УДК 517.929.7

©2010 р. І.В.Березовська, Я.Й.Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ ОДНІЄЇ БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ Й ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглянуто багаточастотну систему рівнянь з лінійно перетвореним аргументом в повільних та швидких змінних з інтегральними крайовими умовами. Досліджено існування та єдиність розв'язку крайової задачі та одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

We considered a multifrequance system of equations with slow and fast variables with linearly transformed argument and with integral boundary conditions. We researched the existence and uniformity of solution of boundary-value problem and we obtained the error estimate of averaging method, that depends on small parameter.

Постановка задачі. Диференціально-функціональні рівняння з функціональними, зокрема інтегральними умовами, досліджувались у монографіях [1, 2] та в багатьох інших працях. У праці [3] вперше розглянені багаточастотні системи з інтегральними крайовими умовами, в яких процедура усереднення за швидкими змінними застосовується не тільки до рівнянь, але й до крайових умов.

В працях [4, 5] вивчались умови існування розв'язку m-частотної системи рівнянь із лінійно перетвореним аргументом в малому околі розв'язку усередненої за швидкими змінними системи рівнянь та одержано оцінку відхилення розв'язків точної й усередненої систем.

У даній роботі розглядається система рівнянь з повільними і швидкими змінними та лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta), \qquad (1)$$

де $\tau \in [0, L]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, з крайовими умовами

$$\int_0^L f(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta) d\tau = d_1, \qquad (2)$$

$$\int_0^L [A_1(\tau)\varphi + A_2(\tau)\varphi_\theta + $$
$$+ g(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)] d\tau = d_2, \qquad (3)$$

Тут A, B, f, g – 2π-періодичні за всіма компонентами вектор-функції змінних φ, φ_θ, $\varphi_\theta = \varphi(\theta\tau)$, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\theta, \lambda \in (0, 1)$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

В роботі [4] розглянуто випадок, коли вектор-функції A_1 і A_2 залежать і від повільних змінних x, x_λ й одержано ефективну, явно залежну від ε оцінку тільки для повільних змінних x. Покажемо, що для крайових умов вигляду (2), (3), де A_1 і A_2 залежать тільки від повільного часу, така ж оцінка виконується і для швидких змінних. Для систем без запізнення така задача розв'язана в роботі [6].

Усереднена задача. Усереднимо вектор-функції A, B, f, g за швидкими змінними φ, φ_θ на кубі періодів. Нехай $F := [A, B, f, g]$, середнє значення набуває вигляду

$$F_0 = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta) d\varphi d\varphi_\theta.$$

Усереднена система рівнянь запишеться

у вигляді

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = A_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda), \quad (4)$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda), \quad (5)$$

крайові умови

$$\int_0^L f_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda) d\tau = d_1, \quad (6)$$

$$\int_0^L [A_1(\tau)\overline{\varphi} + A_2(\tau)\overline{\varphi}_\theta + g_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda)] d\tau = d_2. \quad (7)$$

Умови. Нехай $G = [0, L] \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $G_1 = [0, L] \times D \times D$, $u = [\tau, x, x_\lambda]$ – (2n+1)-вектор. Припустимо, що виконуються наступні умови.

1^0. Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ вектор-функція $F \in C_u^2(G, \sigma_1)$, $\omega \in C^{2m-1}([0, L], \sigma_1)$, де сталою σ_1 обмежені норми матриць $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial^\nu \omega}{\partial \tau^\nu}$, $\nu = 0, \ldots, 2m-1$ і другі похідні вектор-функції F за змінними τ, x, x_λ.

2^0. Вектор-функція $F(\tau, x, z, u, v)$ 2π-періодична за змінними u_ν, v_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, а її коефіцієнти Фур'є задовольняють нерівності:

$$\sup \|F_0\| + \sup \left\|\frac{\partial F_0}{\partial \tau}\right\| + \sup \left\|\frac{\partial F_0}{\partial x}\right\| +$$
$$+ \sup \left\|\frac{\partial F_0}{\partial z}\right\| + \sum_{\|k\|+\|l\|>0} (\|k\| + \theta\|l\|)^\kappa \times$$
$$\times \Big[\sup \|F_{kl}\| + (\|k\| + \theta\|l\|)^{-1} \Big(\sup \left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau}\right\| +$$
$$+ \sup \left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x}\right\| + \sup \left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial z}\right\|\Big)\Big] \le \sigma_2,$$
$$(\|k\| + \theta\|l\|)^{-1} \Big(\sup \left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x \partial \tau}\right\| + \sup \left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z \partial \tau}\right\| +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^n \Big(\sup \left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x \partial z_\nu}\right\| + \sup \left\|\frac{\partial F_{kl}^2}{\partial z \partial x_\nu}\right\|\Big)\Big) \le \sigma_3,$$

де супремум обчислюється в області G_1.

3^0. Визначник Вронського $V(\tau)$, побудований за системою $2m$ функцій $\{\omega(\tau), \omega(\theta\tau)\}$, відмінний від нуля при $\tau \in [0, L]$.

4^0. Існує єдиний розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y})$, $\overline{x}(0, \overline{y}) = \overline{y}$, крайової задачі (4), (6), який лежить в D разом із деяким ρ-околом.

Як показано в [4], при виконанні умов 1^0, 3^0 і першої нерівності в 2^0 при $\kappa = 0$, якщо при $\tau \in [0, L]$ існує єдиний розв'язок початкової задачі для рівняння (4), то для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де ε_0 – досить мале, існує і єдиний розв'язок системи рівнянь (1) з початковими умовами для усередненої системи і при $\tau \in [0, L]$ і виконується нерівність

$$\|x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, y)\| +$$
$$+ \|\varphi(\tau, y, \psi) - \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \le c_1 \varepsilon^\alpha, \quad (8)$$

де $c_1 > 0$ і не залежить від ε, $\alpha = (2m)^{-1}$. Така ж оцінка справджується і для похідних відхилення повільних і швидких змінних за початковими умовами. Нерівність (8) грунтується на рівномірній оцінці осциляційного інтеграла

$$\left\| \int_0^L h_{kl}(s) \exp\left[\frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \Big((k, \omega(z)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (l, \omega(\theta z))\Big) dz\right] ds \right\| \le c_2 \varepsilon^\alpha, \quad (9)$$

де стала $c_2 > 0$ і не залежить від ε, $h_{kl} \in C^1[0, L]$.

Введемо позначення для n- і m-матриць:

$$Q_1 = \int_0^L \left[\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x} \frac{\partial \overline{x}(\overline{M}_1)}{\partial \overline{y}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \overline{x}_\lambda(\overline{M}_1)}{\partial \overline{y}}\right] d\tau,$$

$$Q_2 = \int_0^L \Big[A_1(\tau) + A_2(\tau)\Big] d\tau.$$

Існування розв'язку крайової задачі та обгрунтування методу усереднення.

Теорема. *Нехай виконуються умови* $1^0 - 4^0$ *для* $\kappa = 1$, *матриці* Q_1, Q_2 *- невироджені. Тоді можна вказати досить мале* $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$, *таке, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ *існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3) в малому околі розв'язку усередненої задачі (4)–(7) і при цьому для всіх* $\tau \in [0, L]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ *виконується нерівність*

$$\|x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y})\| +$$
$$+\|\varphi(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \psi, \varepsilon)\| \le c_3\varepsilon^{\alpha}, \tag{10}$$

де $\alpha = (2m)^{-1}$, *стала* $c_3 > 0$ *і не залежить від* ε.

Доведення. Згідно з методикою доведення відповідного твердження для звичайних диференціальних рівнянь [6] покажемо, що в досить малому околі початкових умов $(\overline{y}, \overline{\psi})$ усередненої задачі, радіус якого має порядок ε^{α}, існує єдина точка $(\overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi)$, така, що розв'язок $x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon))$ системи рівнянь (1) визначений для всіх $\tau \in [0, L]$ і задовольняє крайові умови (2), (3).

Нехай $\mu \in \mathbb{R}^m$ і $\|\mu\| \exp(2\sigma_1 L) \le \rho_1 = \rho/2$. Тоді для $\tau \in [0, L]$ визначений розв'язок $\tilde{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu)$ рівняння (4) і

$$\|\overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{x}(\tau, \overline{y})\| \le \rho_1.$$

Для $\|\mu\| \le c_4\varepsilon^{\alpha} \exp(-2\sigma_1 L)$, де c_4 – деяке число, і врахувавши оцінку (8), одержимо

$$\|x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y})\| \le$$
$$\le \|x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu)\| +$$
$$+\|\overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{x}(\tau, \overline{y})\| \le$$
$$\le c_1\varepsilon^{\alpha} + c_4 \exp(2\sigma_1 L)\varepsilon^{\alpha} = c_5\varepsilon^{\alpha}. \tag{11}$$

Оцінка (11) виконується для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_0, (\rho/2c_1)^{1/\alpha}, (\overline{c}\rho)^{1/\alpha})$, $\overline{c} = (2c_4 \exp(\sigma_1 L))^{-1}$.

Введемо позначення $\overline{M}_1 = (\tau, \overline{y})$ – точка в $[0, L] \times D$ та аналогічні позначення для $\tilde{M}_1 = (\tau, \overline{y} + \mu)$ і $M_1 = (\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$. Далі, $M_2 = (\tau, x(M_1), x_{\lambda}(M_1))$, $\overline{M}_2 = (\tau, \overline{x}(\overline{M}_1), \overline{x}_{\lambda}(\overline{M}_1))$, $\tilde{M}_2 = (\tau, \overline{x}(\tilde{M}_1), \overline{x}_{\lambda}(\tilde{M}_1))$.

Якщо виконується умова 1^0, то

$$\overline{x}(\tilde{M}_1) - \overline{x}(\overline{M}_1) = \frac{\partial \overline{x}(\overline{M}_1)}{\partial y}\mu + P_{11}(\tau, \mu)$$

і, як показано в [4],

$$P_{11}(\tau, \mu) \le d_1\|\mu\|^2. \tag{12}$$

Для $\overline{x}_{\lambda}(\tilde{M}_1) - \overline{x}_{\lambda}(\overline{M}_1)$ маємо таку ж рівність з доданком $P_{12}(\tau, \mu)$ та оцінкою, аналогічною (12).

Запишемо вектор-функцію f у вигляді

$$f(\tau, x, x_{\lambda}, \varphi, \varphi_{\theta}) =$$
$$= f_0(\tau, x, x_{\lambda}) + \tilde{f}(\tau, x, x_{\lambda}, \varphi, \varphi_{\theta}),$$

де $\tilde{f}(\tau, x, x_{\lambda}, \varphi, \varphi_{\theta}) =$

$$= \sum_{\|k\|+\|l\|>0} f_{kl}(\tau, x, x_{\lambda}) \exp[i(k, \varphi) + i(l, \varphi_{\theta})],$$

і такі ж позначення для g_0 і $\tilde{g}$.

Розглянемо різницю

$$f_0(\tilde{M}_2) - f_0(\overline{M}_2) =$$
$$= \left(\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x}\frac{\partial \overline{x}(\overline{M}_1)}{\partial y} + \frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial \overline{x}_{\lambda}(\overline{M}_1)}{\partial \overline{y}}\right)\mu +$$
$$+\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x}P_{11}(\tau, \mu) + \frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x_{\lambda}}P_{12}(\tau, \mu) + P_1(\tau, \mu),$$

де $\|P_1(\tau, \mu)\| \le d_2\|\mu\|^2$.

Тоді з інтегральних умов (3) і (5) одержимо $\mu = -Q_1^{-1} \times$

$$\times\Bigg\{\int_0^L \Big(\frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x}P_{11}(\tau, \mu) + \frac{\partial f_0(\overline{M}_2)}{\partial x_{\lambda}}P_{12}(\tau, \mu)\Big)ds +$$
$$+\int_0^L \Big(f(\tau, x(M_1), x_{\lambda}(M_1), \varphi(M_1), \varphi_{\theta}(M_1)) -$$
$$-f(\tau, \overline{x}(\tilde{M}_1), \overline{x}_{\lambda}(\tilde{M}_1), \varphi(M_1), \varphi_{\theta}(M_1))\Big)ds +$$
$$+\int_0^L \tilde{f}(\tau, \overline{x}(\tilde{M}_1), \overline{x}_{\lambda}(\tilde{M}_1), \varphi(M_1), \varphi_{\theta}(M_1))ds +$$

$$+\int_0^L P_1(\tau,\mu)d\tau\Bigg\}\equiv \Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)$$

або $\mu = \Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)$.

Через $I_{1,\nu}$ позначимо інтеграли виразу у фігурних дужках, $\nu = 1,2,3,4$. Нехай $S_1 = \{\mu : \|\mu\| \le c_4\varepsilon^\alpha\}$ – куля в $\mathbb{R}^n$. Покажемо, що $\Phi_1 : S_1 \to S_1$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ і $\xi \in \mathbb{R}^m$.

З умови 1^0 та оцінок (12) для $P_{11}(\tau,\mu)$ і $P_{12}(\tau,\mu)$ одержимо

$$\|I_{1,1}\| \le 2\sigma_1 d_1 L\|\mu\|^2. \qquad (13)$$

Врахувавши оцінку похибки (8) методу усереднення, маємо

$$\|I_{1,2}\| \le 2c_1\sigma_1 L\varepsilon^\alpha. \qquad (14)$$

Далі скористаємось оцінкою осциляційного інтеграла (9), де

$$h_{kl}(\tau) = f_{kl}(\tau,\overline{x}(M_1),\overline{x}_\lambda(M_1))\times$$
$$\times\exp[i(k,\eta(\tau,\varepsilon)) + i(l,\eta(\theta\tau,\varepsilon)],$$
$$\eta(\tau,\varepsilon) = \varphi(M_1) - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(s)ds.$$

Тоді для $I_{1,3}$ справджується нерівність

$$\|I_{1,3}(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le c_6\varepsilon^\alpha, \varepsilon\in(0,\varepsilon_1]. \qquad (15)$$

Накінець,

$$\|I_{1,4}(\mu)\| \le d_2 L\|\mu\|^2. \qquad (16)$$

На підставі оцінок (13)–(16) одержимо

$$\|\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le c_7\|\mu\|^2 + c_8\varepsilon^\alpha,$$

де $c_8 = (2c_1\sigma_1 L + c_6)\|Q_1^{-1}\|$, $c_7 = (2\sigma_1 d_1 + d_2)L\|Q_1^{-1}\|$.

Нехай $c_4 = 2c_8$, $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1,(4c_6c_7)^{-\frac{1}{\alpha}})$. Тоді,

$$\|\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le 2c_8\varepsilon^\alpha = c_4\varepsilon^\alpha,$$

для всіх $\|\mu\| \le c_4\varepsilon^\alpha$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ і $\xi\in\mathbb{R}^m$.

Доведення стиску відображення Φ_1 збігається з також ж процедурою в [4]. Для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$, $\varepsilon_3\le\varepsilon_2$, $\mu\in S_1$, $\xi\in\mathbb{R}^m$ випливає, що

$$\|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}\| \le \frac{1}{2}.$$

Отже, для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$ і $\xi\in\mathbb{R}^m$ в кулі S_1 існує єдина нерухома точка $\mu = \mu(\xi,\varepsilon)$ відображення Φ_1.

З інтегральних умов (3) і (6) маємо:

$$\xi = -Q_2^{-1}\times$$
$$\times\Bigg\{\int_0^L\Big[A_1(\tau)\Big(\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)\Big)+$$
$$+A_2(\tau)\Big(\varphi(\theta\tau,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\theta\tau,\overline{y},0,\varepsilon)\Big)\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^L\Big[g(\tau,x(M_1),x_\lambda(M_1),\varphi(M_1),\varphi_\theta(M_1))-$$
$$-g(\tau,\overline{x}(\tilde{M}_1),\overline{x}_\lambda(\tilde{M}_1),\varphi(M_1),\varphi_\theta(M_1))\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^L\Big[g_0(\tau,\overline{x}(\tilde{M}_1),\overline{x}_\lambda(\tilde{M}_1))-$$
$$-g_0(\tau,\overline{x}(\overline{M}_1),\overline{x}_\lambda(\overline{M}_1))\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^L\tilde{g}(\tau,\overline{x}(\tilde{M}_1),\overline{x}_\lambda(\tilde{M}_1),\varphi(M_1),\varphi_\theta(M_1))d\tau\Bigg\}\equiv$$
$$\equiv\Phi_2(\mu,\xi,\varepsilon).$$

Зауважимо, що для першого з інтегралів на підставі умови 1^0 для $\|\mu\|\le c_4\varepsilon^\alpha$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ маємо:

$$\|I_{2,1}(\mu,\varepsilon)\| \le c_9\varepsilon^\alpha,$$

де $c_9 = 2c_4\sigma_1 L\exp(2\sigma_1 L)\|Q_2^{-1}\|\times$

$$\times\int_0^L(\|A_1(\tau)\| + \|A_2(\tau)\|)d\tau.$$

Таким же чином, як і для відображення Φ_1 доводиться, що $\Phi_2 : S_2 \to S_2$, де

$$S_2 = \{\xi : \xi\in\mathbb{R}^m, \|\xi\| \le c_{10}\varepsilon^\alpha\}.$$

Умова стиску відображення Φ_2 для досить малого $\varepsilon^* > 0$ здійснюється за схемою теореми 15.2 в праці [6]. Отже, існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3)

$$\Big\{x(\tau,\overline{y}+\mu(\xi(\varepsilon),\varepsilon),\overline{\psi}+\xi(\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varphi(\tau, \overline{y} + \mu(\xi(\varepsilon), \varepsilon), \overline{\psi} + \xi(\varepsilon), \varepsilon)\Big\},$$

причому $\|\mu(\xi(\varepsilon), \varepsilon))\| \leq \overline{c}_4\varepsilon^\alpha$, $\|\xi(\varepsilon)\| \leq \overline{c}_{10}\varepsilon^\alpha$. З нерівності (11) й аналогічної нерівності для $\|\varphi(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\|$ випливає оцінка (10).

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx}{d\tau} = cos(\varphi - 2\varphi_\theta) + cos(\varphi - 4\varphi_\theta), x(0) = y;$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon}, \tau \in [0,1], \theta = 0.5.$$

$$\int_0^1 \Big[(1-\tau)\varphi + cos(\varphi - 2\varphi_\theta) + cos(\varphi - 4\varphi_\theta)\Big] d\tau = 1.$$

Тут $\gamma_1(\tau) = \omega(\tau) - 2\omega(\frac{\tau}{2})\frac{1}{2} = \tau$,

$\gamma_2(\tau) = \omega(\tau) - 4\omega(\frac{\tau}{2})\frac{1}{2} = -1.$

Оскільки $\gamma_1(0) = 0$, то в системі є резонанс при $\tau = 0$.

Якщо задати початкові умови $x(0) = y$, $\varphi(0) = 0$, то на підставі оцінки інтеграла Френеля [7] маємо:

$$x(1,\varepsilon) - \overline{x} = \int_0^1 \cos\frac{\tau^2}{2\varepsilon} d\tau + \int_0^1 \cos\frac{\tau}{\varepsilon} d\tau =$$

$$= \sqrt{2\varepsilon} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\tau^2 d\tau + \varepsilon \sin\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} + o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Нехай тепер для розв'язку задано крайові умови. Тоді для відхилення початкових умов розв'язків $\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ і $\overline{\varphi}(\tau, \overline{\psi}, \varepsilon)$ одержимо

$$\psi - \overline{\psi} =$$

$$= -2\int_0^1 \cos(\frac{\tau^2}{2\varepsilon} - \psi) d\tau + 2\sin\frac{1}{2\varepsilon}\sin(3\psi + \frac{1}{2\varepsilon}) =$$

$$= -2\sqrt{2\varepsilon}(\cos\psi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \cos\tau^2 d\tau + \sin\psi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} \sin\tau^2 d\tau) +$$

$$+2\sin\frac{1}{2\varepsilon}\sin(3\psi + \frac{1}{2\varepsilon}) = O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Отже,

$$\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{\psi}, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$$

для всіх $\tau \in [0,1]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск: Научно-изд. Центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 300 с.

2. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України: т.13).

3. *Р.І. Петришин, Я.Р. Петришин* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 51–65.

4. *Бігун Я.Й.* Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, № 2. – С. 257–263.

5. *Бігун Я.Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 5–10.

6. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наукова думка, 2004. – 474 с.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, том 2, 1974. – 295 с.