УДК 517.98

©2010 р. М.В. Дубей

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ДВОЛІПШИЦЕВІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА АНАЛОГ ТЕНЗОРНОГО ДОБУТКУ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Наведені деякі властивості вільного банахового простору та його норми, проективного тензорного добутку вільних банахових просторів та побудовано аналог тензорного добутку метричних просторів, використовуючи ліпшицеві відображення.

Some properties of a free Banach space and its norm, the projective tensor product of free Banach spaces are established and an analogue of the tensor product for metric spaces is constructed using Lipschitz mappings.

Основні означення та попередні відомості

Дослідження ліпшицевих функцій з використанням конструкції вільного банахового простору є досить перспективним, оскільки дозволяє ліпшицеві відображення та більш загальні нелінійні відображення досліджувати методами теорії лінійних операторів. Означення вільного локально опуклого простору ввів А. Марков у 1941 році [1]. Д. Райков побудував вільний локально опуклий простір цілком регулярного простору, вільний локально опуклий простір рівномірного простору та вільний локально опуклий простір рівномірного простору з відміченою точкою [2].

Розглянемо відображення $F : X \to Y$, де $X, Y-$ метричні простори. Відображення $F : X \to Y$, називається *ліпшицевим на просторі* X, якщо існує стала $c > 0$ така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq c\rho(x_1, x_2),$$

де $\rho(x_1, x_2)-$ відстань між елементами простору X, $\rho(f(x_1), f(x_2))$ – відстань між елементами простору Y. Найменша можлива стала c називається *сталою Ліпшица.* Нехай $(X, \rho)-$ метричний простір з дійснозначною невід'ємною функцією $\alpha(x)$, яка задовольняє такі умови:

$$|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \leq \rho(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1) + \alpha(x_2),$$

для всіх $x_1, x_2 \in X$. Функцію $\alpha(x)$ називаємо нормою простору X. Довільний метричний простір X є нормованим відносно норми $\alpha(x) := \rho(\theta, x)$, де θ є фіксованою точкою простору X. Позначимо через $\mathrm{Lip}_0(X, E)$ підмножину всіх ліпшицевих відображень $F(x)$ з нормованого метричного простору X з відміченою точкою θ та нормою $\alpha(x)$ у нормований лінійний простір E, таких, що

$$|F(x)| \leq L_F \alpha(x),$$

де L_F – ліпшицева стала. Ліпшицеве відображення на довільному просторі з відміченою точкою належить класу $\mathrm{Lip}_0(X, E)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\theta) = 0$. Простір $\mathrm{Lip}_0(X, E)$ є банаховим простором з нормою $\|F\| = L_F$.

Відомою є наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай $X-$ нормована множина. Існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму банахів простір $B(X)$ над полем $\mathbb{K}$, а також ізометричне вкладення $\nu : X \to B(X)$ такі, що*

1. *Вектори $\nu(x)$ є лінійно незалежними у $B(X)$ для $\alpha(x) > 0$ і лінійна оболонка елементів $\nu(x)$ є щільною в $B(X)$.*
2. *Довільне відображення F з $\mathrm{Lip}_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\widetilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\widetilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору E.*

3. *Якщо* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *або* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *тоді для довільної замкненої підмножини* $X_0 \subset X$ *з фіксованою точкою* $\theta \in X_0$ *включення* $X_0 \to X$ *продовжується до ізометричного вкладення банахових просторів* $B(X_0) \to B(X)$.

Перше і друге твердження теореми 1 були незалежно доведені Ж. Флудом [4, с. 23], В. Пестовим [5] і Н. Вівером [7, с. 41]. Третє твердження теореми доведено В. Пестовим [6] і Н. Вівером [7, с. 42].

Простір $B(X)$ називається *вільним банаховим простором.*

Отже, згідно з теоремою, простір $\mathrm{Lip}_0(X,E)$ є ізометричним до простору $\mathcal{L}(B(X),E)$ всіх неперервних лінійних операторів з $B(X)$ у E. Через $\mathrm{span}X$ будемо позначати лінійну оболонку множини $\nu(X)$ у $B(X)$. Нехай $x \in \mathrm{span}X \subset B(X)$, тоді через $\mathrm{supp}x$ позначимо скінченний набір елементів $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$ такий, що

$$x = \sum_k a_k \underline{x_k}$$

де $\underline{x_k} = \nu(x_k)$, $a_k \in \mathbb{R}$. Звуження $A|_X$ довільного оператора $A \in \mathcal{L}(B(X),E)$ на $X \subset B(X)$ є ліпшицевим відображенням на X. Оскільки простір $\mathrm{span}X$ є щільним у $B(X)$, то лінійне продовження $\widetilde{A|_X}$ оператора $A|_X$ на $B(X)$ збігається з оператором A. Отже, $\|A\| = \|\widetilde{A|_X}\| = L_{A|_X}$ і відображення $A \mapsto A|_X$ є ізометричним ізоморфізмом лінійних просторів. Іншими словами, наступна діаграма є комутативною

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\nu} & B(X) \\ F \in \mathrm{Lip}_0(X,E) \downarrow & \swarrow & \widetilde{F} \in \mathcal{L}(B(X),E). \\ E & & \end{array}$$

Зауважимо, що відображення ν є ліпшицевим і

$$L_\nu = 1.$$

Нехай $X, Y-$ метричні простори з відміченими точками θ_x і θ_y і нормами $\alpha(x) = \rho(\theta_x, x)$ і $\alpha(y) = \rho(\theta_y, y)$ відповідно.

Розглянемо відображення $g(x,y)$, визначене на декартовому добутку просторів $X \times Y$ зі значеннями у нормованому просторі E. Позначимо $A_y(x)$ відобрження з X в E таке, що $A_y(x) = g(x,y)$ для кожного фіксованого $y \in Y$. Аналогічно визначимо оператор $A_x(y) = g(x,y)$, який діє з Y в E при кожному фіксованому $x \in X$.

Відображення $g(x,y) : X \times Y \to E$ називається *дволіпшицевим* або *нарізно ліпшицевим*, якщо $A_x(y)$ є ліпшицевим для кожного фіксованого $x \in X$ і $A_y(x)$ є ліпшицевим для кожного фіксованого $y \in Y$. Для даного дволіпшицевого відображення $g(x,y)$ позначимо через $G : x \mapsto A_x$ оператор, який кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність ліпшицеве відображення A_x. Дволіпшицеві відображення досліджувалися, зокрема, у [3].

Основні результати

Нехай $X-$ метричний простір з нормою α_X і фіксованою точкою θ. Наступна лема є добре відомою (див. [2], [5]).

Лема 1. *Для кожного елемента* $u \in \mathrm{span}X$, *та деякого скінченного набору* λ_i, $\mu_j \in \mathbb{R}$ *і* $x_i, y_i, z_j \in \mathrm{supp}u$, *виконуються наступні рівності:*

$$u = \sum_i \lambda_i(\underline{x_i} - \underline{y_i}) + \sum_j \mu_j \underline{z_j} \qquad (1)$$

і

$$\|u\| = \sum_i |\lambda_i| \rho_X(x_i, y_i) + \sum_j |\mu_j| \alpha_X(z_j). \quad (2)$$

Наслідок 1. *Нехай* $u \in \mathrm{span}X$, *тоді норма* u *в* $B(X)$ *може бути обчислена за формулою*

$$\|u\| = \inf \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \rho(x_k, y_k) = \inf \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|,$$

де інфімум береться по всіх таких зображеннях елемента u*:*

$$u = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\underline{x_k} - \underline{y_k}).$$

Доведення. Нехай $u = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\underline{x_k} - \underline{y_k})$. Тоді

$$\|u\| \le \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|.$$

Отже,

$$\|u\| \le \inf \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|. \qquad (3)$$

З іншого боку рівності (1) і (2) показують, що існує зображення елемента u, для якого

$$\|u\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|.$$

Таким чином,

$$\|u\| \ge \inf \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|. \qquad (4)$$

Враховуючи (3) та (4) робимо висновок, що

$$\|u\| = \inf \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|.$$

□

Розглянемо множину

$$\Omega_X = \{\underline{x} - \underline{y} \,|\, x, y \in X, x \ne y\} \cup \theta \subset B(X).$$

Позначимо через $\ell_1(\Omega_X)$ формальну лінійну оболонку множини Ω_X, поповнену відносно ℓ_1-норми. Тобто, кожен елемент ω має вигляд формальної суми

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\underline{x_k} - \underline{y_k}),$$

де $x_k, y_k \in X$ і

$$\|\omega\|_{\ell_1(\Omega_X)} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|\underline{x_k} - \underline{y_k}\|.$$

Кожній формальній сумі з $\ell_1(\Omega_X)$ можна поставити у відповідність ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\underline{x_k} - \underline{y_k})$ в просторі $B(X)$, який, очевидно, збігається до деякого елемента цього простору.

Позначимо через V_0 замкнений лінійний підпростір в $\ell_1(\Omega_X)$, для елементів якого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\underline{x_k} - \underline{y_k}) = 0$ в $B(X)$. Тоді, з наслідку 1 та означення норми фактор-простору випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. *Вільний банахів простір $B(X)$ є ізометрично-ізоморфним до фактор-простору $\ell_1(\Omega(X))/V_0$.*

Нехай X, Y – метричні простори. Розглянемо лінійний простір Σ формальних сум $\sum\limits_{i} \lambda_i(x_i, y_i)$, де $(x_i, y_i) \in \Omega_X \times \Omega_Y$. Очевидно, що множина елементів $\Sigma_0 = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k(x_k, \theta_y) + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(\theta_x, y_j)\}$ є лінійним підпростором Σ.

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$. Позначимо клас еквівалентності елемента (x, y) через $(x \diamond y)$ і $X \diamond Y = \{x \diamond y \,|\, x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}$. Для кожного елемента $\omega \in \widetilde{\Sigma}$ визначимо норму

$$\|\omega\| := \inf \sum_{k} |\lambda_k| \|\underline{u_k} - \underline{u'_k}\| \|\underline{v_k} - \underline{v'_k}\|, \qquad (5)$$

де інфімум береться по всіх зображеннях елемента ω у такому вигляді:

$$\omega = \sum_{k} \lambda_k(\underline{u_k} - \underline{u'_k}) \diamond (\underline{v_k} - \underline{v'_k}) \qquad (6)$$

де $u_k, u'_k \in X, v_k, v'_k \in Y$.

Теорема 2. *Поповнення простору $\widetilde{\Sigma}$ відносно норми (5) ізометрично ізоморфне проективному тензорному добутку $B(X)\widehat{\bigotimes}_\pi B(Y)$ банахових просторів $B(X)$ та $B(Y)$.*

Доведення. Достатньо довести ізометричний ізоморфізм просторів $\widetilde{\Sigma}$ і $\mathrm{span}X \otimes_\pi \mathrm{span}Y$. Виберемо довільний елемент $v \in \mathrm{span}X \otimes_\pi \mathrm{span}Y$. Його можна записати у такому вигляді

$$v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \otimes \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \mu_j x_i y_j,$$

де $x_i \in \Omega_X, y_j \in \Omega_Y$. Перепозначивши $\gamma_i \mu_j$ через λ_k, отримаємо елемент $\omega = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \diamond y_k$, який належить простору $\widetilde{\Sigma}$.

Запишемо норму елемента $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ де $v \in \mathrm{span}X \otimes_\pi \mathrm{span}Y$:

$$\|v\|_\pi = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|,$$

де $x_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^i \underline{x}_j^i$, а $y_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^i \underline{y}_k^i$. Зображення елемента у вигляді (6) є частковим випадком зображення $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, отже,

$$\|v\|_\pi \leq \|\omega\|. \tag{7}$$

З іншого боку, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий скінченний набір $x_i \in \mathrm{span}X, y_i \in \mathrm{span}Y$, що

$$\|v\|_\pi \geq \sum_i \|x_i\| \|y_i\| - \varepsilon.$$

Враховуючи наслідок 1 отримаємо, що

$$\|v\|_\pi \geq \|\omega\| - 2\varepsilon.$$

Оскільки це вірно для довільного $\varepsilon > 0$, то

$$\|v\|_\pi \geq \|\omega\|. \tag{8}$$

Враховуючи (7) та (8) робимо висновок, що

$$\|v\|_\pi = \|\omega\|.$$

□

З доведеної теореми, зокрема, випливає, що $X \diamond Y$ вкладається в $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$. Проективна тензорна норма простору $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$ індукує метрику на $X \diamond Y$, яка має вигляд

$$\rho((x_1 - x_1') \diamond (y_1 - y_1'), (x_2 - x_2') \diamond (y_2 - y_2')) =$$

$$\|(\underline{x_1} - \underline{x_1'}) \diamond (\underline{y_1} - \underline{y_1'}) - (\underline{x_2} - \underline{x_2'}) \diamond (\underline{y_2} - \underline{y_2'})\| =$$

$$\|(x_1 - x_1') \otimes (y_1 - y_1') - (x_2 - x_2') \otimes (y_2 - y_2')\|_\pi \tag{9}$$

Таким чином $X \diamond Y$ є метричним простором з відміченою точкою $\theta_X \diamond \theta_Y$.

Теорема 3. $B(X \diamond Y) = B(X)\widehat{\bigotimes}_\pi B(Y)$.

Доведення. Розглянемо елемент $w \in X \diamond Y$. Враховуючи вигляд елементів множин Ω_X і Ω_Y елемент w можна подати у такому вигляді:

$$w = (\underline{x}' - \underline{x}'') \diamond (\underline{y}' - \underline{y}''). \tag{10}$$

Для доведення теореми достатньо розглянути множину $\mathrm{span}(X \diamond Y)$, яка є щільною у $B(X) \diamond B(Y)$. Виберемо елемент $p \in \mathrm{span}(X \diamond Y)$. Оскільки $\mathrm{span}(X \diamond Y)-$ лінійна оболонка простору $X \diamond Y$, то p має наступне зображення

$$p = \sum_k \lambda_k w_k,$$

яке, враховуючи лему 1, запишемо у вигляді:

$$p = \sum_k \lambda_k (\overline{w}_k - \overline{\overline{w}}_k),$$

де $\overline{w}_k, \overline{\overline{w}}_k \in \mathrm{supp}p$. Знайдемо норму p :

$$\|p\| = \inf \sum_k |\lambda_k| \|\overline{w}_k - \overline{\overline{w}}_k\|.$$

Враховуючи зображення (10) можна отримати, що

$$\|p\| = \inf \sum_k |\lambda_k| \|(\underline{\overline{x}}_k' - \underline{\overline{x}}_k'') \diamond (\underline{\overline{y}}_k' - \underline{\overline{y}}_k'') -$$

$$-(\underline{\overline{\overline{x}}}_k' - \underline{\overline{\overline{x}}}_k'') \diamond (\underline{\overline{\overline{y}}}_k' - \underline{\overline{\overline{y}}}_k'')\|.$$

З рівності (9) випливає, що

$$\|p\| = \inf \sum_k |\lambda_k| \|(\underline{\overline{x}}_k' - \underline{\overline{x}}_k'') \otimes (\underline{\overline{y}}_k' - \underline{\overline{y}}_k'') -$$

$$-(\underline{\overline{\overline{x}}}_k' - \underline{\overline{\overline{x}}}_k'') \otimes (\underline{\overline{\overline{y}}}_k' - \underline{\overline{\overline{y}}}_k'')\|_\pi.$$

Отже,

$$\|p\|_{B(X \diamond Y)} = \|p\|_{B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)}.$$

□

У [3] доведено таку теорему:

Теорема 4. *Нехай $g(x,y)$ – дволіпшицеве відображення і $G : x \mapsto A_x$ належить класу $\mathrm{Lip}_0(X, \mathrm{Lip}_0(Y,E))$. Тоді існує неперервне білінійне відображення $D : B(X) \times B(Y) \to E$ таке, що $D(\underline{x}, \underline{y}) = g(x,y)$ для всіх $x \in X$ та $y \in Y$ і $\|D\| = L_G$.*

Зауважимо, що обернене твердження також вірне: якщо $D : B(X) \times B(Y) \to E$ є неперервним білінійним відображенням, тоді відображення $g(x, y) = D(\underline{x}, \underline{y})$ є дволіпшицевим, яке задовольняє умови теореми 4.

Відомо, що для неперервного білінійного відображення D існує неперервний оператор Φ_g на проективному тензорному добутку $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$ такий, що $\Phi_g = D(u, v)$ для довільних елементів $u \in B(X), v \in B(Y)$. З цього випливає, що дволіпшицеве відображення $g(x, y)$ задовольняє умови теореми 4 тоді і тільки тоді, коли $\Phi_g(\underline{x} \otimes \underline{y}) = g(x, y)$ для деякого неперервного лінійного оператора Φ_g. Таким чином, множина всіх нарізно ліпшицевих функцій, які задовольняють умови теореми 4 може бути ототожнена з простором всіх неперервних білінійних форм на $B(X) \times B(Y)$:

$$\mathcal{L}(^2 B(X) \times B(Y)) = (B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y))'$$

і норма довільного елемента $q \in B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$ може бути обчислена за формулою:

$$\|q\| = \sup_{\|\Phi\| \le 1} |\Phi(q)|,$$

де $\Phi \in (B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y))'$ і $\|\Phi\|$ дорівнює ліпшицевій константі звуження Φ на $X \diamond Y \subset B(X \diamond Y) = B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$.

Зауважимо, що не кожне дволіпшицеве відображення $g(x, y)$ визначене на декартовому добутку метричних просторів X та Y з нормами α_X та α_Y та відміченими точками θ_X та θ_Y відповідно, може бути продовжене до лінійного на проективному тензорному добутку вільних банахових просторів $B(X)$ та $B(Y)$. Відома функція Шварца

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

є дволіпшицевою функцією на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, яка не продовжується до неперервної білінійної форми на $B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R})$. Легко бачити, що $f(x, y)$ не задовольняє умови теореми 4.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Марков А. А.* О свободных топологических группах // ДАН СС. – 1941. – **31**. – С. 299-302.

2. *Райков Д. А.* Свободные локально выпуклые пространства равномерних пространств // Математический сборник. – 1964. – **63**, №4. – С. 582-590.

3. *Dubei M., Tymchatyn E. D., Zagorodnyuk A.* Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps // Topology, Elsevier. – 2009. – **48**, №2. – P. 203-213.

4. *Flood J.* Free topological vector spaces. Ph.D. thesis, Australian National University. – Candberra, 1975. – 109 p.

5. *Pestov V.* Free Banach spaces and representation of topological groups // Functional Anal. Appl. – 1986. – **20**. – P. 70-72.

6. *Pestov V.* Douady's conjecture on Banach analytic spaces // C.R. Acad. Sci. Paris 319 séries I. – 1994. – P. 1043-1048.

7. *Weaver N.* Lipschitz Algebras. World Scientific. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1999. – 223 p.