УДК 517. 51

©2010 р. Г.А. Волошин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНУ ФУНКЦІЮ БЕРНШТЕЙНА

Досліджено функцію Бернштейна $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n)$, встановлено її основні властивості та знайдено явний вигляд у випадку, коли $f(x) = x^2$, $n = 1$.

We investigated the Bernstein function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n)$, set its basic properties and found an explicit form in the case when $f(x) = x^2$, $n = 1$.

1. Нехай $C = C[0,1]$ – простір всіх неперервних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\| = \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$, а P_n – лінійний підпростір простору C, що складається з усіх поліномів степеня не вище n. Нагадаємо, що найкращим наближенням функції f многочленами степеня не вище n називається величина

$$E_n(f) = \inf_{p\in P_n} \|f - p\|.$$

Наведемо деякі властивості найкращого наближення, якими ми будемо користуватися:

1.$E_n(f) \ge 0$;

2. $E_n(\lambda f) = |\lambda| E_n(f)$;

3. $E_n(f + g) \le E_n(f) + E_n(g)$.

За теоремою Гаара [3,с.80] для кожного n існує єдиний многочлен найкращого наближення $r_n \in P_n$, тобто такий многочлен $r_n \in P_n$, що $E_n(f) = \|f - r_n\|$. Співставивши функції $f \in C[0,1]$ її многочлен найкращого наближення $r_n = R_n f$, ми отримаємо відображення $R_n : C \to P_n$. При цьому оператор $R_n : C \to P_n$ є неперервним відносно максимум-норми [2].

С.Н. Бернштейн у праці [1, 4] встановив такий результат: для довільної спадної до нуля послідовності чисел α_n існує така функція $g \in C[0,1]$, що $E_n(g) = \alpha_n$ для кожного n. Для доведення він розглянув функцію $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n),$$

де $r_n = R_n f$ і $e_n(x) = x^n$. У цій праці він лише вказав властивості функції φ, не подаючи їх доведення. Метою даної статті є детально вивчити функцію φ, зокрема довести основні її властивості та знайти її явний вигляд у випадку, коли $f(x) = x^2$ і $n = 1$.

Отримані тут результати були анонсовані в тезах [5,6].

2. Розглянемо функцію $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n),$$

$r_n = R_n f$.

З'ясуємо її основні властивості, які сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Функція $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n)$ опукла і неперервна, строго зростає на $[0, +\infty)$ і строго спадає на $(-\infty; 0]$, причому $\varphi(0) = E_n(f)$.*

Доведення. Ясно, що функція $\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n)$ є неперервною як композиція неперервних функцій. Переконаємося, що наша функція опукла, тобто, що для довільних чисел $\alpha_1 \ge 0$ і $\alpha_2 \ge 0$, таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, і довільних дійсних чисел λ_1 і λ_2 виконується нерівність

$$\varphi(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) \le \alpha_1\varphi(\lambda_1) + \alpha_2\varphi(\lambda_2).$$

Справді, використовуючи властивості функціонала найкращого наближення, будемо мати:

$$\varphi(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) = E_{n-1}(f - r_n + \alpha_1\lambda_1 e_n + \alpha_2\lambda_2 e_n) =$$
$$= E_{n-1}((\alpha_1+\alpha_2)f - (\alpha_1+\alpha_2)r_n + \alpha_1\lambda_1 e_n + \alpha_2\lambda_2 e_n) =$$
$$= E_{n-1}(\alpha_1(f - r_n + \lambda_1 e_n) + \alpha_2(f - r_n + \lambda_2 e_n)) \le$$
$$\le E_{n-1}(\alpha_1(f - r_n + \lambda_1 e_n) + E_{n-1}(\alpha_2(f - r_n + \lambda_2 e_n) =$$
$$= \alpha_1 E_{n-1}(f - r_n + \lambda_1 e_n) + \alpha_2 E_{n-1}(f - r_n + \lambda_2 e_n) =$$
$$= \alpha_1\varphi(\lambda_1) + \alpha_2\varphi(\lambda_2).$$

Покажемо, що $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{R}$. Знайдемо значення $\varphi(\lambda)$ в нулі:

$$\varphi(0) = E_{n-1}(f - r_n) = \|f - r_n\| = E_n(f).$$

З іншого боку

$$\varphi(\lambda) = E_{n-1}(f - r_n + \lambda e_n) \geq$$
$$\geq E_n(f - r_n + \lambda e_n) = E_n(f) = \varphi(0).$$

Покажемо, що $\varphi(\lambda) \neq \varphi(0)$ для кожного $\lambda \neq 0$. Нехай це не так, тобто $\varphi(\lambda) = \varphi(0)$ для деякого $\lambda \neq 0$. Розглянемо для цього λ функцію $h = f - r_n + \lambda e_n$, для якої

$$E_n(h) = E_n(f) = \varphi(0) = \varphi(\lambda) = E_{n-1}(h).$$

Нехай $q = R_{n-1}h$. Тоді

$$\|f - r_n\| = E_n(f) = E_{n-1}(h) =$$
$$= \|h - q\| = \|f - r_n + \lambda e_n - q\|.$$

Виходить, що функція f має два різних многочлени найкращого наближення в P_n, а саме r_n і відмінний від нього многочлен $p = r_n - \lambda e_n + q$, а це суперечить теоремі Гаара.

Таким чином, $\varphi(\lambda) > \varphi(0) = E_n(f)$ для кожного $\lambda \neq 0$.

З доведених властивостей функції φ легко вивести, що вона строго зростає на $[0, +\infty)$. Справді, нехай $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Якщо $\lambda_1 = 0$, то $\varphi(\lambda_1) = \varphi(0) < \varphi(\lambda_2)$ за доведеним вище. Нехай $\lambda_1 > 0$. Оскільки функція φ опукла, то для кутових коефіцієнтів

$$k_1 = \frac{\varphi(\lambda_1) - \varphi(0)}{\lambda_1 - 0} \quad \text{і} \quad k_2 = \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

виконується нерівність $k_1 \leq k_2$, звідки випливає, що $k_2 > 0$, адже $k_1 > 0$. Тому $\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1) > 0$, тобто $\varphi(\lambda_1) < \varphi(\lambda_2)$. Так само пояснюється, що φ строго спадає на $(-\infty; 0]$.

3. Цікаво знайти явний вираз для функції φ у конкретному випадку. Нехай $n = 1$ і $f(x) = x^2$. Яким тоді буде значення многочлена найкращого наближення, і, власне, самої функції φ? Зрозуміло, що у цьому випадку многочленом найкращого наближення буде лінійна функція $y = ax + b$. Нам потрібно знайти таку лінійну функцію $r_1 \in P_1$, щоб відстань $\|f - r_1\|$ мінімальною серед відстаней $\|f - p\|$, де $p \in P_1$.

Лема 1. *Нехай $f(x) = x^2$ і $r_1 = R_1 f$. Тоді $r_1(x) = x - \frac{1}{8}$ і $E_1(f) = \frac{1}{8}$.*

Доведення. Нехай $q(x) = x - \frac{1}{8}$. Тоді

$$h(x) = f(x) - q(x) = x^2 - x + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

Оскільки $h(0) = h(1) = \frac{1}{8}$ і $h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$, то

$$\|f - q\| = \|h\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |h(x)| = \frac{1}{8}.$$

Розглянемо довільну лінійну функцію $y = kx + b = p(x)$. Її можна записати у вигляді

$$p(x) = y_0 + k(x - \frac{1}{2}),$$

де $y_0 = p(\frac{1}{2})$. Зауважимо, що $q(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$.

Якщо $y_0 > \frac{3}{8}$, то

$$p(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) = y_0 - \frac{1}{4} > \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

отже,

$$\|f - p\| \geq |f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})| = p(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{8},$$

звідки отримуємо, що $\|f - p\| > \frac{1}{8}$.

Нехай $y_0 \leq \frac{3}{8}$. При $k > 1$ пряма $y = p(x)$ йде крутіше від прямої $y = q(x)$ і тому

$$p(0) < q(0) = -\frac{1}{8},$$

а тоді

$$\|f - p\| \geq |f(0) - p(0)| = |p(0)| = -p(0) > \frac{1}{8}.$$

Якщо ж $k < 1$, то пряма $y = p(x)$ йде положіше від прямої $y = q(x)$, а значить

$$p(1) < q(1) = \frac{7}{8}.$$

В такому разі

$$\|f - p\| \geq |f(1) - p(1)| = |1 - p(1)| =$$
$$= 1 - p(1) > 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

Ми бачимо, що для довільної лінійної функції p, яка відмінна від q, виконується нерівність

$$\|f-p\| > \frac{1}{8},$$

а для функції q маємо

$$\|f-q\| = \frac{1}{8}.$$

Звідси випливає, що

$$E_1(f) = \|f-q\| = \frac{1}{8} \quad i \quad r_1 = q.$$

Для подальшого дослідження функції φ нам буде потрібна така лема:

Лема 2. *Нехай $f \in C[0,1]$, $M(f) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$, $m(f) = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$, $c(f) = \frac{1}{2}(m(f)+M(f))$ і $d(f) = \frac{1}{2}(M(f)-m(f))$. Тоді $r_0 = R_0 f = c(f)$ і $E_0(f) = d(f)$.*

Доведення. Нехай a_0 – довільна дійсна константа. Якщо $a_0 > c(f)$, то

$$a_0 - m(f) > c(f) - m(f) = d(f).$$

Але $m(f) = f(x_1)$ для деякого $x_1 \in [0,1]$. Тоді

$$\|f-a_0\| = \max_{0\le x\le 1} |f(x)-a_0| \ge |f(x_1)-a_0| =$$

$$= |m(f)-a_0| = a_0 - m(f) > d(f).$$

Якщо ж $a_0 < c(f)$, то

$$M(f) - a_0 > M(f) - c(f) = d(f).$$

Оскільки $M(f) = f(x_2)$, де x_2 – деяка точка з $[0,1]$, то

$$\|f-a_0\| \ge |f(x_2)-a_0| =$$

$$= |M(f)-a_0| = M(f) - a_0 > d(f).$$

Але

$$\|f-c(f)\| = \max_{0\le x\le 1} |f(x)-c(f)| = d(f).$$

Таким чином, $E_0(f) = \|f-c(f)\| = d(f)$ і $r_0 = c(f)$.

Перейдемо до доведення основного результату:

Теорема 2. *Нехай $f(x) = x^2$, $r_1(x) = x - \frac{1}{8}$, $e_1(x) = x$ і $\varphi(\lambda) = E_0(f - r_1 + \lambda e_1)$. Тоді*

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{|\lambda|}{2}, & |\lambda| \ge 1, \\ \frac{(|\lambda|+1)^2}{8}, & |\lambda| \le 1. \end{cases}$$

Доведення. Нехай

$$g_\lambda = f - r_1 + \lambda e_1.$$

Виділивши повний квадрат, отримаємо, що

$$g_\lambda(x) = x^2 - x + \frac{1}{8} + \lambda x = x^2 + (\lambda-1)x + \frac{1}{8} =$$

$$= (x + \frac{\lambda-1}{2})^2 - \frac{2(\lambda-1)^2-1}{8}.$$

Вершина параболи $y = g_\lambda(x)$ знаходиться в точці $(-\frac{\lambda-1}{2}, -\frac{2(\lambda-1)^2-1}{8})$ і ця парабола напрямлена вітками вгору. Зрозуміло, що залежно від значення λ ця вершина буде змінювати своє розташування. Оскільки

$$0 \le -\frac{\lambda-1}{2} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \lambda \le 1,$$

то вершина параболи $y = g_\lambda(x)$ знаходиться над чи під проміжком $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли $-1 \le \lambda \le 1$.

При $\lambda < -1$ виконується нерівність $-\frac{\lambda-1}{2} > 1$, отже, вершина параболи знаходиться правіше від відрізка $[0,1]$. Якщо ж $\lambda > 1$, то $-\frac{\lambda-1}{2} < 0$, отже, вершина параболи лежить лівіше від відрізка $[0,1]$.

Розглянемо вказані три випадки

а). Нехай $\lambda < -1$. Тоді функція g_λ спадає на проміжку $[0,1]$. Отже,

$$M(g_\lambda) = g_\lambda(0) = \frac{1}{8},\, m(g_\lambda) = g_\lambda(1) = \frac{1}{8} + \lambda$$

і

$$d(g_\lambda) = -\frac{\lambda}{2}.$$

Тому за лемою 2

$$\varphi(\lambda) = E_0(g_\lambda) = -\frac{\lambda}{2} = \frac{|\lambda|}{2}$$

б). Нехай $-1 \le \lambda \le 1$. Тоді

$$m(g_\lambda) = -\frac{2(\lambda-1)^2-1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{(\lambda-1)^2}{4},$$

адже вершина параболи проектується на $[0,1]$. Далі

$$M(g_\lambda) = \max\{g_\lambda(0), g_\lambda(1)\} =$$

$$= \max\{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}+\lambda\} = \begin{cases} \frac{1}{8}+\lambda, & 0 \le \lambda \le 1 \\ \frac{1}{8}, & -1 \le \lambda \le 0. \end{cases}$$

Тому при $-1 \le \lambda \le 0$

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}(M(g_\lambda) - m(g_\lambda)) = \frac{(\lambda-1)^2}{8}$$

і при $0 \le \lambda \le 1$

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \frac{(\lambda-1)^2}{8} = \frac{\lambda^2+2\lambda+1}{8} = \frac{(\lambda+1)^2}{8}.$$

в). Нехай, нарешті, $\lambda > 1$. Тоді функція g_λ зростає на $[0,1]$. Тому

$$m(g_\lambda) = \frac{1}{8} \quad i \quad M(g_\lambda) = \frac{1}{8} + \lambda.$$

Отже,

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{2}.$$

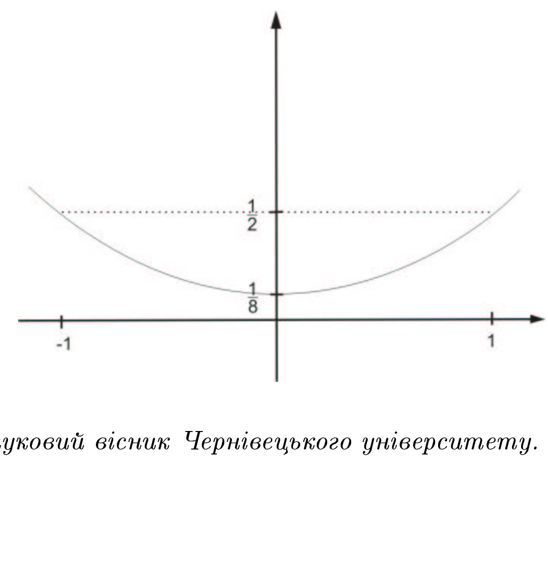
Таким чином,

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2}, & \lambda \le -1, \\ \frac{(\lambda-1)^2}{8}, & -1 \le \lambda \le 0, \\ \frac{(\lambda+1)^2}{8}, & 0 \le \lambda \le 1, \\ \frac{\lambda}{2}, & \lambda \ge 1, \end{cases}$$

або інакше

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{|\lambda|}{2}, & |\lambda| \ge 1, \\ \frac{(|\lambda|+1)^2}{8}, & |\lambda| \le 1. \end{cases}$$

Графік отриманої функції $\mu = \varphi(\lambda)$ можна зобразити так:



Як бачимо, функція φ справді неперервна і опукла, причому вона тут вийшла парною. Правда, в точці 0 вона не диференційовна, адже

$$\varphi'_{\text{П}}(0) = \frac{\lambda+1}{4}\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{4}$$

і

$$\varphi'_{\text{Л}}(0) = \frac{\lambda-1}{4}\Big|_{\lambda=0} = -\frac{1}{4},$$

що показує, що правостороння і лівостороння похідні в точці 0 різні. При $\lambda = \pm 1$ функція φ диференційовна, бо, наприклад,

$$\varphi'_{\text{П}}(1) = \frac{1}{2} \quad i \quad \varphi'_{\text{Л}}(1) = \frac{\lambda+1}{4}\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{2},$$

отже, $\varphi'(1) = \frac{1}{2}$. Але, другої похідної в точках ± 1 не існує.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bernstein S.N.* Sur le problème inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues // Comp. Rend. – 1938. – **206**. – P. 1520-1523.

2. *Kroo A.* The continuoty of best approximatious. Acta Math. Acad. Sci. Hungary.– 1977. – **30**.– P.175-188.

3. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407с.

4. *Бернштейн С.Н.* Об одной обратной задаче теории приближения //Собрание сочинений в 4-х т. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т.2. – С.292-294.

5. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Про функціональне узагальнення однієї теореми Бернштейна //Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди., 8-13 червня, 2009. Тези доповідей. Черніці 2009. – С.149-150.

6. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* До питання про узагальнення однієї теореми Бернштейна// FM 2009 Conference "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III"dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk (1919-1998)., August 22-26, 2009. Abstracts. Kuiv, 2009. – С.106-107.