УДК 517.956

©2010 р. В.В. Городецький, І.І. Дрінь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівецький торговельно-економічний інститут

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Знайдено необхідну й достатню умову розв'язності періодичної задачі Коші для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у банахових просторах періодичних функцій.

The necessary and sufficient condition for the solubility of the periodical Cauchy problem for a class of evolutionary pseudodifferential equations in Banach spaces of periodic functions is found.

Задачі математичної фізики, які описують коливання різних систем (наприклад, дослідження поздовжних коливань стержнів, вібрації кораблів, розрахунок стійкості валів, що обертаються, опис електромагнітних хвиль та ін.) призводять до вивчення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розв'язання таких задач вимагає використання різних класів узагальнених періодичних функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій, тощо), які, як показано В.І. Горбачук та М.Л. Горбачуком [1] вкладаються у простір формальних тригонометричних рядів і повністю описуються поведінкою коефіцієнтів Фур'є або частинних сум рядів Фур'є елементів з цих класів. Такі простори будуються за невід'ємним самоспряженим оператором з дискретним спектром та послідовністю $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка задовольняє певні умови. У даній роботі досліджується періодична задача Коші для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у банахових просторах періодичних функцій, які належать до відповідної шкали позитивних та негативних просторів, побудованої за оператором, що збігається з модулем оператора диференціювання в гільбертовому просторі $L_2([0,2\pi])$.

Через T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, i = \sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел. Зрозуміло, що відносно операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай T_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T = \bigcup_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається так: послідовність $\{P_n, n \geq 1\} \subset T$ збігається в T до полінома $P \in T$, якщо, починаючи з деякого номера, всі P_n належать до одного й того ж простору T_m (з деяким m) і $c_{k,p_n} \to c_{k,p}$ при $n \to \infty$ для кожного k: $0 \leq |k| \leq m$. Так визначена збіжність – це збіжність в T як індуктивної границі просторів T_m: $T = \lim_{m\to\infty} \operatorname{ind} T_m$.

У T природним чином вводяться операції диференіювання, множення поліномів та згортки

$$(P*Q)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)Q(x-t)dt, \quad \{P,Q\} \subset T,$$

які є неперервними в T.

Символом T' позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи T' назвемо

2π-періодичними узагальненими функціями. Операція диференціювання в T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)}, P\rangle = (-1)^l \langle f, P^{(k)}\rangle, \quad P \in T, k \in \mathbb{N}$$

(символом $\langle f, \cdot\rangle$ позначається дія функціоналу f на основний елемент). Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним. В T' визначена також операція згортки:

$$\langle f * g, P\rangle = \langle f_x, \langle g_y, P(x+y)\rangle\rangle, \quad \{f, g\} \subset T',$$

$$\forall P \in T.$$

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f \in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [1]. Звідси випливає також, що T лежить щільно в T'. Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f \in T'$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T' можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$).

Розглянемо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями: 1) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \geq c_\alpha \cdot \alpha^k$ (тобто $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ зростає швидше за експоненту); 2) $\exists M > 0$ $\exists h > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_{k+1} \leq M h^k m_k$ (стабільність відносно операції диференціювання); 3) $\exists A > 0\ \exists L > 0\ \forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_k \cdot m_l \leq A L^{k+l} m_{k+l}$ (стабільність відносно операції множення); 4) $\exists B > 0\ \exists s > 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \leq B s^k \min\limits_{0 \leq l \leq k} m_{k-l} m_l$ (стабільність відносно згортки). Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду: $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$.

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі c, $B > 0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c B^k m_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елементи простору $H\langle m_k\rangle$ називаються ультрадиференційовними функціями класу $\{m_k\}$. Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінки (1) виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми $\|\varphi\|_B = \sup\limits_{x,k}(|\varphi^{(k)}(x)|/B^k m_k)$. При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle \subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{B>0} H_B\langle m_k\rangle$. Отже, в $H\langle m_k\rangle$ природно ввести топологію індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k\rangle$: $H\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} \operatorname{ind} H_B\langle m_k\rangle$. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір. Внаслідок властивостей 2) – 4) послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. Відносно операцій множення та згортки цей простір утворює також топологічну алгебру [2]. Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією з послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку β [2].

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [2], що $H'\langle m_k\rangle$ збігається з проективною границею просторів $H'_B\langle m_k\rangle$, топологічно спряжених до $H_B\langle m_k\rangle$: $H'\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} \operatorname{pr} H'_B\langle m_k\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$.

У праці [2] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів. Покладемо $\rho(\lambda) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}(|\lambda|^k/m_k)$. Тоді

$$(f \in H\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)| \le c\rho^{-1}(\mu|k|));$$

$$(f \in H'\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\forall\mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}:\ \ |c_k(f)| \le c\rho(\mu|k|)).$$

Якщо $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(|\lambda|^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f \in T'$ правильними є наступні співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)| \le c\exp(-\mu|k|^{1/\beta}));$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\forall\mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}:\ \ |c_k(f)| \le c\exp(\mu|k|^{1/\beta})).$$

Нехай $G\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ – деяка неперервна парна функція. За функцією G у просторі T' побудуємо оператор

$$\hat{A}:\ T' \ni f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)c_k(f)e^{ikx} \in T', c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'. Оператор $\hat{A}$ – згортувач в T'. Справді, якщо розглянути узагальнену функцію $f_G = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} G(k)e^{ikx} \in T'$, то для довільної узагальненої функції $f \in T'$ маємо

$$\hat{A}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)c_k(f)e^{ikx} = f * f_G,$$

бо

$$c_k(f * f_G) = c_k(f)c_k(f_G) = c_k(f)G(k), k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $G(x) = |x|^\gamma$, $\gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором дробового диференціювання в T' [3].

Розглянемо нескінченно диференційовну на $[0,\infty)$ функцію $\varphi(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, яка набуває додатних значень і побудуємо в просторі T' за оператором $\hat{A}$ оператор $\varphi(\hat{A})$:

$$\varphi(\hat{A})f = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\hat{A}^j f, \forall f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \in T'.$$

Оскільки $\hat{A}^j f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} G^j(k)c_k(f)e^{ikx}$, то

$$\varphi(\hat{A})f = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} G^j(k)c_k(f)e^{ikx}\Big) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j G^j(k)\Big)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\varphi(G(k))e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)c_k(f)e^{ikx}, \lambda_k = G(k).$$

Нехай тепер X – банахів простір 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій такий, що $H\langle m_k\rangle \subset X \subset H'\langle m_k\rangle$, причому $\overline{H\langle m_k\rangle} = X$ і вказані вкладення є неперервними (за X можна взяти, наприклад, простір $L_1([0,2\pi])$), а $B := \varphi(\hat{A})|_X$ – звуження оператора $\varphi(\hat{A})$ на X. Оператор B надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором в X. Із неперервності вкладень $X \subset H'\langle m_k\rangle \subset T'$ випливає, що B – замкнений в X оператор, область визначення $\mathcal{D}(B)$ якого щільна в X і містить простір T. Справді, нехай $\{f_n, n \ge 1\} \subset \mathcal{D}(B)$, $f \in X$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} f$, $Bf_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$. Внаслідок неперервності вкладень $X \subset H'\langle m_k\rangle \subset T'$ маємо, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{T'} f$, $Bf_n \xrightarrow[n\to\infty]{T'} g$. Оскільки оператор $\varphi(\hat{A})$ неперервний в T', то $\varphi(\hat{A})f = g$. Отже, $f \in \mathcal{D}(\varphi(\hat{A})|_X) \equiv \mathcal{D}(B)$ і $Bf = g$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} + (-1)^{p+1}Bu = 0,$$

$$(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{2}$$

де $p \in \{1,2,3\}$. Під гладким розв'язком рівняння (2) розумітимемо функцію $u(t,\cdot) \in C^p((0,\infty),\mathcal{D}(B))$, яка задовольняє рівняння (2). Якщо $p \in \{2,3\}$, то припускаємо також, що u задовольняє умову: $\exists c > 0$: $\sup\limits_{t\in(0,\infty)} \|u(t,\cdot)\|_X \le c$.

Із результатів, отриманих в [4], випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $f \in X$. Тоді функція*

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) \exp\{-t(\varphi(\lambda_k))^{1/p} + ikx\},$$

$$\lambda_k = G(k), (t,x) \in \Omega,$$

є гладким розв'язком рівняння (2); $u(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t > 0$, $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$.

Говоритимемо, що задача Коші для рівняння (2) розв'язна в просторі X, якщо для довільного $f \in X$ гладкий розв'язок $u(t,\cdot)$ рівняння (2), що відповідає f, задовольняє граничне співвідношення $u(t,\cdot) \to f$, $t \to +0$, у просторі X.

Теорема 2. *Для того, щоб задача Коші для рівняння (2) була розв'язною у просторі X, необхідно й досить, щоб оператор $-B^{1/p}$ був генератором півгрупи класу C_0.*

Доведення. У просторі T' побудуємо сім'ю операторів $\{U(t), t > 0\}$:

$$U(t)f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) \exp\{-t(\varphi(\lambda_k))^{1/p} + ikx\},$$

$$\lambda_k = G(k), f \in T'.$$

Для кожного $t > 0$ $U(t)$ – лінійний неперервний оператор у просторі T', причому $U(t_1+t_2)f = U(t_1)U(t_2)f$, тобто сім'я операторів $\{U(t), t > 0\}$ утворює півгрупу, сильно неперервну на $(0,\infty)$. Оскільки $U(t)f \to f$, $t \to +0$, у просторі T' для довільного $f \in T'$, то півгрупа $U(t)$ належить до класу C_0, генератором якої є оператор $-(\varphi(\hat{A}))^{1/p}$. Справді, для довільного $f \in T'$ маємо

$$\frac{U(t)f - f}{t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\exp\{-t(\varphi(\lambda_k))^{1/p}\} - 1}{t} \times$$

$$\times c_k(f)e^{ikx} \xrightarrow[t\to+0]{T'} -\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi(\lambda_k))^{1/p} c_k(f) e^{ikx} =$$

$$= -(\varphi(\hat{A}))^{1/p} f.$$

Отже, $U'(0) = -(\varphi(\hat{A}))^{1/p}$.

При кожному $t > 0$ оператор $U(t)|_X$ – звуження оператора $U(t)$ на простір X – визначений на всьому просторі X і, внаслідок теореми 1, переводить його в $H\langle m_k\rangle$. Урахувавши неперервність вкладень $X \subset H'\langle m_k\rangle \subset T'$ та неперервність оператора $U(t)$ в T' стверджуємо, що оператор $U(t)|_X$ замкнений, а, отже, і неперервний в X. Таким чином, сім'я $\{U(t)|_X, t > 0\}$ лінійних неперервних операторів утворює півгрупу.

Припустимо тепер, що задача Коші для рівняння (2) розв'язна в просторі X. Це означає, що $U(t)|_X f \xrightarrow[t\to+0]{X} f$, тобто $U(t)|_X$ – півгрупа класу C_0. Генератором цієї півгрупи є оператор $-B^{1/p}$. Справді, нехай F – генератор півгрупи $U(t)|_X$. Область визначання $\mathcal{D}(F)$ оператора F складається, згідно з означенням (див. [5]), з тих елементів $f \in X$, для яких функція $U(t)|_X f$, довизначена в нулі як f, диференційовна (справа) в нулі; при цьому F є замкненим оператором і $\overline{\mathcal{D}(F)} = X$. Легко бачити, що для довільного $f \in \mathcal{D}(-B^{1/p})$

$$(U(t)|_X f - f)/t \xrightarrow[t\to+0]{X}$$

$$\longrightarrow -\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi(\lambda_k))^{1/p} c_k(f) e^{ikx} = -B^{1/p} f,$$

тобто $\mathcal{D}(-B^{1/p}) \subset \mathcal{D}(F)$ і $Ff = -B^{1/p}f$ для $f \in \mathcal{D}(-B^{1/p})$. Це означає, що $-B^{1/p} \subseteq F$. За теоремою Хілле-Іосіди [5], оператор $F - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, для всіх λ з досить великою дійсною частиною має неперевний обернений, визначений на всьому просторі X. Оператор $-B^{1/p} - \lambda I$ є також неперервно оборотним. Справді, оскільки задача Коші для рівняння (2) є розв'язною в просторі X, то, як відомо [5], $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \|U(t)|_X\|_X = \omega < +\infty$, а оператор $-B^{1/p}$ має револьвенту $R(\lambda) = (-B^{1/p} - \lambda I)^{-1}$ при всіх λ з $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Далі, врахувавши замкненість оператора $-B^{1/p}$ та ряд загальних результатів з [5] дістаємо, що для λ з достатньо великою дійсною частиною $R(\lambda)$ збігається з резольвентою генератора F півгрупи $U(t)|_X$, тобто, $R(\lambda) = (F - \lambda I)^{-1}$. Отже, $(-B^{1/p} - \lambda I)R(f)f = f$ для довільного $f \in X$. Але резольвента $R(\lambda)$ оператора F відображає простір X на область визначення $\mathcal{D}(F)$. Тому $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(-B^{1/p})$. Отже, $F = -B^{1/p}$.

Навпаки, нехай $-B^{1/p}$ – генератор деякої півгрупи операторів $V(t)$, $t > 0$, класу C_0 в X. Розглянемо в T' задачу Коші

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = -\varphi(\hat{A})^{1/p} y(t,x), y(0,\cdot) = f,$$

$$(t,x) \in \Omega, \tag{3}$$

тут $y(0,\cdot) = \lim\limits_{t\to+0} y(t,\cdot) = f$, границя розуміється в сенсі збіжності за топологією простору T'. Якщо

$$y(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k(t) e^{ikx}, y_k(t) = \langle y(t,\cdot), e^{-ikx}\rangle,$$

розв'язок задачі (3), то $y_k(t)$ (при фіксованому $k \in \mathbb{Z}$) – розв'язок задачі

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = -(\varphi(\lambda_k))^{1/p} y_k(t), y_k(0) = c_k,$$

$$c_k = \langle f, e^{-ikx}\rangle,$$

$\lambda_k = G(k)$. Отже, $y_k(t) = c_k \exp\{-t(\varphi(\lambda_k))^{1/p}\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$y(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\{-t(\varphi(\lambda_k))^{1/p}\} c_k e^{ikx} =$$

$$= U(t)f(x), f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \in T'.$$

Оскільки $-B^{1/p}$ – генератор півгрупи $V(t)$, $t > 0$, в X, то функція $z(t,\cdot) = V(t)f(\cdot)$, $f \in \mathcal{D}(-B^{1/p})$, – розв'язок в X, а, отже, і тим більше в T', задачі (3). Тому

$$z(t,\cdot) = V(t)f(\cdot) = y(t,\cdot) = U(t)f(\cdot) = u(t,\cdot).$$

Завдяки щільності $\mathcal{D}(-B^{1/p})$ в X маємо $V(t)f(\cdot) = U(t)f(\cdot)$ для довільного $f \in X$. Оскільки $V(t)$ – півгрупа класу C_0 в X, то $V(t)f(\cdot) = u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{X} f$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. *Якщо* $-B^{1/p} \equiv -(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_X$ *– генератор півгрупи класу* C_0 *в просторі* X*, то*

$$(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_X = \overline{(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_{H\langle m_k\rangle}},$$

тобто звуження $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}$ *на* X *збігається із замиканням в* X *звуження оператора* $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}$ *на простір* $H\langle m_k\rangle$.

Доведення. Оскільки оператор $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_X$ замкнений, то звуження $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_{H\langle m_k\rangle} \equiv L$ допускає замикання в X. Нехай $f \in \mathcal{D}((\varphi(\hat{A}))^{1/p}/_X) = \mathcal{D}(B^{1/p})$. Внаслідок теореми 1

$$f_n = U\Big(\frac{1}{n}\Big) f \in H\langle m_k\rangle, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$-B^{1/p} f_n \in H\langle m_k\rangle, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$U(t)f(\cdot) = u(t,\cdot).$$

При цьому, згідно з теоремою 2, $U\Big(\frac{1}{n}\Big) f \xrightarrow[n\to\infty]{X} f$. Оскільки $-B^{1/p}$ – генератор півгрупи класу C_0 в X, то

$$B^{1/p} U\Big(\frac{1}{n}\Big) f \equiv B^{1/p} f_n = L f_n =$$

$$= U\Big(\frac{1}{n}\Big) B^{1/p} f \xrightarrow[n\to\infty]{X} B^{1/p} f$$

(тут враховано те, що генератор півгрупи комутує з півгрупою на своїй області визначення). Отже,

$$\overline{(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_{H\langle m_k\rangle}} := \lim_{n\to\infty} L f_n = B^{1/p} f.$$

Цим доведено, що $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_X = \overline{(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_{H\langle m_k\rangle}}$.

Наслідок 2. *Якщо* $-B^{1/p} \equiv -(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_X$ *– генератор півгрупи класу* C_0 *в просторі* X*, то* $\overline{(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_T} = B^{1/p}$.

Доведення. Оскільки оператор $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_X$ замкнений, то звуження $(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_T$ допускає замикання в X. Якщо $f \in \mathcal{D}((\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_{H\langle m_k\rangle})$, то

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} \in T,$$

$$(\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_T \cdot f_n = \sum_{k=-n}^{n} (\varphi(\lambda_k))^{1/p} c_k(f) e^{ikx} \in T,$$

$$\lambda_k = G(k),$$

при цьому

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H\langle m_k\rangle} f, (\varphi(\hat{A}))^{1/p}|_T f_n = B^{1/p} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H\langle m_k\rangle} B^{1/p} f.$$

Звідси та з неперервності вкладення $H\langle m_k\rangle \subset X$ випливає сформульована в твердженні властивість.

Зауваження. В праці [6] введено простір G_M нескінченно диференційовних 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій, які допускають аналітичне продовження в $\mathbb{C}$ і задовольняють умову

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp(M(\delta y)), x+iy \in \mathbb{C},$$

де $c > 0$, $\delta > 0$ – сталі, залежні лише від φ, $M(x) = \int_0^x \mu(\xi) d\xi$ – первісна деякої зростаючої, неперервної й необмеженої на $[0,\infty)$ функції μ, $\mu(0) = 0$. Згідно з інтегральною формулою Коші

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{k+1}} dz, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де γ_R – коло радіуса R з центром у точці x. Тоді $|\varphi^{(k)}(x)| \leq c\delta^k m_k$, де $m_k = k!\inf_R (e^{M(\delta R)}/(\delta^k R^k))$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Безпосередньо переконуємося в тому, що послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умови 1) – 4) (див. також [7]). Отже, введений в [6] простір G_M вкладається у простір $H\langle m_k\rangle$ із вказаною послідовністю $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – Киев: Наукова думка, 1984. – 284 с.

2. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений / В.И. Горбачук // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 144-150.

3. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу / Василь Васильович Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

4. *Мироник В.І.* Періодична задача Коші для одного класу еволюційних рівнянь / В.І. Мироник // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. Вип. 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 134-142.

5. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Селим Григорьевич Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

6. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем у просторах періодичних функцій / В.А. Літовченко // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 394-420.

7. *Мироник В.І.* Періодична задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь нескінченного порядку: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Мироник Вадим Ілліч. – Чернівці, 2009. – 147 с.