УДК 517.51

©2010 р. Лінчук Ю.С.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ

Описані розв'язки одного інтегро-диференціального операторного рівняння в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних в областях. Для розв'язків такого рівняння одержано аналог формули Дельсарта-Ліонса.

Solutions of an integro-differential operator equation in the class of continuous linear operators which acts in spaces of analytic functions in domains are described. For solutions of such an equation, we obtain an analogue of Delsartes–Lions formula.

У багатьох математичних дослідженнях вивчається характеристика операторів, що задовольняють певні комутаційні співвідношення. В класичній праці Дельсарта і Ліонса [1] в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі цілих функцій, досліджувалося операторне рівняння виду

$$D^n T = T D^n, \tag{1}$$

де $D = \frac{d}{dz}$ – оператор диференціювання, а n – фіксоване натуральне число. Зокрема, в [1] стверджувалося, що загальний розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} T_k P^k, \tag{2}$$

де P – лінійний неперервний оператор, що діє у просторі цілих функцій за правилом: $(Pf)(z) = f(\omega z)$, $\omega = exp(\frac{2\pi i}{n})$, а кожен з операторів T_k, $k = \overline{0, n-1}$, лінійно та неперевно діє в просторі цілих функцій і є переставним з оператором D. Пізніше І. Вінер в [2] переніс цей результат на випадок лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях. М.І.Нагнибіда в [3] встановив помилковість цих тверджень і довів, що формулою (2) описується лише деяка підмножина розв'язків рівняння (1), а також знайшов матричним методом усі розв'язки цього рівняння в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях. Пізніше рівняння (1) досліджувалося в інших класах лінійних неперервних операторів [4].

В даній статті вивчаються розв'язки інтегро-диференціального операторного рівняння виду

$$D^n T = T \mathcal{J}^n \tag{3}$$

в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у областях (тут $\mathcal{J}$ – оператор інтегрування, який діє у відповідному просторі аналітичних функцій за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$). Встановлено, що для рівняння (3) є правильним твердження, аналогічне до сформульованого вище результату Дельсарта і Ліонса з [1]. Зауважимо, що в цій статті доведені також основні результати, які анонсовані в [5].

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [6]. Вважатимемо, що область G є опуклою і містить початок координат. Оскільки область G є однозв'язною, то система функцій $\{exp(\lambda z) :$

$\lambda \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$. Тому кожен оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ однозначно визначається за характеристичною функцією $t(\lambda, z) = T(exp(\lambda\tilde{z}))$. З умови неперервності оператора T випливає, що функція $t(\lambda, z)$ є цілою по λ, аналітичною по z в G і задовольняє наступну умову:

$$\forall K_2 \subset G \; \exists K_1 \subset G \; \exists C > 0 \; \forall \lambda \in \mathbb{C} :$$

$$\max_{z \in K_2} |t(\lambda, z)| \leq C \; exp(\max_{z \in K_1} Re(\lambda z)), \qquad (4)$$

де K_1, K_2 – компактні підмножини області G. Навпаки, кожна функція $t(\lambda, z)$, яка є цілою по λ, аналітичною по z в G і задовольняє умову (4) є характеристичною для деякого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Дійсно, зафіксуємо довільну компактну множину $K_2 \subset G$ і знайдені для неї $K_1 \subset G$ та $C > 0$ згідно (4). Не порушуючи загальності, вважатимемо, що множина K_1 є опуклою, оскільки такою є область G. З (4) випливає, що при кожному $z \in K_2$ індикатриса $h_z(\varphi)$ цілої функції $t(\lambda, z)$ відносно змінної λ, задовольняє нерівність: $h_z(\varphi) \leq k(-\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, де $k(\varphi)$ – опорна функція множини K_1. Здійснивши перетворення Бореля [7] останньої функції по змінній λ, одержимо, що при кожному $z \in K_2$ формулою

$$t_1(\lambda, z) = \int_0^\infty t(\mu, z) exp(-\lambda\mu) d\mu, \qquad (5)$$

в якій шляхом інтегрування є промінь $arg\mu = \varphi$, визначається функція $t_1(\lambda, z)$, яка є аналітичною в півплощині $Re(\lambda exp(i\varphi)) > k(-\varphi)$. Тому функція $t_1(\lambda, z)$ є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$ [6]. Нехай γ – замкнута спрямна жорданова крива, яка міститься в G і така, що множина K_1 знаходиться всередині області, яка обмежена γ. Тоді для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in K_2$ формулою

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) \left(\int_0^\infty t(\mu, z) e^{-\lambda\mu} d\mu \right) d\lambda \qquad (6)$$

визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ [6]. Оскільки $t(\lambda, z) = T(exp(\lambda\tilde{z}))$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in K_2$, то $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією побудованого оператора T. Це зображення операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ одержується з [8], де аналогічне представлення таких операторів встановлене за допомогою узагальненого перетворення Бореля, що побудоване за функцією Міттаг-Лефлера.

Опишемо спочатку розв'язки інтегро-диференціального операторного рівняння (3) у випадку $n = 1$, тобто знайдемо всі розв'язки рівняння

$$T\mathcal{J} = DT \qquad (7)$$

в класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$, де G – довільна опукла область комплексної площини, яка містить початок координат.

Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівність(7). Подіявши обома частинами рівності (7) на функцію $exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, одержимо, що функція $t(\lambda, z)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $z \in G$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{\lambda}(t(\lambda, z) - \varphi(z)), \qquad (8)$$

де $\varphi(z)$ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, причому $\varphi(z) = T1$. Розв'язавши рівняння (8) методом варіації сталої, одержимо, що при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in G$

$$t(\lambda, z) = e^{\frac{z}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^z \varphi(\tau) e^{-\frac{\tau}{\lambda}} d\tau + c(\lambda) \right), \qquad (9)$$

де $c(\lambda)$ – деяка функція, яка визначена на множині $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. При $z = 0$ з (9) одержуємо, що $c(\lambda) = t(\lambda, 0)$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тому функція $c(\lambda)$ є цілою. З рівності (7) випливає, що $T\mathcal{J}^n = D^n T$ при кожному $n \in \mathbb{N}$. Подіявши цією рівністю на функцію $f(z) \equiv 1$, матимемо, що $Tz^n = n!\varphi^{(n)}(z)$, де $\varphi(z) = T1$, $n = 0, 1, \ldots$. Скориставшись лінійністю та неперервністю оператора T, одержимо, що при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G$

$$t(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi^{(n)}(z). \qquad (10)$$

Зокрема, при $z = 0$ звідси одержуємо, що $c(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi^{(n)}(0)$. Оскільки оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, то функція $t(\lambda, z)$ задовольняє умову (4). Зафіксуємо довільну компактну підмножину K_2 області G, яка містить початок координат, і нехай компактна множина $K_1 \subset G$ та стала $C > 0$ знайдені для K_2 згідно умови (4). Позначимо $r = \max\limits_{z \in K_1} |z|$. Тоді з (4) випливає, що $\max\limits_{z \in K_2} |t(\lambda, z)| \le C exp(|\lambda| r)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$. Враховуючи, що $c(\lambda) = t(\lambda, 0)$, звідси одержуємо, що $|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi^{(n)}(0)| \le C exp(|\lambda| r)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Тому функція $c(\lambda)$ належить класу $[1, r]$.

Нагадаємо [9], що через $[\rho, \sigma]$ (відповідно $[\rho, \sigma)$) позначають клас цілих функцій, порядок яких менший за ρ або ж порядок цих функцій дорівнює ρ, але тоді тип не перевищує σ (відповідно строго менший за σ). При цьому функція $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ належить до класу $[\rho, \sigma]$ (відповідно $[\rho, \sigma)$) тоді і тільки тоді, коли $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|g_n|} \le (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$ (відповідно $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|g_n|} < (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$).

Використовуючи характеристику функцій з класу $[1, r]$ за допомогою тейлорівських коефіцієнтів цих функцій, одержуємо, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n \sqrt[n]{|\varphi^{(n)}(0)|} \le re$. Остання нерівність рівносильна тому, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^2 \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(0)|}{n!}} \le (2\sqrt{r} e \frac{1}{2})^2.$$

Звідси одержуємо, що $\varphi(z)$ належить класу $[\frac{1}{2}, 2\sqrt{r})$, а значить і класу $[\frac{1}{2}, \infty]$. Отже, характеристична функція $t(\lambda, z))$ оператора T подається у вигляді (10), причому $\varphi(z) \in [\frac{1}{2}, \infty)$ і функція $t(\lambda, z)$ задовольняє умову (4). Відновлюючи за характеристичною функцією оператор T, одержуємо необхідність умов наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай G – довільна опукла область комплексної площини, яка містить початок координат. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був розв'язком рівняння (7) необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді (6), де $\varphi(z)$ – деяка функція з класу $[\frac{1}{2}, \infty)$, а $t(\lambda, z)$ визначається формулою (9) і задовольняє умову (4).*

Доведення. Достатність. Нехай T – оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, характеристична функція $t(\lambda, z)$ якого визначається формулою (9) і задовольняє умови теореми 1. Тоді, оскільки $\varphi(z) = T1$, то при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $z \in G$: $(T\mathcal{J})(exp(\lambda z)) = \frac{1}{\lambda}(t(\lambda, z) - \varphi(z)) = (DT)(exp(\lambda z))$. Характеристичні функції операторів $T\mathcal{J}$ та DT збігаються, тому виконується рівність (7).

Перетворимо формулу (10) для загального вигляду характеристичної функції $t(\lambda, z)$ оператора T, що є загальним розв'язком операторного рівняння (7). З цією метою виразимо $\varphi(z)$ через функцію $c(z)$, вважаючи, що обидві ці функції є такими, що побудована за ними функція $t(\lambda, z)$ задовольняє умову (4). За формулами для коефіцієнтів розкладу цілої функції $c(\lambda)$ у степеневий ряд, матимемо, що при $n \ge 0$ і довільного $r > 0$ виконуються рівності:

$$\varphi^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{c(\tau)}{\tau^{n+1}} d\tau.$$

Зафіксуємо $r > 0$. Тоді для довільного $z \in \mathbb{C}$, одержимо, що

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} z^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} c(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \tau^{n+1}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{c(\tau)}{\tau} exp\left(\frac{z}{\tau}\right) d\tau.$$

Звідси випливає, що при $n \ge 0$ і $z \in \mathbb{C}$:

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{c(\tau)}{\tau^{n+1}} exp\left(\frac{z}{\tau}\right) d\tau.$$

Тому, використовуючи рівність (10), одержимо, що при $z \in \mathbb{C}$ і $|\lambda| < r$:

$$t(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{c(\tau)}{\tau - \lambda} exp\left(\frac{z}{\tau}\right) d\tau. \qquad (11)$$

За допомогою формули (11), в якій $t(\lambda, z)$ виражається через $c(\lambda)$, можна в іншому вигляді записати загальний розв'язок рівняння (7).

В тому випадку, коли $G = \{z : |z| < R\}$, тобто $\mathcal{H}(G) = A_R$, $0 < R \le \infty$, з теореми 1 випливає правильність наступного твердження.

Наслідок 1. *Загальний розв'язок операторного рівняння* (7) *у класі операторів* $T \in \mathcal{L}(A_R)$ *дається формулою*

$$(Tf)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\varphi^{(k)}(z), \qquad (12)$$

де $\varphi(z)$ *пробігає множину функцій з класу* $[\frac{1}{2}, 2\sqrt{R})$.

Доведення. Якщо $T \in \mathcal{L}(A_R)$ і задовольняє рівняння (7), причому $\varphi(z) = T1$, то як було встановлено при доведенні необхідності умов теореми 1, $\varphi \in [\frac{1}{2}, 2\sqrt{R})$ і $Tz^k = k!\varphi^{(k)}(z)$, $k = 0, 1 \ldots$. Звідси випливає правильність формули (12) для кожної функції $f(z)$ з простору A_R.

Навпаки, нехай $\varphi(z)$ – деяка функція з класу $[\frac{1}{2}, 2\sqrt{R})$. Проводячи аналогічні міркування як і при доведенні теореми 1, одержуємо, що функція $c(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi^{(n)}(0)$ належить класу $[1, R)$. Тоді функція $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (11) є цілою по λ і аналітичною по z в області G. Покажемо, що ця функція задовольняє умову (4) для $G = \{z : |z| < R\}$. Оскільки $c(\lambda) \in [1, R)$, то існують сталі $C > 0$ і $r_1 < R$ такі, що $|c(\lambda)| \le Cexp(r_1|\lambda|)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$. Виберемо r_1' та r_1'' такими, щоб $r_1 < r_1' < r_1'' < R$. Зафіксуємо довільне додатне число $r_2 < R$. Візьмемо довільне $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і покладемо в (11) $r = \frac{r_1'}{r_1}|\lambda|$. Тоді, оцінюючи інтеграл в правій частині (11), одержимо, що для кожного z, $|z| \le r_2$,

$$|t(\lambda, z)| \le \frac{r_1'}{r_1' - r_1} \max_{|\tau| = \frac{r_1'}{r_1}|\lambda|} |c(\tau)| exp\left(\frac{r_1 r_2}{r_1'|\lambda|}\right) \le$$

$$\le C\frac{r_1'}{r_1' - r_1} exp\left(\left(r_1' + \frac{r_1 r_2}{r_1'|\lambda|^2}\right)|\lambda|\right).$$

Виберемо $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ таким, щоб $r_1' + \frac{r_1 r_2}{r_1'|\lambda|^2} \le r_1''$ при $|\lambda| > |\lambda_0|$, і позначимо $C_1 = C\frac{r_1'}{r_1' - r_1}$. Тоді $|t(\lambda, z)| \le C_1 exp(r_1''|\lambda|)$ при $|z| \le r_2$ і $|\lambda| > |\lambda_0|$. Зафіксуємо довільне r, $r > |\lambda_0|$. Тоді при $|\lambda| \le |\lambda_0|$ і $|z| \le r_2$:

$$|t(\lambda, z)| \le \frac{r}{r - |\lambda_0|} \max_{|\tau|=r} |c(\tau)| exp\left(\frac{r_2}{r}\right) =$$

$$= C_2 \le C_2 exp(r_1''|\lambda|).$$

З цих оцінок для $|t(\lambda, z)|$ випливає, що $\max\limits_{|z| \le r_2} |t(\lambda, z)| \le C_3 exp(r_1''|\lambda|)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$, де $C_3 = max\{C_1, C_2\}$. Таким чином, умова (4) виконується для функції $t(\lambda, z)$ і області $G = \{z : |z| < R\}$. Тому функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною для деякого оператора $T \in \mathcal{L}(A_R)$, який задовольняє рівність (7). Оскільки $Tz^k = k!\varphi^k(z)$, $k = 0, 1, \ldots$, то оператор T подається у вигляді (12).

Рівняння (3) для довільного натурального n розв'язується за тією ж схемою, що і рівняння (7). Якщо G – довільна область комплексної площини, яка є інваріантною відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{n}$, тобто $\omega G = G$, де $\omega = exp\frac{2\pi i}{n}$, а n – фіксоване натуральне число, то формулою $(Pf)(z) = f(\omega z)$ визначається оператор P з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Теорема 2. *Нехай* G *– довільна опукла область комплексної площини, яка містить початок координат і є інваріантною відносно повороту навколо точки* $z = 0$ *на кут* $\frac{2\pi}{n}$*, де* n *– деяке фіксоване натуральне число більше за* 1. *Загальний розв'язок рівняння* (3) *в класі операторів* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ *дається формулою* (2), *де* T_k, $k = \overline{0, n-1}$, *– деякі оператори з класу* $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, *що задовольняють* (7).

Доведення. Необхідність. Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (3). Тоді при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $z \in G$ функція $t(\lambda, z)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^n t(\lambda, z)}{\partial z^n} = \frac{1}{\lambda^n} t(\lambda, z) - \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \varphi_k(z), \quad (13)$$

де $\varphi_k \in \mathcal{H}(G)$, причому $\varphi_k(z) = T z^k$, $k = \overline{0, n-1}$.

При кожному $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ загальний розв'язок рівняння (13) шукатимемо методом варіації сталих, тобто у вигляді

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(\lambda, z) exp\left(\frac{\omega^k}{\lambda} z\right), \quad (14)$$

де $\omega = exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, а функції $C_k(\lambda, z)$, $k = \overline{0, n-1}$, при кожному $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ є аналітичними по z в області G. За методом варіації сталих для знаходження функцій $C_k(\lambda, z)$ одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial C_0}{\partial z} e^{\frac{z}{\lambda}} + \frac{\partial C_1}{\partial z} e^{\frac{\omega z}{\lambda}} + \ldots + \frac{\partial C_{n-1}}{\partial z} e^{\frac{\omega^{n-1} z}{\lambda}} = 0, \\ \frac{\partial C_0}{\partial z} e^{\frac{z}{\lambda}} + \frac{\partial C_1}{\partial z} \omega e^{\frac{\omega z}{\lambda}} + \ldots + \frac{\partial C_{n-1}}{\partial z} \omega^{n-1} e^{\frac{\omega^{n-1} z}{\lambda}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial C_0}{\partial z} e^{\frac{z}{\lambda}} + \frac{\partial C_1}{\partial z} \omega^{n-2} e^{\frac{\omega z}{\lambda}} + \ldots + \frac{\partial C_{n-1}}{\partial z} (\omega^{n-1})^{n-2} e^{\frac{\omega^{n-1} z}{\lambda}} = 0, \\ \frac{\partial C_0}{\partial z} e^{\frac{z}{\lambda}} + \frac{\partial C_1}{\partial z} \omega^{n-1} e^{\frac{\omega z}{\lambda}} + \ldots + \frac{\partial C_{n-1}}{\partial z} (\omega^{n-1})^{n-1} e^{\frac{\omega^{n-1} z}{\lambda}} = \Phi(\lambda, z), \end{cases} \quad (15)$$

де $\Phi(\lambda, z) = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j-1}}{j!} \varphi_j(z)$.

Система (15) є лінійною системою n-го порядку відносно невідомих $\frac{\partial C_k}{\partial z}$, $k = \overline{0, n-1}$. Визначник d системи (15) обчислюється з використанням визначника Вандермонда і

$$d = exp\left(\frac{z}{\lambda}\left(1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{0 \le p < j \le n-1} (\omega^j - \omega^p) = \prod_{0 \le p < j \le n-1} (\omega^j - \omega^p).$$

Визначник d є сталою величиною відмінною від нуля і його значення не залежить ні від λ, ні від z. Розв'язуючи систему (15) за методом Крамера, одержимо, що

$$\frac{\partial C_k}{\partial z} = \frac{d_k(\lambda, z)}{d}, \quad (16)$$

де

$$d_k(\lambda, z) = (-1)^{n+k+1} exp\left(-\frac{\omega^k z}{\lambda}\right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{0 \le p < j \le n-1 \\ p \ne k, j \ne k}} (\omega^j - \omega^p) \Phi(\lambda, z),$$

$k = \overline{0, n-1}$. Тому (16) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial C_k}{\partial z} = m_k exp\left(-\frac{\omega^k z}{\lambda}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j-1}}{j!} \varphi_j(z),$$

де m_k, $k = \overline{0, n-1}$, – деякі сталі. Знайдемо їх: $m_k = (-1)^{n+k} \frac{\prod\limits_{\substack{0 \le p < j \le n-1 \\ p \ne k, j \ne k}} (\omega^j - \omega^p)}{\prod\limits_{0 \le p < j \le n-1} (\omega^j - \omega^p)} = -\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j)}$. Обчислимо знаменник останнього дробу. Для довільного фіксованого $k = \overline{0, n-1}$ при $z \ne \omega^k$ виконується рівність $\frac{z^n - 1}{z - \omega^k} = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n-1} (z - \omega^j)$. Спрямувавши тут z до ω^k, одержимо: $\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n-1} (\omega^k - \omega^j) = n\omega^{-k}$. Отже, $m_k = -\frac{\omega^k}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Таким чином, (16) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial C_k}{\partial z} = -\frac{\omega^k}{n} exp\left(-\frac{\omega^k z}{\lambda}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j-1}}{j!} \varphi_j(z),$$

$k = \overline{0, n-1}$. Звідси одержуємо, що

$$C_k(\lambda, z) = -\frac{\omega^k}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j-1}}{j!} \cdot$$

$$\cdot \int_0^z exp\left(-\frac{\omega^k \tau}{\lambda}\right) \varphi_j(\tau) d\tau + c_k(\lambda), \quad (17)$$

де $c_k(\lambda)$ – деякі функції, які визначені на множині $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(k=\overline{0,n-1})$.

Використовуючи (14), одержимо, що характеристичну функцію $t(\lambda,z)$ можна подати у вигляді

$$t(\lambda,z)=\sum_{k=0}^{n-1} exp\left(\frac{\omega^k z}{\lambda}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{\omega^k}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^{j-1}}{j!}\int\limits_0^z e^{-\frac{\omega^k\tau}{\lambda}}\varphi_j(\tau)d\tau+c_k(\lambda)\right). \tag{18}$$

З (18) і того, що функція $t(\lambda,z)$ є цілою по λ і аналітичною по z в області G випливає, що кожна з функцій $c_k(\lambda)$, $k=\overline{0,n-1}$, є аналітичною при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Дійсно, з (18) одержуємо, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} exp\left(\frac{\omega^k z}{\lambda}\right)c_k(\lambda)=\psi(\lambda,z), \tag{19}$$

де $\psi(\lambda,z)$ – деяка функція, яка аналітична при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ і $z\in G$. Тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} exp\left(\frac{\omega^k z_j}{\lambda}\right)c_k(\lambda)=\psi(\lambda,z_j),\ j=\overline{0,n-1}, \tag{20}$$

де $z_j\in G$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Для доведення того, що функції $c_k(\lambda)$, $k=\overline{0,n-1}$, є аналітичними при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, з врахуванням (20), досить встановити, що для кожного $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ існують точки z_j, $j=\overline{0,n-1}$ з області G, для яких визначник

$$D(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1})=det\left|\left|exp\left(\frac{\omega^k z_j}{\lambda}\right)\right|\right|_{k,j=0}^{n-1}$$

відмінний від нуля.

Існування таких точок доведемо методом від супротивного. Нехай для деякого $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функція

$$D(z_0,z_1,\ldots,z_{n-1})\equiv 0, \tag{21}$$

при $z_j\in G$, $j=\overline{0,n-1}$. Продиференціювавши рівність (21) j разів по змінні z_j, $j=\overline{0,n-1}$, і покладаючи в одержаному співвідношенні $z_j=0$, $j=\overline{0,n-1}$, матимемо, що

$$d=det\left|\left|(\omega^k)^j\right|\right|_{k,j=0}^{n-1}=0.$$

Але це суперечить тому, що, як відзначалося раніше, $d\neq 0$.

Перетворимо рівність (18). Проінтегрувавши j разів частинами інтеграл з правої частини (18), одержимо, що при $j\geq 1$ та $k=\overline{0,n-1}$ є правильною формула:

$$\int\limits_0^z exp\left(-\frac{\omega^k\tau}{\lambda}\right)\varphi_j(\tau)d\tau=$$
$$=exp\left(-\frac{\omega^k z}{\lambda}\right)\sum_{s=0}^{j-1}\left(\frac{\omega^k}{\lambda}\right)^s(\mathcal{J}^{s+1}\varphi_j)(z)+$$
$$+\left(\frac{\omega^k}{\lambda}\right)^j\int\limits_0^z exp\left(-\frac{\omega^k\tau}{\lambda}\right)(\mathcal{J}^j\varphi_j)(\tau)d\tau.$$

Тому функцію $t(\lambda,z)$ можна подати у вигляді:

$$t(\lambda,z)=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j!}\sum_{s=0}^{j-1}\lambda^{j-1-s}\omega^{k(1+s)}\cdot$$
$$\cdot(\mathcal{J}^{s+1}\varphi_j)(z)-\sum_{k=0}^{n-1}exp\left(\frac{\omega^k z}{\lambda}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda}\frac{\omega^{k(j+1)}}{j!n}\int\limits_0^z e^{-\frac{\omega^k\tau}{\lambda}}(\mathcal{J}^j\varphi_j)(\tau)d\tau+c_k(\lambda)\right).$$

Оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega^{k(s+1)}=0$ при кожному $s=\overline{0,n-2}$, то потрійна сума правої частини останньої рівності дорівнює нулеві. Тому при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ і $z\in G$

$$t(\lambda,z)=\sum_{k=0}^{n-1}exp\left(\frac{\omega^k z}{\lambda}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^z e^{-\frac{\omega^k\tau}{\lambda}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega^{k(j+1)}}{j!n}\left(\mathcal{J}^j\varphi_j\right)(\tau)d\tau+c_k(\lambda)\right).$$

Запишемо праву частину останньої рівності у вигляді

$$t(\lambda, z) = exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^z e^{-\frac{\tau}{\lambda}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!n}\left(\mathcal{J}^j\varphi_j\right)(\tau)d\tau + c_0(\lambda)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}e^{\frac{z}{\omega^{n-k}\lambda}}\left(-\frac{1}{\omega^{n-k}\lambda}\int\limits_0^z e^{-\frac{\tau}{\omega^{n-k}\lambda}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega^{kj}}{j!n}\left(\mathcal{J}^j\varphi_j\right)(\tau)d\tau + c_k(\lambda)\right). \tag{22}$$

Введемо функції $\tilde{c}_k(\lambda) = c_{n-k}(\omega^{-k}\lambda)$, $k = \overline{1, n-1}$, $\tilde{c}_0(\lambda) = c_0(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Зрозуміло, що функції $\tilde{c}_k(\lambda)$ є аналітичними при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Тоді $c_k(\lambda) = \tilde{c}_{n-k}(\omega^k\lambda)$, $k = \overline{1, n-1}$. Виразивши функції $c_k(\lambda)$ через функції $\tilde{c}_p(\lambda)$, $k, p = \overline{0, n-1}$, і змінивши порядок підсумовування в (22), одержимо, що

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} exp\left(\frac{z}{\omega^k\lambda}\right)\left(-\frac{1}{\omega^k\lambda}\int\limits_0^z e^{-\frac{\tau}{\omega^k\lambda}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega^{-kj}}{j!n}\left(\mathcal{J}^j\varphi_j\right)(\tau)d\tau + \tilde{c}_k(\omega^k\lambda)\right).$$

Позначимо $\tilde{\varphi}_k(z) = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{\omega^{-kj}}{j!n}\left(\mathcal{J}^j\varphi_j\right)(z)$, $k = \overline{0, n-1}$. Функції $\tilde{\varphi}_k(z)$ є аналітичними в області G. Отже $t(\lambda, z)$ подається у вигляді

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} exp\left(\frac{z}{\omega^k\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\omega^k\lambda}\int\limits_0^z e^{-\frac{\tau}{\omega^k\lambda}}\tilde{\varphi}_k(\tau)d\tau + \tilde{c}_k(\omega^k\lambda)\right), \tag{23}$$

$\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z \in G$.

Введемо в розгляд функції $t_k(\lambda, z) = exp\left(\frac{z}{\lambda}\right)\left(-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^z exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)\tilde{\varphi}_k(\tau)d\tau + \tilde{c}_k(\lambda)\right)$, $k = \overline{0, n-1}$. Тоді з (23) випливає, що при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ і $z \in G$

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k(\omega^k\lambda, z). \tag{24}$$

Покажемо, що для кожної з функцій $\tilde{c}_k(\lambda)$ точка $\lambda = 0$ є усувною особливістю і що кожна з функцій $t_k(\lambda, z)$, є характеристичною для деякого оператора $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який задовольняє рівняння (7), $k = \overline{0, n-1}$. З цією метою для довільного $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ знайдемо похідну довільного порядку від функції $t(\lambda, z)$ по змінній z при $z \in G$.

Для кожного $k = \overline{0, n-1}$ та $p = 0, 1, \ldots$ при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z \in G$ є правильними рівності

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}(t_k(\omega^k\lambda, z)) = \frac{\omega^{-kp}}{\lambda^p}t_k(\omega^k\lambda, z) -$$

$$-\sum_{r=0}^{p-1}\frac{\omega^{-k(r+1)}}{\lambda^{r+1}}\tilde{\varphi}_k^{(p-r-1)}(z), \tag{25}$$

які доводяться індукцією по змінній p. Продиференціювавши (24) p разів по змінній z і скориставшись (25), одержимо:

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}(t(\lambda, z)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\omega^{-kp}}{\lambda^p}t_k(\omega^k\lambda, z) - \sum_{r=0}^{p-1}\frac{\omega^{-k(r+1)}}{\lambda^{r+1}}\tilde{\varphi}_k^{(p-r-1)}(z)\right).$$

Тому

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-kp}t_k(\omega^k\lambda, z) = \lambda^p\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(t(\lambda, z)\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{p-1}\omega^{-k(r+1)}\lambda^{p-r-1}\tilde{\varphi}_k^{(p-r-1)}(z), \tag{26}$$

$p = \overline{0, n-1}$, $z \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Покладаючи в (26) $z = 0$, одержимо, що при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ і $p = 0, 1, \ldots$ виконуються рівності

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-kp}\tilde{c}_k(\omega^k\lambda) = \lambda^p\frac{\partial^p t(\lambda, 0)}{\partial z^p} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1}\omega^{k(j-p)}\lambda^j\tilde{\varphi}_k^{(j)}(0) \qquad (27)$$

Праві частини (27) при кожному $p=0,1,\ldots$ є цілими функціями відносно λ. Розглянемо (27) при $p=\overline{0,n-1}$. Тоді для $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (27) є системою лінійних рівнянь відносно невідомих $\tilde{c}_k(\omega^k\lambda)$, $k=\overline{0,n-1}$. Оскільки визначник цієї системи відмінний від нуля, то розв'язавши її, одержимо, що кожна з функцій $\tilde{c}_k(\omega^k\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій правої частини рівностей (27) при $p=\overline{0,n-1}$ і $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Тому для кожної з функцій $\tilde{c}_k(\omega^k\lambda)$, а значить і для функцій $\tilde{c}_k(\lambda)$, точка $\lambda=0$ є усувною особливістю. Звідси випливає, що функції $\tilde{c}_k(\lambda)$, $k=\overline{0,n-1}$, є цілими.

Побудуємо далі оператори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, для яких праві частини рівностей (26) є характеристичними функціями. Для кожного $p=\overline{0,n-1}$ через B_p позначимо оператор

$$B_p=D^pTD^p+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{p-1}\omega^{-k(r+1)}\tilde{\varphi}_k^{(p-r-1)}(z)\delta_{p-r-1},$$

де $\delta_l(f)=f^{(l)}(0)$, $l=0,1,\ldots$. Зрозуміло, що $B_p\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ при $p=\overline{0,n-1}$. Нехай $b_p(\lambda,z)$ – характеристична функція оператора B_p, тобто $B_p(exp(\lambda\tilde{z}))=b_p(\lambda,z)$, $p=\overline{0,n-1}$. Тоді рівності (26) при $\lambda\in\mathbb{C}$ і $z\in G$ можна записати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-kp}t_k(\omega^k\lambda,z)=b_p(\lambda,z), \qquad (28)$$

$p=\overline{0,n-1}$. Співвідношення (28) є системою n лінійних рівнянь відносно n невідомих $t_k(\omega^k\lambda,z)$, $p=\overline{0,n-1}$. Оскільки визначник цієї системи відмінний від нуля, то розв'язавши її, одержимо, що при $\lambda\in\mathbb{C}$, $z\in G$:

$$t_k(\omega^k\lambda,z)=\sum_{p=0}^{n-1}d_{pk}b_p(\lambda,z), \qquad (29)$$

де d_{pk} – деякі комплексні числа, $p,k=\overline{0,n-1}$.

З (29) випливає, що функція $t_k(\lambda,z)$ є характеристичною для оператора $T_k=\sum\limits_{p=0}^{n-1}d_{pk}B_pP^{n-k}$, який належить класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. При цьому $\tilde{\varphi}_k(z)=t_k(0,z)=T_k1$, $k=\overline{0,n-1}$. З формули для визначення функцій $t_k(\lambda,z)$, $k=\overline{0,n-1}$, за теоремою 1 одержуємо, що кожен з операторів T_k задовольняє рівність (7). Тоді з (24) випливає, що T подається у вигляді (2), де T_k, $k=\overline{0,n-1}$, задовольняють умови теореми 2. Необхідність умов теореми доведена.

Достатність. При виконанні умов теореми, формулою (2) визначається оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Залишається перевірити правильність рівностей

$$(T_kP^k)\mathcal{J}^n=D^n(T_kP^k) \qquad (30)$$

для $k=\overline{0,n-1}$.

Оскільки $P\mathcal{J}=\omega\mathcal{J}P$ і $\omega^n=1$, то $P\mathcal{J}^n=\mathcal{J}^nP$. Тому

$$\left(T_kP^k\right)\mathcal{J}^n=\left(T_k\mathcal{J}^n\right)P^k=D^n\left(T_kP^k\right)$$

для кожного $k=\overline{0,n-1}$. Рівності (30), а з ними і теорема 2, доведені.

Зауваження. З доведення теореми випливає, що функції $c_k(\lambda)$, за допомогою яких визначається характеристична функція $t(\lambda,z)$ оператора T у вигляді (18), є цілими при $k=\overline{0,n-1}$. В статті [1] загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{\partial^n}{\partial z^n}(t(\lambda,z))=\lambda^nt(\lambda,z)$, при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ і $z\in\mathbb{C}$, подається у вигляді $t(\lambda,z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_k(\lambda)exp(\omega^k\lambda z)$ (тут $t(\lambda,z)=T(exp(\lambda\tilde{z}))$, а T – розв'язок рівняння (1) в класі $\mathcal{L}(A_\infty)$). В [1] стверджувалося, що функції $c_k(\lambda)$ є цілими, $k=\overline{0,n-1}$. Насправді ж, ці функції є аналітичними на множині $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ і точка $\lambda=0$ для кожної з них може бути полюсом, порядок якого не перевищує $n-1$. Це і було джерелом помилкового твердження з [1], яке сформульоване у вступі до даної статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'oprateurs differentieles dans le domaine complexe //Comment. Math. Helv.– 1957. – 32, №2. – p.113-128.

2.*Винер И.Я.* Преобразования дифференциальных операторов в пространстве голоморфных функций // УМН, 1960.–Т.20, № 1.– С 185–188.

3.*Нагнибида Н.И.* К вопросу об изоморфизмах аналитического пространства, перестановочных со степенью оператора дифференцирования // ДАН СССР. – 1966. – Т.167, №6. – С.1230-1233.

4.*Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. – 156 с.

5.*Лінчук Ю.С.* Зображення розв'язків одного інтегро-диференціального операторного рівняння // УМЖ. – 2007. – Т. . – С. 134 – 137.

6.*Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie. – J. reine und angew. Math., 1953. – Bd. 191, №1-2.– S.30-49.

7. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. – М.:"Наука", 1976. – 536 с.

8.*Звоздецький Т.І., Лінчук С.С.* Одне зображення лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 270. Математика. Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 48 – 50.

9. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М.: "Наука", 1981. – 320 с.