q(y)p(y)e^{-y^2})dy. \tag{48}$$

Визначимо наступні оператори

$$(A_0 q(y)) \equiv A^T q(y) + q(y)A; \tag{49}$$

$$(B_0 q(y)) \equiv B^T q(y) + q(y)B; \tag{50}$$

$$(\Phi q)(y) = yq(y). \tag{51}$$

Нехай $\tilde{L}_2 \subset L_2$ є множиною, для яких

$$\lim_{t\to 0} E_y g(\xi(t)) = g(y), \quad \forall y \in R.$$

Оператор L^y визначає на $\tilde{L}_2$ напівгрупу

$$(S(t)g)(y) = E_y g(\xi(t))$$

класу C_0, бо у формулі

$$\|S(t)g - g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_y g(\xi(t)) - g(t)|^2 e^{-y^2} dy,$$

підінтегральний вираз обмежено функцією, а саме:

$$|E_y g(\xi(t)) + g(t)|^2 \le 2(E_y |g(\xi(t))|^2 + |g(t)|^2).$$

Зауважимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_y |g(\xi(t))|^2 e^{-y^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-y^2} dy.$$

Продовжимо цю напівгрупу $S(t)$ на $\tilde{V}_2$ матричних функцій, які задовольняють умову

$$\lim_{t\to 0} E_y q(\xi(t)) = q(y), \quad \forall y \in R.$$

Розглянемо оператор

$$L \equiv A_0 + \gamma \Phi B_0 + L^y, \text{ де } \gamma \ge 0. \tag{52}$$

При $\gamma = 0$ оператор L можна розглядати як тензорний добуток операторів з простору $\tilde{L}_2 \otimes \tilde{M}_n(R)$, де $\tilde{M}_n(R)$ – простір симетричних $n \times n$ матриць.

Оператор L заданий на елементах вигляду $q(y) = g(y)q_0$ (де $g \in \tilde{L}_2$, $q_0 \in \tilde{M}_n(R)$ формулою

$$Lq(y) = (A_0 + L^y)\Phi(y) = A_0 q_0 q(y) + q_0 (L^y q)(y),$$

причому оператор ΦB_0, як тензорний добуток, задано формулою [2, 10]

$$(\Phi B_0)q(y) = yg(y) \cdot B_0 q_0.$$

Зауважимо, що оператори A_0 і B_0 обмежені. Областю визначення оператора L^y є двічі неперервно диференційовні функції або матричні функції, сумовні з квадратом, які мають дві сумовні з квадратом похідні з вагою e^{-y^2}.

За матрицею Коші $X(t,s)$ рівняння (44), де $\xi(t)$ визначено (45), введемо оператор $T(t)$ наступним чином

$$(T(t)q)(y) \equiv E_{s,y}\{X^T(t+s,s) \times$$

$$\times q(\xi(t+s))X(t+s,s)\}, \quad q \in V, \tag{53}$$

де $E\{\circ\}$ існує [13], бо $\xi(t)$ є гауссовим процесом із сталою дисперсією і експоненціально спадною кореляційною функцією.

Теорема 7. *Оператор L (див. (52)) при достатньо малому за модулем γ виступає як генератор на V_2 напівгрупи класу (C_0), яка визначена (53), причому спектр $\sigma(L) = P_\sigma(L)$, а кожне власне значення цього спектру має скінченну кратність, де P - проектор спектра σ.*

Доведення.

Оператор A_0 (6) має дискретний спектр [4], який визначено рівністю

$$\sigma(A_0 + L^y) \equiv \{\lambda + \mu / \lambda \in \sigma(A_0), \, \mu \in \sigma(L^y)\} \tag{54}$$

Доведемо обмеженість оператора ΦB, тобто знайдуться сталі c_1 і c_2 такі, що виконується нерівність

$$\|\Phi q B q\| \leq c_1 \|q\| + c_2 \|L^y q\|.$$

Зауважимо, що в силу обмеженості оператора B достатньо встановити нерівність [2, 4, 8]

$$\|\Phi q\| \leq c_1 \|q\| + c_2 \|L^y q\|, \qquad (55)$$

для $q \in D(L^y) \subset L_2$.

Дійсно,

$$\|\Phi q\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_2 \|q(y)\|^2 e^{-y^2} dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y q'(y) q(y) e^{-y^2} dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (q(y))^2 e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2} \|\Phi q\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (q'(y))^2 e^{-y^2} dy + \|q\|^2.$$

Отже,

$$\|\Phi q\|^2 \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (q'(y))^2 e^{-y^2} dy + \|q\|^2 =$$

$$= 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q'(y) y q(y) e^{-y^2} dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q''(y) q(y) e^{-y^2} dy +$$

$$+ \|q\|^2 = \|q\|^2 + < -L^y q, q > \leq \frac{1}{2} \|L^y q\|^2 + \frac{3}{2} \|q\|^2$$

і нерівність (55) доведена, якщо вибрати відповідно $c_1 = \frac{3}{2}$; $c_2 = \frac{1}{2}$.

Звідси [4], враховуючи, що при достатньо малих за модулем γ оператор $L^y \in H(\nu, \beta)$, оператор L (52) також належить класу $H(\nu^*, \beta^*)$ при деяких ν^*, β^*. Зауважимо, що спектр $\sigma(L^y + A_0 + \gamma \Phi B)$ складається лише з власних значень при малих за модулем γ, бо цією властивістю володіє спектр $\sigma(L^y + A_0)$. При цьому точки спектра $\sigma(L) \equiv \sigma(L^y + A_0 + \gamma \Phi B)$ розташовані у малому околі $\{n - 1 + \lambda, \ \lambda + \gamma(A_0)\}$, $n \in N$, а тотальні спектральні проектори, що відповідають цим околам, є голоморфними функціями від γ. Теорема 1 доведена.

Теорема 8. *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ ЛДСВС (44) з марковським параметром $\xi(t)$, що визначений рівнянням (45) експоненціально стійкий в l.i.m. при достатньо малих за модулем γ тоді і тільки тоді, коли*

$$\sigma(L) \equiv \sigma(L^y + A_0 + \gamma \Phi B) \subset R_- \backslash \{0\}. \qquad (56)$$

Достатність. Нехай виконується (56). Тоді в силу представлення проектора [14] у вигляді

$$P_\sigma(T(t)) = e^{t P_\sigma(L^+)}, \ \forall t \geq 0, \qquad (57)$$

множина дійсних чисел $\lambda \geq 1$ належить резольвентній множині всіх операторів $T(t)$. Кожну матричну функцію $q \in V_2$ можна представити як границю матричних функцій з V, а будь-який елемент $q \in V$ можна представити як різницю $q_1, q_2 \in K \subset V$, тобто $q = q_1 - q_2$. Тому конус додатно визначених матричних функцій з $K \subset V_2$ є майже відтворювальним [14]. А із замкненості спектру оператора випливає, що існує таке $\rho \in (0, \infty)$, що $\sigma(T(t)) \bigcap \{\lambda \geq e^{-\rho t}\} = \emptyset$ для довільного $t \geq 0$.

З властивості додатних операторів з описаною вище структурою і властивістю залишати інваріантним майже відтворювальний конус в просторі Банаха [15] випливає, що

$$\sigma(T(t)) \bigcap \{\lambda \geq e^{-\rho t}\} = 0,$$

тобто тип напівгрупи $T(t)$ від'ємний. А тому існують $M > 0$ і $\rho > 0$ такі, що

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\rho t}, \ \forall t \geq 0.$$

Отже,

$$E_{s,y} |x(t)|^2 \equiv E_y (X^T(t, 0) X(t, 0) x, x) =$$

$$= ((T(t)I)(y)x, x) \le Me^{-\rho t} |x|^2 , \qquad (58)$$

що доводить експоненціальну стійкість в $l.i.m.$ розв'язку ЛДСВС (3.1).

Необхідність. Нехай виконується (58). Тоді $\forall q \in V$ і $\lambda \in \{\lambda \in C \,|Re\lambda > 0\}$ існує резольвента

$$(R_\lambda q)(y) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ((T(t)q)(y)x, x)e^{-\lambda t} dt. \qquad (59)$$

За означенням оператора L (див. (52)) резольвента R_λ буде компактною при виборі малих за модулем γ, бо цією властивістю володіє оператор L^y.

Але множина V є щільною у V_2 за нормою цього простору, а тоді щільно визначений оператор - резольвента R_λ - повинен бути визначеним на всьому V_2. А це означає, що $\sigma(L) \subset \{Re\lambda < -\rho\}$ при деякому $\rho > 0$. Теорема 8 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И.И. Гихман, А.В. Скороход - К.: Наукова думка, 1982. - 612 с.

2. *Данфорд Н.* Линейные операторы / Н. Данфорд, Дж. Шварц - М.: ИЛ, 1962. - Т.1. - 895 с.

3. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы / Е.Б. Дынкин - М.: Физматгиз, 1969.- 859 с.

4. *Като Т.* Теория возмущенных линейных операторов / Т. Като - М.: Мир, 1972. - 742 с.

5. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И.Я. Кац - Екатеринбург: УГАПС, 1998. - 222 с.

6. *Королюк В.С.* Устойчивость автономных динамических систем с быстрыми марковскими переключениями / В.С. Королюк // Докл. АН СССР. Сер. А. - 1990.- № 6. - С. 16-19.

7. *Королюк В.С.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика / В.С. Королюк, Є.Ф. Царков, В.К. Ясинський - Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. - 798 с.

8. *Крейн М.Г.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха / М.Г. Крейн, Н.А. Рутман // Успехи мат. наук. - 1947. - Т.3., Вып. 1. - С. 3-95.

9. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк - М.: Наука, 1969. - 526 с.

10. *Пастур Л.А.* Спектр случайных самосопряженных операторов / Л.А. Пастур // Успехи мат. наук, - Т.28., В.2. - 1973. - С. 3-34.

11. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А.В. Скороход - К.: Наукова думка, 1987. - 328 с.

12. *Тихонов В.И.* Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов - Москва: Наука, 1981. - 423 с.

13. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р.З. Хасьминский - М.: Наука, 1969. - 367 с.

14. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс - М.: ИЛ, 1962. - 829 с.

15. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е.Ф. Царьков - Рига: Зинатне, 1989. - 421 с.

16. *Blankenship G.* Stability and control of stochastic systems with wide - bind noise disturbances / G. Blankenship, Gr. Papanicolaun // 1. SJAM. Appl. Math. 34. - 1978, - pp 437-476.