УДК 517.9

©2010 р. Т.В. Добродзій

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ, ЩО ЛІНІЙНІ ЗА КЕРУВАННЯМ

В статті показано, що оптимальне керування усередненої задачі є ε-оптимальним для точної задачі на асимптотично скінчених (порядку $\frac{1}{\varepsilon}$) і на нескінчених часових інтервалах, та виписані явні оцінки на малий параметр.

In this article it is shown that optimal control of averaged problem is ε-optimal for precise problem on asymptotically finite (order $\frac{1}{\varepsilon}$) and on infinite time intervals. The explicit estimations on small parameter are given.

1. Вступ При дослідженні задач оптимального керування ефективним виявилося застосування методу усереднення, що дозволило звести розв'язання початкової неавтономної задачі до більш простої усередненої задачі. Даним питанням присвячено низку робіт (див., напр., [1-4]).

В даній роботі отримано явні оцінки близькості (за малим параметром) траєкторій точної та усередненої систем у випадку лінійних за керуванням систем, коефіцієнти яких є періодичними по t функціями.

2. Дослідження на скінченному часовому інтервалі

2.1. Постановка задачі. Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \varepsilon \left[A(t,x) + B(x)u_\varepsilon \right] \\ x(0) = x_0, \end{gathered} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon(u) = \varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \left[C(t,x) + F(t,u) \right] dt \to \inf,$$

де $0 < \varepsilon < 1$ – малий параметр, $t \geq 0$, $T > 0$ – деяка константа, $x \in D$ – фазовий вектор, D – область в R^n, $u_\varepsilon \in U_\varepsilon \subset R^m$ – вектор керування, U_ε – опукла і замкнена множина, $0 \in U_\varepsilon$ для довільного ε, A – вектор-функція, періодична по t з періодом Θ, B-$n \times m$-матриця. Вважаємо, що $F(t,u)$ – опукла по u для довільного фіксованого t, неперервна за сукупністю змінних і така, що існує $a > 0$ та $\alpha \in R$, що $F(t,u) \geq a|u|^p + \alpha$ та для деякого $K > 0$, $\varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} F(t,0)dt \leq K$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:
1) $A(t,x)$ - визначена, вимірна по t при кожному x, $B(x)$ - визначена при $x \in D$, а $C(t,x)$ - визначена та неперервна при $t \geq 0$, $x \in D$;
2) $A(t,x)$, $B(x)$, $C(t,x)$ - обмежені сталою M при $t \geq 0$, $x \in D$;
3) $A(t,x)$, $B(x)$, $C(t,x)$ - ліпшіцеві по x зі сталою L в області D.

Керування $u_\varepsilon(t)$ вважаються допустимими, якщо
a) $u_\varepsilon(t) \in L_p(0, \frac{T}{\varepsilon})$ для деякого $p > 1$;
b) $u_\varepsilon(t) \in U_\varepsilon$ при $t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$;
c) існує $\varepsilon_0 > 0$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі Коші (1) $x_\varepsilon(t, u_\varepsilon)$ визначений і єдиний на $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ та лежить в області D.

Множину таких керувань $u_\varepsilon(t)$ позначимо Ω_ε.

Поставимо у відповідність задачі (1) на $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ наступну усереднену задачу:

$$\begin{gathered} \dot{y} = \varepsilon \left[A_0(y) + B(y)\bar{u}_\varepsilon \right] \\ y(0) = x_0, \end{gathered} \tag{2}$$

з критерієм якості

$$\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \left[C(t,y) + F(t,\bar{u}) \right] dt \to \inf,$$

де $A_0(x)=\frac{1}{\Theta}\int\limits_0^{\Theta}A(t,x)dt$, $\bar u_\varepsilon\in U_\varepsilon$, допустимі керування для усередненої системи задовольняють ті ж умови, що і допустимі керування задачі (1), причому умова c) виконується для розв'язку $y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ усередненої задачі Коші (2). Множину таких керувань позначимо $\overline{\Omega}_\varepsilon$.

Позначимо $J_\varepsilon^*=\inf\limits_{u_\varepsilon(t)\in\Omega_\varepsilon}J_\varepsilon(u)$, $\bar J_\varepsilon^*=\inf\limits_{\bar u_\varepsilon(t)\in\overline{\Omega}_\varepsilon}\bar J_\varepsilon(\bar u)$.

У подальшому будемо вважати, що для усередненої системи виконується наступна умова:

(A) Якщо керування $\bar u_\varepsilon\in\overline{\Omega}_\varepsilon$ задовольняють оцінку $\varepsilon\int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}}|\bar u_\varepsilon(t)|^p dt\le C$, де $C>0$ та не залежить від ε і $\bar u_\varepsilon$, то існує $\varepsilon_0=\varepsilon_0(C)$, що при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ розв'язок усередненої задачі $y_\varepsilon(t,\bar u_\varepsilon)$ лежить при $t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ в області D разом з деяким ρ-околом, причому ρ не залежить від ε і від $\bar u_\varepsilon$.

2.2. Основні твердження

Лема 1. *При виконанні умов* 1)-3) *та умови* (A) *для довільного* $T>0$ *існує*

$$\varepsilon_1=\min\left\{\varepsilon_0,\left(\frac{\rho}{4\max\{\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}\}e^{L\left(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}}\right)}}\right)^q\right\},$$

що при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ *розв'язок точної системи* $x_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ *визначений на* $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$, *і для кожного допустимого керування справедлива оцінка*

$$|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon)-y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)|\le\varepsilon^{\frac{1}{q}}\widetilde{C},\quad t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right],$$

де q *визначається з умови* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$\widetilde{C}=2\max\left\{\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}\right\}e^{L\left(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}}\right)}$,

$\widetilde{C_1}=2M\Theta(TL+1)$, $\widetilde{C_2}=2LMTC^{\frac{1}{p}}\Theta^{\frac{1}{q}}$.

Доведення даної леми є аналогічним доведенню леми 1 [5] з урахуванням періодичності по t вектор-функції $A(t,x)$, де при оцінці інтегралу I_1 відрізок $\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ ділиться на частини довжинами періоду Θ, що дозволяє отримати явний вигляд сталої $\widetilde{C}$.

Теорема 1. *При виконанні умов* 1)-3) *та умови* (A) *при всіх допустимих* ε *точна та усереднена задачі мають розв'язки, і для довільного* $T>0$ *існує*

$$\varepsilon_1=\min\left\{\varepsilon_0,\left(\frac{\rho}{4\max\{\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}\}e^{L\left(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}}\right)}}\right)^q\right\},$$

що при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ *виконується нерівність*

$$|J_\varepsilon^*-J_\varepsilon(\bar u_\varepsilon^*)|\le\varepsilon^{\frac{1}{q}}(1+2LT)\widetilde{C},$$

де $\bar u_\varepsilon^*$ *- оптимальне керування усередненою системою,*

$\widetilde{C_1}=2M\Theta(TL+1)$, $\widetilde{C_2}=2LMTC^{\frac{1}{p}}\Theta^{\frac{1}{q}}$,

$\widetilde{C}=2\max\left\{\widetilde{C_1},\widetilde{C_2}\right\}e^{L\left(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}}\right)}$.

Доведення цієї теореми проводиться за аналогічною схемою до доведення теореми 3.1 [5] з використанням оцінки, отриманої в лемі 1.

3. Дослідження на півосі

3.1. Постановка задачі. В цій частині будемо розглядати задачу оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot x&=\varepsilon\left[A(t,x)+B(x)u_\varepsilon\right]\\ x(0)&=x_0,\end{aligned}\qquad(8)$$

з критерієм якості

$J_\varepsilon(u)=\int\limits_0^{\infty}[C(t,x)+F(t,u)]dt\to\inf$,

де $0<\varepsilon<1$ – малий параметр, $t\ge0$, $x\in D$ – фазовий вектор, D – обмежена область в R^n, $u_\varepsilon\in U_\varepsilon\subset R^m$ – вектор керування, U_ε – опукла, замкнена множина, $0\in U_\varepsilon$ для довільного ε, A – вектор-функція, періодична по t з періодом Θ, B – $n\times m$ матриця. Вважаємо, що функція $F(t,u)$ – опукла по u для довільного фіксованого t, напівперервна знизу по u і така, що існує $a>0$, $p>1$, для яких $F(t,u)\ge a|u|^p$ та для деякого $K>0$: $\int\limits_0^{\infty}F(t,0)dt\le K$.

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

1) $A(t,x)$, $C(t,x)$- визначені і неперервні при $t\ge0$, $x\in D$, $B(x)$ - визначена і неперервна при $x\in D$;

2) $A(t,x)$, $B(x)$ - обмежені сталою M при

$t \geq 0$, $x \in D$, $C(t,x) \geq 0$ при $t \geq 0$, $x \in D$ та існує $y \in D$, що $\int\limits_0^\infty C(t,y)dt < \infty$;

3) $A(t,x)$, $B(x)$ - ліпшіцеві по x зі сталою L в області D, а для $C(t,x)$ виконується нерівність $|C(t,x) - C(t,y)| \leq \beta(t)|x-y|$, де $\int\limits_0^\infty \beta(t)dt = C_\beta < \infty$ при $t \geq 0$, $x \in D$, $y \in D$.

Керування $u_\varepsilon(t)$ вважаються допустимими, якщо

$a_1)u_\varepsilon(t) \in L_p(0,\infty)$;

$b_1)u_\varepsilon(t) \in U_\varepsilon$ майже при всіх (за мірою Лебега) $t \geq 0$;

$c_1)$існує $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі Коші (8) $x_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ визначений і єдиний при $t \geq 0$ та лежить в області D;

$d_1)$ $J_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$.

Множину таких керувань $u_\varepsilon(t)$ позначимо Ω_ε.

Поставимо у відповідність задачі (8) при $t \geq 0$ наступну усереднену задачу:

$$\begin{array}{c} \dot{y} = \varepsilon\left[A_0(y) + B(y)\bar{u}_\varepsilon\right] \\ y(0) = x_0, \end{array} \tag{9}$$

з критерієм якості

$\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \int\limits_0^\infty [C(t,y) + F(t,\bar{u})]dt \to \inf$, де $A_0(x) = \frac{1}{\Theta}\int\limits_0^\Theta A(t,x)dt$, допустимі керування для усередненої системи задовольняють ті ж умови, що і допустимі керування задачі (8), причому умови $c_1)$ і $d_1)$ виконується для розв'язку $y_\varepsilon(t,\bar{u}_\varepsilon)$ усередненої задачі Коші (9). Множину таких керувань позначимо $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Позначимо $J^*_\varepsilon = \inf\limits_{u_\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon} J_\varepsilon(u)$, $\bar{J}^*_\varepsilon = \inf\limits_{\bar{u}_\varepsilon(t) \in \overline{\Omega}_\varepsilon} \bar{J}_\varepsilon(\bar{u})$.

Будемо вважати, що для усередненої системи виконується умова:

$(A1)$ розв'язок $y_\varepsilon(t,\bar{u}_\varepsilon)$ є експоненціально стійким, тобто існує $\sigma > 0$ таке, що при виконанні нерівності

$$|y_\varepsilon(t_0,\bar{u}_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t_0,\bar{u}_\varepsilon)| < \sigma$$

справедливою буде нерівність $|y_\varepsilon(t,\bar{u}_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t,\bar{u}_\varepsilon)| < N|y_\varepsilon(t_0,\bar{u}_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t_0,\bar{u}_\varepsilon)|e^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \geq t_0$, де N, α - деякі додатні сталі $y^1_\varepsilon(t,\bar{u}_\varepsilon)$ - довільний розв'язок системи (9).

3.2. Основні твердження

Лема 2. *При виконанні умов* 1)-3), (A) *та* $(A1)$ *для довільного* $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_1$, *де* $\widetilde{\varepsilon}_1 = \min\left\{\varepsilon_0, \left(\frac{\rho}{4\widetilde{C_0}(1+N)}\right)^q, \left(\frac{\sigma}{3\widetilde{C_0}}\right)^q\right\}$, *розв'язок точної системи (8) визначений при* $t \geq 0$ *та справедлива оцінка*

$$|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}}\widetilde{C_0}(1+N),$$

де $\widetilde{C_0} = \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L\left[\frac{ln2N}{\alpha} + C^{\frac{1}{p}}\left(\frac{ln2N}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\right]}$, $\widetilde{C_1} = 2M\Theta(\frac{Lln2N}{\alpha} + 1)$, $\widetilde{C_2} = 2LM\frac{ln2N}{\alpha}C^{\frac{1}{p}}\Theta^{\frac{1}{q}}$.

Доведення. Розглянемо розв'язок $y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ усередненої системи (9). Оскільки виконується умова $(A1)$, то він є експоненціально стійким. Тому для довільного розв'язку $y^1_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ системи (9), такого, що виконується нерівність $|y_\varepsilon(t_0,u_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t_0,u_\varepsilon)| \leq \sigma$, маємо $|y_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq N|y_\varepsilon(t_0,u_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t_0,u_\varepsilon)|e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0$.

Знайдемо таке $t_1 = t_0 + T$, починаючи з якого $|y_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y^1_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq \frac{\sigma}{2}$ для деякого $\sigma > 0$, тобто $N\sigma e^{-\alpha(t_1-t_0)} = \frac{\sigma}{2}$, звідки $T = \frac{\ln 2N}{\alpha}$. Отже, при всіх $t \geq t_1$ розв'язок $y^1_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$, що починається в σ-околі розв'язку $y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$, буде лежати в $\frac{\sigma}{2}$-околі розв'язку $y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$. В силу леми 1 маємо, що за вказаним $T > 0$ можна знайти таке $\varepsilon_1 = \left(\frac{\rho}{8\widetilde{C_0}}\right)^q$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ та при $t \in [t_0, t_0+T]$ отримаємо $|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}}\max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\}e^{L(T + C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}$.

Розглянемо розв'язок $y^T_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ системи (9), такий що $y^T_\varepsilon(T,u_\varepsilon(T)) = x_\varepsilon(T,u_\varepsilon(T))$. Тоді справедлива наступна нерівність $|y^T_\varepsilon(T,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(T,u_\varepsilon)| \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}}\max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\}e^{L(T + C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}$. Враховуючи, що $y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ - експоненціально стійкий, то отримуємо що при $t \geq T$ справедлива нерівність $|y^T_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| < 2\varepsilon^{\frac{1}{q}}N\max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\}e^{L(T + C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}e^{-\alpha(t-T)}$,

$t \geq T$. Звідси при $t \geq T$ маємо оцінку

$$|y_\varepsilon^T(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}} N \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}, \qquad (10)$$

Враховуючи, що $e^{-\alpha T} = \frac{1}{2N}$, при $t = 2T$ та при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, де $\varepsilon_2 = \left(\frac{\sigma}{3\widetilde{C_0}}\right)^q$ отримуємо

$$|y_\varepsilon^T(2T,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(2T,u_\varepsilon)| \leq$$
$$\leq \varepsilon^{\frac{1}{q}} \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}. \qquad (11)$$

Оскільки $y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ лежить в області D з ρ-околом, то $y_\varepsilon^T(t,u_\varepsilon)$ лежить в області D з $\frac{\rho}{2}$-околом. Тому при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ справедливою є оцінка

$$|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon^T(t,u_\varepsilon)| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}} \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}, \qquad (12)$$

при $t \in [T, 2T]$.

Тоді з (10) і (12) при $t \in [T, 2T]$ та $\varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_0$, де $\widetilde{\varepsilon}_0 = \min\left\{\varepsilon_0, \left(\frac{\rho}{4\widetilde{C_0}(1+N)}\right)^q, \left(\frac{\sigma}{3\widetilde{C_0}}\right)^q\right\}$ отримуємо

$$|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq$$
$$\leq |x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon^T(t,u_\varepsilon)| + |y_\varepsilon^T(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}} \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}(1+N),$$

а при $t = 2T$, враховуючи (11), маємо

$$|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq$$
$$\leq 3\varepsilon^{\frac{1}{q}} \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L(T+C^{\frac{1}{p}}T^{\frac{1}{q}})}.$$

Тому, продовжуючи далі аналогічні міркування та враховуючи, що $T = \frac{\ln 2N}{\alpha}$, отримуємо оцінку $|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \leq$

$$\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}} \max\left\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\right\} e^{L[\frac{\ln 2N}{\alpha} + C^{\frac{1}{p}}(\frac{\ln 2N}{\alpha})^{\frac{1}{q}}]}(N+1)$$

при $t \geq 0$ та для довільного керування $u_\varepsilon(t)$, що задовольняє a) та b).

Лему доведено.

Теорема 2. *При виконанні умов* 1)-3), (A) *та* $(A1)$ *при всіх допустимих* ε *точна та усереднена задачі мають розв'язки,і для довільного* $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}_1$, *де* $\widetilde{\varepsilon}_1 = \min\left\{\varepsilon_0, \left(\frac{\rho}{4\widetilde{C_0}(1+N)}\right)^q, \left(\frac{\sigma}{3\widetilde{C_0}}\right)^q\right\}$ *виконується нерівність*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{q}}(1 + 2C_\beta \frac{ln2N}{\alpha})(1+N)\widetilde{C_0},$$

де $\bar{u}_\varepsilon^*$ *- оптимальне керування усередненою системою,*
$\widetilde{C_0} = \max(\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}) e^{L[\frac{ln2N}{\alpha} + C^{\frac{1}{p}}(\frac{ln2N}{\alpha})^{\frac{1}{q}}]}$,
$\widetilde{C_1} = 2M\Theta(\frac{Lln2N}{\alpha} + 1)$, $\widetilde{C_2} = 2LM\frac{ln2N}{\alpha}C^{\frac{1}{p}}\Theta^{\frac{1}{q}}$.

Доведення цієї теореми є аналогічним доведенню теореми 3.1 [5] з використанням оцінки, отриманої в лемі 2.

4. Висновки Запропоновані результати дають змогу вибором достатньо малого ε отримати потрібну оцінку близькості траєкторій початкової та усередненої систем та із заданою точністю знайти ε-оптимальне керування точної задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. —Киев:Одесса:Лыбидь—1992.—188 с.

2. *Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы.— Одесса:Астропринт—1999.—354 с.

3. *Grammel, G., Maizurna, I.* A sufficient condition for the uniform exponential stability of time-varying systems with noise // Nonlinear Analysis.— 2004.— **56**, No.7.— pp.951-960.

4. *Балабаева Н.П.* Устойчивость нелипшицевых дифференциальных уравнений с управлением // Весник СамГУ.— 2005.— **36**, No.2.— С.65-70.

5. *Добродзій Т.В.* Дослідження задач оптимального керування системами диференціальних рівнянь, лінійних по керуванню, методом усереднення // Український математичний вісник.— 2009.— **6**, No.2.— С.150-172.