УДК 517.98

©2010 р. Я.М. Дрінь

Буковинська державна фінансова академія

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

У класі узагальнених функцій типу розподілів встановлюється коректна розв'язність $(m+1)$-точкової задачі $(m \geq 2)$ для параболічного псевдодиференціального рівняння.

The correct solvability of $(m+1)$-pointed problem $(m \geq 2)$ for a parabolic pseudodifferential equation is established for the class of generalized functions of distribution type.

Різноманітні природні процеси (поширення електромагнітних хвиль, коливання різних систем, вологоперенесення, тощо) моделюються як багатоточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними з нелокальними (в тому числі періодичними) умовами. Вперше на доцільність та необхідність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вказав О.О. Дезін [1], який досліджував розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами, та можливість опису цих розширень за допомогою крайових умов. Подальший розвиток ці дослідження набули в працях В.К. Романка [2, 3]. За останні десятиліття нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчали також А.М.Нахушев, В.М. Борок, А.А. Керефов, М.М. Шополов, А.А. Макаров, А.К. Ратині, О.А. Самарський, О.Л. Скубачевський та ін., виділяючи переважно випадки коректно поставлених задач. У книзі [4] досліджено коректність крайових задач з нелокальними періодичними умовами за виділеною змінною для широких класів лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (гіперболічних, параболічних, безтипних) скінченного порядку, а також лінійних рівнянь нескінченного порядку. Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі у всьому просторі та в циліндричній області досліджені в [5] . У праці [6] досліджена двоточкова задача для псевдодиференціального рівняння параболічного типу з оператором, побудованим за негладким символом, незалежним від просторових змінних, та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцією скінченного порядку. У даній роботі вивчається $(m+1)$ -точкова задача $(m \geq 2)$ для вказаного псевдодиференціального рівняння. Зазначимо, що методика дослідження такої задачі відрізняється від дослідження двоточкової задачі.

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай число $\gamma \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, $\gamma_0 = n + [\gamma]$, $M(x) = 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \forall p \in \mathbb{Z}_+ \right.$$

$$\left. \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_x^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\} \right\}$$

(тут $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультиіндекс). Φ перетворюється в зліченнонормований простір із введенням в Φ зліченної системи норм $\|\dots\|_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, за допомогою формул

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що збіжність у просторі Φ можна охарактеризувати так [7]: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається за топологією простору Φ до $\varphi \in \Phi$ тоді і лише тоді, коли вона обмежена в Φ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall \nu \geq 1: \quad \|\varphi_\nu\|_p \leq c;$$

правильно збігається в Φ, а саме, для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$.

Простір Φ є також досконалим простором з диференційовною операцією зсуву аргумента [7]. На функціях з простору Φ визначена і неперервна операція перетворення Фур'є F.

Символом Φ' позначимо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Елементи простору Φ' надалі називатимемо узагальненими функціями. Як показано в [7], кожний функціонал $f \in \Phi'$ є узагальненою функцією типу розподілів, тобто має скінченний порядок.

У праці [7] сформульовано три достатні умови існування згортки в Φ'. Наведемо одну з них: якщо $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, то згортка $f * \varphi$ існує і визначається формулою

$$f * \varphi = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi), \varphi \in \Phi$$

(тут T_{-x} – оператор зсуву аргументу в просторі Φ символом $\langle f, \cdot\rangle$ позначено дію функціоналу f на основну функцію). Зауважимо також, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}^n$ функцією, при цьому [7]

$$\exists m \in \mathbb{Z}_+ \ \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n: \ |D_x^\beta(f * \varphi)(x)| \leq$$

$$\leq \|f\|_m (1 + |x|)^{\gamma_0 + m + |\beta|} \|\varphi\|_{m+|\beta|}$$

(тут $m \in \mathbb{Z}_+$ – порядок узагальненої функції f).

Нехай $f \in \Phi'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi$ для довільної функції $\varphi \in \Phi$ і зі співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі Φ, то функціонал f називається згортувачем у просторі Φ. Оскільки Φ – досконалий простір з диференційовною операцією зсуву аргументу, то, як випливає із загальної теорії просторів, спряжених до досконалих (див. [8]), кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ.

Символом Ψ позначимо Фур'є-образ простору Φ: $\Psi = F[\Phi]$. В [9] доведено, що функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а у точці $x = 0$ вона задовольняє умову Діні. Тоді із загальної теорії перетворення Фур'є випливає, що функція φ зображається через її перетворення Фур'є за допомогою операції оберненого перетворення F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \varphi \in \Phi.$$

Перетворення Фур'є взаємнооднозначно і взаємнонеперервно відображає Φ на Ψ. Для функцій із простору Ψ правильними є нерівності:

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \ k_i \geq m_i, \ i \in \{1, \ldots, n\}, \ \exists c_k > 0$$

$$\exists c_m > 0: \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi^k D_\xi^m F[\varphi](\xi)| \leq c_k c_m, \varphi \in \Phi,$$

де $c_k \leq c A_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot A_n^{k_n} k_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot k_n^{k_n}$ (c, A_1, $\ldots$, A_n – додатні, залежні лише від функції $F[\varphi]$). У функцій $\partial^k F[\varphi]/\partial \xi_i^k$, $\xi_i \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{\xi_i \to +0} \partial^k F[\varphi]/\partial \xi_i^k, \lim_{\xi_i \to -0} \partial^k F[\varphi]/\partial \xi_i^k, \varphi \in \Phi.$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначається співвідношенням

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F^{-1}[\psi]\rangle, \forall \psi \in \Psi.$$

Із властивостей лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Фур'є (прямого і оберненого) основних функцій випливає лінійність і неперервність функціоналу $F[f]$ над простором $\Psi = F[\Phi]$. Отже, $F[f] \in \Psi'$, $\forall f \in \Phi'$.

Якщо $f \in \Phi'$ – згортувач в просторі Φ, то $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, $\forall \varphi \in \Phi$; при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі Ψ [9].

2. Властивості фундаментального розв'язку багатоточкової задачі. Нехай

$a\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ – неперервна на $\mathbb{R}^n$, однорідна порядку γ функція (тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$), γ – фіксоване число з множини $(1,+\infty) \setminus \{2,3,4,\dots\}$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, яка задовольняє умови:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}\ \exists c_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $|D_x^k a(x)| \le c_k \|\sigma\|^{\gamma-|k|}$;

2) $\exists \delta_0 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$: $a(x) \ge \delta_0 \|x\|^\gamma$.

Із результатів, отриманих у праці [9] випливає, що псевдодиференціальний оператор $\Delta_\gamma := F^{-1}[a(\sigma)F]$ визначений і неперервний у просторі Φ.

Для еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + A_\gamma u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi, \tag{1}$$

задамо нелокальну багатоточкову задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \dots \mu_m(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{2}$$

де $\mu,\ \mu_1,\ \dots,\ \mu_m > 0$, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T),\Phi)$ задачі (1), (2) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, тому припускаємо, що функція φ є елементом простору Φ. Введемо позначення $F[\varphi](\sigma) = \tilde\varphi(\sigma)$ і шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}[v(t,\sigma)](x), (t,x) \in \Pi.$$

Для функції $v\colon \Pi \to \mathbb{R}$ дістанемо задачу (з параметром σ):

$$dv(t,\sigma)/dt + a(\sigma)v(t,\sigma) = 0, (t,x) \in \Pi, \tag{3}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde\varphi(\sigma), \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Загальний розв'язок рівняння (3) набуває вигляду

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-ta(\sigma)\}, (t,\sigma) \in \Pi, \tag{5}$$

де c – довільна стала. Підставивши (5) в (4), отримаємо вираз для сталої c:

$$c = \tilde\varphi(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}, \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Використавши (6), отримаємо формулу для розв'язку задачі (3), (4):

$$v(t,\sigma) = \tilde\varphi(\sigma)\exp\{-ta(\sigma)\}\times$$
$$\times\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}, (t,x) \in \Pi.$$

Отже, розв'язок задачі (1), (2) набуває вигляду

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(t,\sigma)\exp\{i(x,\sigma)\}d\sigma, (t,x) \in \Pi.$$

Введемо позначення:

$$\Gamma(t,t_1,\dots,t_m;x) \equiv \Gamma(t,x) := F^{-1}[Q(t,\sigma)](x),$$

де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}\times$$
$$\times\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Тоді формально отриманий розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$, задачі (1), (2) запишеться у вигляді згортки:

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\times$$
$$\times\exp\{-i(\sigma,\xi)\}d\xi\Bigg)\exp\{i(\sigma,x)\}d\sigma =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg((2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma)\exp\{i(\sigma,x-\xi)\}d\sigma\Bigg)\varphi(\xi)d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = \Gamma(t,x)*\varphi(x), (t,x) \in \Pi. \tag{7}$$

Зауважимо, що законність проведеної в (7) заміни порядку інтегрування випливає з лем 1, 2, у яких досліджуються властивості функцій $Q(t,\sigma)$ та $\Gamma(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$.

Лема 1. *При фіксованому $t \in (0,T)$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна по $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ і для її похідних вірними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le \gamma_s \varphi_s(t) \exp\{-ta(\sigma)\} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|^{\omega_i}, \tag{8}$$

$s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i \ne 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma_s > 0$ – *стала, не залежна від* t, $\varphi_s(t) = \sum_{p=0}^{|s|} t^p$,

$$\omega_i = \begin{cases} s_i(\gamma - 1), & \textit{якщо } |\sigma_i| \ge 1, \\ & i \in \{1, \dots, n\}, \\ \gamma - s_i, & \textit{якщо } |\sigma_i| < 1, \sigma_i \ne 0, \\ & i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Доведення цього твердження проводиться з використанням формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, а також властивості функції-символа $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Зауваження. Нехай $\tilde{Q}(t,\sigma) := \tilde{Q}_1(\sigma) \cdot \tilde{Q}_2(t,\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, де

$$\tilde{Q}_1(\sigma) = \exp\{-a(\sigma)\},$$

$$\tilde{Q}_2(t,\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t^{-1} t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Із властивості однорідності функції $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ випливають такі співвідношення

$$Q(t, t^{-1/\gamma}\sigma) = \exp\{-ta(t^{-1/\gamma}\sigma)\} \times$$

$$\times \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(t^{-1/\gamma}\sigma)\}\Big)^{-1} =$$

$$= \exp\{-a(\sigma)\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t^{-1} t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1} =$$

$$= \tilde{Q}_1(\sigma) \cdot \tilde{Q}_2(t,\sigma) = \tilde{Q}(t,\sigma).$$

На підставі оцінок (8) стверджуємо, що

$$\sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{|k|=0}^{p} |\sigma^k D_\sigma^k Q(t,\sigma)| \right\} \le c_p < +\infty,$$

$$p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_p \equiv c_p(t) > 0$. Звідси вже отримуємо, що $Q(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, при кожному $t > 0$ є елементом простору Ψ. Тоді функція $\Gamma(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, як функція x, є елементом простору Φ (при кожному $t > 0$).

Функція

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma) \exp\{i(x,\sigma)\} d\sigma \tag{9}$$

є неперервною функцією параметра $t \in (0,T)$. Справді, із властивостей функції a: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ та обмежень на параметри задачі (1), (2) випливає, що для $t \ge t_0 > 0$

$$|Q(t,\sigma)| \le \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} \exp\{-t_0 a(\sigma)\} \le$$

$$\le \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} \exp\{-t_0 \delta_0 \|\sigma\|^\gamma\}.$$

Звідси вже дістаємо, що інтеграл (9) збігається рівномірно в довільній смузі $\{(t,x) : t_0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$, $t_0 > 0$, тому функція Γ є неперервною у кожній точці проміжку $(0,T]$. Аналогічно доводиться диференційовність по t функції Γ.

Оскільки

$$Q(t,\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x) \exp\{i(x,\sigma)\} d\sigma, a(0) = 0,$$

$$(t,\sigma) \in \Pi,$$

то вірною є рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x) dx = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1}, \forall t \in (0,T].$$

Проведемо окремо оцінки функції $\Gamma\colon \Pi \to \mathbb{R}$ та її похідних (по x) залежно від параметра t.

Лема 2. *Для функції* $\Gamma\colon \Pi \to \mathbb{R}$ *та її похідних правильними є оцінки:*

$$|D_x^k \Gamma(t,x)| \le \frac{t^{-([\gamma](\gamma-1)+\gamma(n-1))/\gamma - |k|}}{(1 + \|x\|)^{n+[\gamma]+|k|}},$$

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$$t \in (0, T^*], T^* = \min\{1, T\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення. Спочатку доведення леми проведемо у випадку $n = 1$. Після заміни змінної інтегрування $\sigma = t^{-1/\gamma} y$ отримаємо таке зображення для функції Γ:

$$\Gamma(t, x) = (2\pi)^{-n} t^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(t, y) \times$$

$$\times \exp\{-it^{-1/\gamma} xy\} dy = t^{-1/\gamma} \Gamma_0(t, x),$$

де

$$\Gamma_0(t, z) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(t, y) \exp\{-izy\} dy,$$

$$z = t^{-1/\gamma} x.$$

Якщо $z \neq 0$, то інтегруючи $s = 1 + [\gamma]$ разів частинами, подамо $\Gamma_0(t, z)$ у вигляді

$$\Gamma_0(t, z) = (2\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \tilde{Q}(t, y) \times$$

$$\times \exp\{-izy\} dy = (2\pi)^{-1} \frac{\tilde{c}}{z^s} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{|y| \geq \varepsilon} D_y^s \tilde{Q}(t, y) \exp\{-izy\} dy + \Phi(\varepsilon, z) \right].$$

Символом $\Phi(\varepsilon, z)$ позначено позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $D_y^l \tilde{Q}(t, y) \exp\{-izy\}$, $0 \leq l \leq s - 1$, із значеннями в точках $y = \pm\varepsilon$. Із оцінок (8) (випадок $n = 1$) випливає, що для $|y| < 1$, $y \neq 0$, вірною є нерівність $|D_y^l \tilde{Q}(t, y)| \leq c|y|^{\gamma - l}$, $c = c(t) > 0$, причому $\gamma - l \geq \gamma - [\gamma] = \{\gamma\}$, якщо $0 \leq k \leq s - 1$, $s = 1 + [\gamma]$. Звідси отримуємо, що $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \Phi(\varepsilon, z) = 0$ у кожній точці $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При $y \to \infty$ вказані позаінтегральні доданки прямують до нуля за рахунок спадання на нескінченності функції $\tilde{Q}(t, y)$ та її похідних (при фіксованому $t > 0$).

Врахувавши оцінки похідних функції $\tilde{Q}(t, y)$ знайдемо, що

$$|\Gamma_0(t, z)| \leq \frac{\tilde{c}_s}{|z|^s} t^{-(s-1)} \int_{|y| \geq \varepsilon} \exp\{-a(y)\} |y|^\omega dy \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{c}'_s}{|z|^s} t^{-(s-1)} \int_0^\infty \exp\{-a(y)\} y^\omega dy,$$

$s = 1 + [\gamma]$, $t \in (0, T^*]$. Підінтегральна функція $\exp\{-a(y)\} y^\omega$ має інтегровну особливість в точці $y = 0$. Справді, оскільки $\omega = \gamma - s$, якщо $|y| < 1$, $y \neq 0$, то при вказаному виборі s маємо, що $\omega = \gamma - 1$, а звідси і випливає збіжність відповідного інтеграла. Отже,

$$|\Gamma(t, x)| = t^{-1/\gamma} |\Gamma_0(t, z)| \leq$$

$$\leq \text{const} \frac{t^{-1/\gamma} \cdot t^{-(s-1)}}{|z|^s} = \text{const} \frac{t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma}}{|x|^{1+[\gamma]}}, x \neq 0.$$

Якщо це врахувати, то $|\Gamma_0(t, x)| \leq \text{const}$ для всіх $t \in (0, T^*]$ і $z \in \mathbb{R}$, а також те, що $t^{-1/\gamma} \leq t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma}$ для $t \in (0, T^*]$, то прийдемо до нерівності

$$|\Gamma(t, x)| \leq c t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma} (1 + |x|)^{-(1+[\gamma])},$$

$$t \in (0, T^*], x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$D_x^k \Gamma(t, x) = (2\pi)^{-1} (-i)^k t^{-(1+k)/\gamma} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(t, y) \exp\{-izy\} y^k dy, z = t^{-1/\gamma} x.$$

Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено у випадку $k = 0$ та зінтегрувавши частинами $s = 1 + [\gamma] + k$ разів отримаємо, що

$$D_x^k \Gamma(t, x) = \frac{c_s}{z^s} t^{-(1+k)/\gamma} \int_{\mathbb{R}} D_y^s (\tilde{Q}(t, y) y^k) \times$$

$$\times \exp\{-izy\} dy, z \neq 0.$$

Врахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій дістанемо, що оцінка похідних функції Γ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду

$$\frac{c_s}{|z|^s} \left[\int_{\mathbb{R}} |y|^k \times \right.$$

$$\times|D_y^s\tilde{Q}(t,y)|dy + ks\int\limits_{\mathbb{R}}|y|^{k-1}|D_y^{s-1}\tilde{Q}(t,y)|dy+$$

$$+k(k-1)\frac{s(s-1)}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}|y|^{k-2}|D_y^{s-2}\tilde{Q}(t,y)|dy+\dots$$

$$\left.+c^k_{1+[\gamma]+k}k!\int\limits_{\mathbb{R}}|D_y^{1+[\gamma]}\tilde{Q}(t,y)|dy\right]. \qquad (10)$$

Кожен із інтегралів у виразі (10) має інтегровну особливість у точці $y=0$. Справді, розглянемо один із доданків суми (10), що відповідає індексу $k-p$, $0\le p\le k$:

$$2k(k-1)\cdot\ldots(k-p)C^{k-p}_{1+[\gamma]+k}\cdot J,$$

де

$$J=\int\limits_0^\infty y^{k-p}|D-y^{s-p}\tilde{Q}(t,y)|dy, s=1+[\gamma]+k.$$

Із нерівностей (8) дістаємо, що для $t\in(0,T^*]$ вірною є оцінка

$$J\le\beta t^{-(s-p-1)}\int\limits_0^\infty\exp\{-a(y)y^{k-p+\omega}\}dy.$$

У околі точки $y=0$ ($|y|<1$, $y\ne0$) підінтегральна функція має оцінку

$$\exp\{-a(y)\}y^{k-p+\omega}\le y^{k-p+\gamma-(s-p)}=$$

$$=y^{\gamma-[\gamma]-1}=\frac{1}{y^{1-\{\gamma\}}},$$

а звідси і випливає збіжність відповідного невласного інтеграла, бо $0<1-\{\gamma\}<1$. Оцінюючи аналогічно кожний інтеграл у сумі (10) і виділяючи при цьому залежність від параметра $t\in(0,T^*]$, прийдемо до нерівності

$$|D_x^k\Gamma(t,x)|\le c_k\frac{t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma-k}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]+k}}, t\in(0,T^*],$$

$$x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{N}.$$

Для доведення леми у випадку $n>1$ скористаємося тотожністю

$$L\exp\{-i(z,y)\}=\exp\{-i(z,y)\},$$

$$L\equiv i\|z\|^{-2}\sum_{i=1}^n z_i\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, і проінтегруємо $q=n+[\gamma]+|k|$ разів ($k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n_+$) інтеграл, записаний у правій частині рівності

$$\Gamma(t,x)=(2\pi)^{-n}t^{-n/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde{Q}(t,y)\exp\{-i(z,y)\}dy,$$

$$(t,x)\in\Pi.$$

Тоді дістанемо співвідношення

$$\Gamma(t,x)=(2\pi)^{-n}t^{-n/\gamma}(-1)^q\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-i(z,y)\}L^q\tilde{Q}(t,y)dy,$$

з якого випливає, що

$$|D_x^k\Gamma(t,x)|\le(2\pi)^{-n}t^{-(n+|k|)/\gamma}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}|y_1|^{k_1}\dots|y_n|^{k_n}|L^q\tilde{Q}(t,y)|dy, k\in\mathbb{Z}^n_+.$$

Врахувавши (8), а також вигляд оператора L, прийдемо до такої оцінки:

$$|L^q\tilde{Q}(t,y)|\le c_q\|x\|^{-q}t^{-(q-1)}\exp\{-a(y)\}\times$$

$$\times\|y\|^{n\gamma-q}, q=n+[\gamma]+|k|, \qquad (11)$$

$$t\in(0,T^*], y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Скориставшись оцінкою (11) переконаємося в тому, що при вказаному виборі q відповідний n-кратний інтеграл є збіжним. Зокрема, у околі точки $y=0$ після переходу до узагальнених сферичних координат дослідження зводиться до дослідження на збіжність звичайного інтеграла з підінтегральною функцією $r^{n-1+n\gamma-q+|k|}$, $r>0$, який є збіжним. Виділивши далі у явному вигляді залежність від параметра t, прийдемо до потрібних оцінок. Лема доведена.

Лема 3. *Функція* $\Gamma(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями у просторі* Φ, *диференційовна по* t.

Доведення цього твердження аналогічне доведенню леми 1 із праці [6].

Як наслідок з леми 3 дістаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*\Gamma)(t,\cdot)=f*\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\cdot),\forall f\in\Phi',t\in(0,T].$$

Лема 4. *У просторі* Φ' *вірним є таке граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}\Gamma(t,\cdot)-\mu_1\lim_{t\to t_1}\Gamma(t,\cdot)-\cdots-$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}\Gamma(t,\cdot)=\delta, \qquad (12)$$

де δ *– дельта-функція Дірака.*

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є F: $\Phi'\to\Psi'$ та неперервністю $\Gamma(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі Φ, співвідношення (12) замінимо еквівалентним співвідношенням

$$\mu\lim_{t\to+0}Q(t,\sigma)-\mu_1\lim_{t\to t_1}Q(t,\sigma)-\cdots-$$
$$+\mu_m\lim_{t\to t_m}Q(t,\sigma)=1, \qquad (13)$$
$$Q(t,\cdot)=F[\Gamma(t,\cdot)],1=F[\delta].$$

Співвідношення (13) розглядаємо у просторі Ψ'. Для доведення (13) візьмемо довільну функцію $\psi\in\Psi$ і скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu\lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle-\mu_1\lim_{t\to t_1}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle-\cdots-$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle=$$
$$=\mu\lim_{t\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma-$$
$$-\mu_1\lim_{t\to t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma-\cdots-$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma=$$
$$=\mu\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(0,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma-\mu_1\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t_1,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma-$$
$$-\cdots-\mu_m\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t_m,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma=\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\mu Q(0,\sigma)-$$
$$-\mu Q(t_1,\sigma)-\cdots-\mu_m Q(t_m,\sigma)]\psi(\sigma)d\sigma=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\sigma)d\sigma=\langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси дістаємо, що виконується (13), а, отже, правильним є співвідношення (12). Лема доведена.

Символом Φ'_* позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ', які є згортувачами у просторі Φ.

Наслідок 1. *Нехай*

$$\omega(t,x)=(\varphi*\Gamma)(t,x),\varphi\in\Phi'_*,(t,x)\in\Pi.$$

Тоді у просторі Φ' *вірним є таке граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}\omega(t,\cdot)-\mu_1\lim_{t\to t_1}\omega(t,\cdot)-\cdots-$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m-0}\omega(t,\cdot)=\varphi. \qquad (14)$$

Доведення. Із умови $\varphi\in\Phi'_*$ та властивості неперервності $\Gamma(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t\in(0,T]$ із значеннями у просторі Φ випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t\in(0,T]$ із значеннями в просторі Φ. Тоді урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є F: $\Phi'\to\Phi'$ та формули

$$F[\varphi*\Gamma]=F[\varphi]\cdot F[\Gamma]=F[\varphi]\cdot Q(t,\cdot),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції $\varphi\in\Phi'_*$, співвідношення (14) запишемо в еквівалентному вигляді

$$\mu\lim_{t\to+0}F[\omega(t,\cdot)]-\mu_1\lim_{t\to t_1}F[\omega(t,\cdot)]-\cdots-$$
$$-\mu_m\lim_{t\to t_m}F[\omega(t,\cdot)]=F[\varphi]\Bigg(\mu\lim_{t\to+0}Q(t,\cdot)-$$
$$-\mu_1\lim_{t\to t_1}Q(t,\cdot)-\cdots-\mu_m\lim_{t\to t_m}Q(t,\cdot)\Bigg)=F[\varphi].$$

Врахувавши співвідношення (13) дістаємо, що (14) виконується.

Зазначимо, що функція Γ є розв'язком рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\sigma)]=F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

З іншого боку маємо, що

$$A_\gamma \Gamma(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)F[\Gamma(t,x)]] =$$

$$= F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

Отже, функція Γ задовольняє рівняння (1).

Надалі функцію Γ називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі (ФРБЗ) для рівняння (1).

З наслідку 1 випливає, що для рівняння (1) багатоточкову задачу можна ставити так. Для (1) розглянемо багатоточкову умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \dots -$$

$$-\mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \qquad (15)$$

де

$$\varphi \in \Phi'_*, \quad \mu, \mu_1, \dots, \mu_m > 0,$$

$$\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k, 0 < t_1 < \dots < t_m = T.$$

Під розв'язком задачі (1), (15) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T),\Phi)$, яка задовольняє рівняння (1) та умову (15) у тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,\cdot) - \dots -$$

$$-\mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,\cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються у просторі Φ'.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема. *Задача (1), (15) коректно розв'язна у класі узагальнених функцій Φ'_*. Розв'язок записується у вигляді згортки*

$$u(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x), (t,x) \in \Pi,$$

де Γ – ФРБЗ для рівняння (1).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що $u\colon \Pi \to \mathbb{R}$ задовольняє рівняння (1). Справді, як випливає з леми 3

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi * \Gamma)(t,x) = \varphi * \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial t},$$

$$(t,x) \in \Pi.$$

Крім того

$$A_\gamma u(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)F[\varphi * \Gamma(t,\cdot)]](t,x), (t,x) \in \Pi.$$

Оскільки φ – згортувач у просторі Φ, то

$$F[\varphi * \Gamma] = F[\varphi] \cdot F[\Gamma] = F[\varphi] \cdot Q(t,\cdot).$$

Отже,

$$A_\gamma u(t,x) = F^{1-}[a(\sigma)Q(t,\cdot)F[\varphi]] =$$

$$= -F^{-1}[\partial/\partial t Q(t,\cdot)F[\varphi]] =$$

$$= -F^{-1}[F[\partial\Gamma(t,\cdot)/\partial t]F[\varphi]] =$$

$$= -F^{-1}[F[\varphi * \partial\Gamma(t,\cdot)/\partial t]] =$$

$$= -(\varphi * \partial\Gamma(t,\cdot)/\partial t)(t,x), (t,x) \in \Pi.$$

Звідси випливає, що функція $u\colon \Pi \to \mathbb{R}$ задовольняє рівняння (1). З наслідку 1 дістаємо, що u задовольняє крайову умову (15) у вказаному сенсі. Зазначимо також, що u неперервно залежить від граничної функції $\varphi \in \Phi'_*$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Доведення єдиності розв'язку задачі (1), (15) аналогічне доведенню єдиності двоточкової задачі для рівняння (1) (див. [6], теорема 1).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия / А.А. Дезин // Изв. АН ССР. Сер. мат. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 117 – 131.

2. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов / В.К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 1. – С. 117 – 131.

3. *Романко В.К.* Граничные задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений / В.К. Романко // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 812 – 816.

4. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / [Пташник Б.Й., Ільків В.С, Кміть І.Я.. Поліщук В.М.]. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

5. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі / Михайло Іванович Матійчук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

6. *Городецький В.В.* Задача Діріхле для одного класу еовлюційних рівнянь / Василь Городецький, Ярослав Дрінь // Науковий вісник Чернівецького

університету: Зб. наук. праць. Вип. 336 – 337. Математика. – Чернівці: рута, 2007. – С. 61 – 78.

7. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / Василь Васильович Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

8. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

9. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку / Василь Васильович Городецький. – Чернівці: Рута, 205. – 291 с.