УДК 517.928

©2009 р. О.В. Стрибко

Буковинська державна фінансова академія

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Для одного псевдодиференціального рівняння з оператором Бесселя сформульовані необхідні та достатні умови коректної розв'язності задачі Коші з узагальненими початковими даними з простору, який є певним узагальненням класичних функціональних просторів типу S та W.

For a pseudodifferentional equation with the Bessel operator we formulate necessary and sufficient conditions for correct solvability of the Cauchy problem with generalized initial conditions of space, which generalize certain classical of S-type and W-type functional spaces.

Вступ. Класична розв'язність задачі Коші для псевдодиференціальних рівнянь та систем рівнянь вивчалася багатьма дослідниками [1-8]. При цьому поширення операцій інтегрування та диференціювання на дробові порядки [9], привели до дослідження розв'язків задачі Коші для рівнянь з молодшими членами, в яких здійснюється неперервне підсумовування псевдодиференціальних та псевдоінтегро-диференціальних операторів за їх порядками на певних проміжках (такі рівняння в [7] пропонується називати рівняннями інтегрального вигляду).

У цій роботі розглядається задача Коші для рівняння інтегрального вигляду

$$\partial_t U(t,x) + \int\limits_{\alpha}^{\gamma} \left(\left(aE - D^2\right)^{\frac{\tau}{2}} U \right)(t,x)\, d\tau = 0\,, \qquad (1)$$

де $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha < \gamma$, $(aE - D^2)^{\frac{\tau}{2}}$ – оператор Бесселя дробового інтегродиференціювання у просторі S Шварца, з параметром $a > 1$, дія якого на елементах з простору S визначається так:

$$\forall\, f \in S: \ \left(aE - D^2\right)^{\tau/2} f = F^{-1}\left[\left(a + \xi^2\right)^{\tau/2} F\,[f] \right]$$

(тут E – одиничний оператор). Зазначимо, що задача Коші для рівняння (1) у випадку $\alpha = -\infty$ досліджувалася у роботі [7]. У нашому випадку проміжок інтегрування у рівнянні (1) є скінченним і для відповідної задачі Коші за допомогою мультиплікаторів Фур'є-образів узагальнених функцій над простором основних функцій, який є певним узагальненням функціональних просторів типу S та W, встановлюється її коректна розв'язність.

1. Простори основних функцій. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ – відповідно множини натуральних, дійсних і комплексних чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ – простір усіх нескінченно диференційовних функцій визначених на $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{C})$ – простір цілих аналітичних функцій, а $\mu(\cdot)$ – зростаюча неперервна функція на $[0, +\infty)$, причому $\mu(0) = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} \mu(x) = +\infty$.

Покладемо

$$M(x) = \int\limits_0^x \mu(\xi) d\xi, \ x \geq 0.$$

Функція $M(\cdot)$ має такі властивості:

1) вона диференційовна, зростаюча на $[0, +\infty)$;

2) $M(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = +\infty$;

3) $M(\cdot)$ – опукла функція, тобто виконуються такі умови:

а) $\forall \{x_1, x_2\} \subset [0; +\infty):\ M(x_1) + M(x_2) \leq \leq M(x_1 + x_2)$;

б) $\forall x \in [0;+\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}, nM(x) \leq M(nx)$.

Довизначимо $M(\cdot)$ на від'ємній півосі $(-\infty;0)$ парно, поклавши

$$M(x)=M(-x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Поряд з функцією $M(\cdot)$ розглянемо аналогічну функцію $\Omega(\cdot)$, побудовану за функцією $\omega(\cdot)$, яка має такі самі властивості, що й функція $\mu(\cdot)$.

Покладемо далі

$$W_M^{\{k!\}}=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})|\ \exists\, c>0\ \exists\ A>0\ \exists\, a>0\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+\ \forall\, x\in\mathbb{R}:\ \left|D_x^k\varphi(x)\right|\leq cA^k k! e^{-M(ax)}\},$$

причому сталі c,A,a залежать лише від функції $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$;

$$W_{\{k!\}}^{\Omega}=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{C})|\ \exists\, c>0\ \exists\ B>0\ \exists\, b>0\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+\ \forall\, z\in\mathbb{C}:\ \left|z^k\varphi(z)\right|\leq cB^k k! e^{\Omega(bImz)}\}.$$

Зазначимо, що простір $W_M^{\{k!\}}$ ($W_{\{k!\}}^{\Omega}$) можна подати у вигляді об'єднання зліченно-нормованих просторів $W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}$ ($W_{\{k!\},\delta_0}^{\Omega,B}$), де

$$W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}=\{\varphi\in W_M^{\{k!\}}|\ \forall\overline{A}>A\ \forall\overline{a}<\delta_0\ \exists\, c>0\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+\ \forall\, x\in\mathbb{R}:\ |D_x^k\varphi(x)|\leq c\overline{A}^k k! e^{-M(\overline{a}x)}\},$$

$$W_{\{k!\},\delta_0}^{\Omega,B}=\{\varphi\in W_{\{k!\}}^{\Omega}|\forall\{\delta,\rho\}\subset(0;1)\ \exists\, c>0\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+\ \forall\, z\in\mathbb{C}:\ |z^k\varphi(z)|\leq\ c(B+\rho)^k k! e^{\Omega(\delta_0(1+\delta)Imz)}\}.$$

Візьмемо довільну функцію φ, що належить простору $W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}$ ($W_{\{k!\},\delta_0}^{\Omega,B}$), для якої покладемо

$$\|\varphi\|_{\delta\rho}=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ k\in\mathbb{Z}_+}}\left\{\frac{\left|D_x^k\varphi\left(x\right)\right|e^{M(\delta_0(1-\delta)x)}}{\left(A+\rho\right)^k k!}\right\}$$

$$\left(\|\varphi\|_{\delta\rho}=\sup_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ k\in\mathbb{Z}_+}}\left\{\frac{\left|z^k\varphi\left(z\right)\right|e^{-\Omega(\delta_0(1+\delta)Imz)}}{\left(B+\rho\right)^k k!}\right\}\right)$$

де $\{\delta,\rho\}\subset\left\{\dfrac{1}{n},\, n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\right\}$.

Як показано у роботі [7], з цими нормами простір $W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}$ $\left(W_{\{k!\},\delta_0}^{\Omega,B}\right)$ стає повним, досконалим, зліченно-нормованим.

Нагадаємо означення збіжності у просторі $W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}$ $\left(W_{\{k!\},\delta_0}^{\Omega,B}\right)$. Розглянемо послідовність $\{\varphi_\nu,\,\nu\in\mathbb{N}\}\subset W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}$, яку назвемо збіжною до елемента $\varphi\in W_{M,A}^{\{k!\},\delta_0}$ при $\nu\to+\infty$ у цьому просторі, якщо виконуються наступні умови:

1) $\forall k\in\mathbb{Z}_+:\ D_x^k\varphi_\nu\left(x\right)\to D_x^k\varphi\left(x\right)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$;

2) $\exists\, c>0\ \exists\, A>0\ \exists\, a>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \forall\nu\in\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in\mathbb{R}:\ \left|D_x^k\varphi\left(x\right)\right|\leq cA^k k! e^{-M(ax)}$.

Аналогічно визначається збіжність і у просторі $W_{\{k!\},\delta_0}^{\Omega,B}$.

Правильним є таке твердження [7]: якщо функції $M\left(\cdot\right)$ та $\Omega\left(\cdot\right)$ взаємодвоїсті за Юнгом (у сенсі [1]), то правильними є рівності

$$F[W_M^{\{k!\}}]=W_{\{k!\}}^{\Omega},\ \ F[W_{\{k!\}}^{\Omega}]=W_M^{\{k!\}},$$

причому оператор Фур'є F на цих просторах є неперервним.

Позначимо через

$$R_\gamma(x)=\frac{2(a+x^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+x^2)},$$

де $x\in\mathbb{R}$, $a>1$, $\gamma>1$. Нехай за функцією $\Omega_1\left(\cdot\right)=R_\gamma\left(\cdot\right)-R_\gamma\left(0\right)$, $\gamma>1$, побудований відповідний простір $W_{\Omega_1}^{\{k!\}}$. Для функції $R_\gamma(\cdot)$ правильні наступні властивості (див.[7]):

1) для кожного фіксованого $\delta>0$ функція $\overline{\theta}_\delta^\gamma\left(\cdot\right)=e^{-\delta R_\gamma(\cdot)}$ належить до простору $W_{\Omega_1}^{\{k!\}}$, причому виконується умова:

$$\exists\,\delta_1>0\ \exists\, c_1>0\ \exists\, A_1>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \forall x\in\mathbb{R}:$$

$$\left|D_x^k\overline{\theta}_\delta^\gamma\left(x\right)\right|\leq c_1A_1^k k!\overline{\theta}_\delta^\gamma\left(x\right); \tag{2}$$

2) для кожного елемента φ з $W_{\Omega_1}^{\{k!\}}$ існує таке $\delta_0\in(0;1)$, що для всіх δ з інтервалу $(0;\delta_0)$ добуток $\overline{\theta}_\delta^\gamma\left(\cdot\right)\varphi\left(\cdot\right)$ належить до простору $W_{\Omega_1}^{\{k!\}}$.

Далі, нехай

$$P_\gamma(x) = \frac{2\left(a+x^2\right)^{\gamma/2}}{\ln\left(a+x^2\right)} - \frac{2\left(a+x^2\right)^{\alpha/2}}{\ln\left(a+x^2\right)},$$

де $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\gamma > 1$, α – фіксоване дійсне відмінне від нуля число, яке менше за γ; причому a, γ і α такі, що функція $\Omega_\gamma(\cdot) = P_\gamma(\cdot) - P_\gamma(0)$ є опуклою на $[0;+\infty)$, а $\Phi \equiv W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}$.

Тоді має місце наступне твердження.

Лема 1. *Для кожного фіксованого $\delta > 0$ функція $\theta_\delta(\cdot) = e^{-\delta P_\gamma(\cdot)}$ належить до простору Φ, причому виконується така умова:*

$$\forall\delta > 0\,\exists\{c_0, A_0, \delta_0\} \subset (0;+\infty)\forall k \in \mathbb{Z}_+\forall x \in \mathbb{R}:$$

$$\left|D_x^k\theta_\delta(x)\right| \le c_0A_0^k\delta^{\tau(k)}k!\overline{\theta}_{\delta_0}^\gamma(x)\ ,\ \ \gamma > \alpha,$$

де $\tau(k) := \begin{cases} 1, & 0 < \delta \le 1, \\ k, & \delta > 1. \end{cases}$

Доведення. Розглянемо співвідношення

$$D_x^k\theta_\delta(x) = D_x^k e^{-\delta P_\gamma(x)} = D_x^k\left(e^{-\delta R_\gamma(x)}e^{\delta R_\alpha(x)}\right) = $$
$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l D_x^l\overline{\theta}_\delta^\gamma(x)\,D_x^{k-l}\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\,, k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Звідси, скориставшись оцінками (2), одержимо

$$\left|D_x^k\theta_\delta(x)\right| \le \sum_{l=1}^{k}\Bigg(C_k^l c_1 A_1^l l!\overline{\theta}_{\delta_1}^\gamma(x)\times$$
$$\times\left|D_x^{k-l}\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\right|,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.\Bigg) \qquad (3)$$

Далі оцінимо $\left|D_x^{k-l}\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\right|$. Для цього скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції [6]:

$$D_x^k f(\varphi(x)) = \sum_p\Bigg(\frac{k!}{i!j!...h!}D_\varphi^p f(\varphi)\times$$
$$\times\left(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\right)^i\left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx^2}\right)^j ... \left(\frac{d^L\varphi(x)}{L!dx^L}\right)^h\Bigg),$$

де $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (тут знак суми поширюється на всі цілочисельні невід'ємні розв'язки рівняння $k = i + 2j + ... + Lh$, а $p = i + j + ... + h$), згідно з якою одержимо нерівність

$$\left|D_x^k\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\right| \le \sum_p^k\Bigg(\frac{k!}{i!j!...h!}\delta^p\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\left|\frac{dR_\alpha(x)}{1!dx}\right|^i\times$$
$$\times\left|\frac{d^2R_\alpha(x)}{2!dx^2}\right|^j ... \left|\frac{d^LR_\alpha(x)}{L!dx^2}\right|^h\Bigg),\ x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Врахувавши тепер оцінки [7]

$$\left|D_x^l\left(\left(\ln\left(a+x^2\right)\right)^{-1}\right)\right| \le$$
$$\le cA^l l!\left(a+x^2\right)^{-l/2}\left(\ln\left(a+x^2\right)\right)^{-1},$$

$$\left|D_x^l(a+x^2)\right|^{\beta/2} \le c_0A_0^l l!(a+x^2)^{(\beta-\alpha)/2},$$
$$\beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}_+.$$

де c_0, c, A_0 і A – додатні сталі, не залежні від l та x, а також те, що

$$\left|\frac{d^pR_\alpha(x)}{p!dx^p}\right| \le \frac{1}{2(p!)}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{p}C_p^l\left|D_x^l\left(\left(\ln\left(a+x^2\right)\right)^{-1}\right)\right|\left|D_x^{p-l}(a+x^2)^{\alpha/2}\right|,$$

де $p \in \mathbb{Z}_+$, для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $p \in \mathbb{Z}_+$ дістанемо

$$\left|\frac{d^pR_\alpha(x)}{p!dx^p}\right| \le \frac{2cc_0}{p!}\sum_{l=0}^{p}\Bigg(A^lA_0^{p-l}\frac{l!(p-l)!p!}{l!(p-l)!}\times$$
$$\times\left(a+x^2\right)^{-l/2+(\alpha-p+l)/2}\left(\ln\left(a+x^2\right)\right)^{-1}\Bigg) \le$$

$$\le 2cc_0A_2^p\left(a+x^2\right)^{(\alpha-p)/2}\left(\ln\left(a+x^2\right)\right)^{-1} \le$$
$$\le c_2A_2^pR_\alpha(x)\,,\ c_2 \ne c_2(p,x)\,,\ A_2 \ne A_2(p,x)\,.$$

Отже,

$$\left|D_x^k\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\right| \le c_2A_3^k k!\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\sum_p^k\frac{(\delta R_\alpha(x))^p}{i!j!...h!},$$

при $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що при $\alpha < 0$ $R_\alpha(x)$ – обмежена величина щодо x на $\mathbb{R}$, а у випадку $\alpha > 1$ правильна така нерівність:

$$\left(\delta R_\alpha(x)\right)^p \le \overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)\sup_{t>0}\left\{t^pe^{-t}\right\} \le p!\overline{\theta}_{-\delta}^\alpha(x)$$

при $x \in \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{Z}_+$.
З огляду на це та на нерівності [7]

$$\frac{p!}{i!j!...h!} \le 2^k, \ \sum_p^k 1 \le (2e)^k,$$

остаточно одержимо, що

$$\left| D_x^k \overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x) \right| \le c_3 A_4^k k! \overline{\theta}_{\hat{\delta}}^{\alpha}(x), \qquad (4)$$

коли $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in \mathbb{R}$, де $c_3 > 0, \ A_4 > 0$ – незалежні від k і x, а $\hat{\delta} := \begin{cases} \delta, & \alpha \le 0, \\ 2\delta, & \alpha > 0. \end{cases}$

Далі, при $\alpha \le 0$ величина $\overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(\cdot)$, $\delta \in \mathbb{R}$, є також обмеженою на $\mathbb{R}$, оскільки, як уже зазначалося, такою є $R_\alpha(\cdot)$, тому врахувавши (4), з (3) приходимо до оцінки

$$\left| D_x^k \theta_\delta(x) \right| \le \sum_{l=0}^{k} \Bigg(C_k^l c_1 A_1^l l! \overline{\theta}_{\delta_1}^{\gamma}(x) c_3 A_4^{k-l} \times$$
$$\times (k-l)! \overline{\theta}_{-\delta}^{\gamma}(x) \Bigg) \le c_5 \delta^{\tau(k)} A_5^k k! \overline{\theta}_{\delta_1}^{\gamma}(x),$$

коли $x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+$, де δ_1, c_5 та A_5 – додатні сталі, незалежні від k і x; $\tau(k) := \begin{cases} 1, & 0 < \delta \le 1, \\ k, & \delta > 1. \end{cases}$

Розглянемо тепер випадок $\alpha > 0$. Передусім зазначимо, що

$$\begin{gathered} \forall \delta > 0 \ \exists r > 0 \ \forall |x| > r : \\ R_\gamma(x) - \delta R_\alpha(x) \ge 0, \ \gamma > \alpha. \end{gathered} \qquad (5)$$

Дійсно, нерівність з (5) рівносильна

$$R_\gamma(x) / R_\alpha(x) \ge \delta,$$

або те ж саме,

$$\left(a + x^2\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} \ge \delta.$$

Звідси, враховуючи монотонне зростання виразу $\left(a+x^2\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}$ стосовно x, прийдемо до твердження (5).

Згідно з оцінками (3) і (4) маємо

$$\left| D_x^k \theta_\delta(x) \right| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l c_1 A_1^l l! \overline{\theta}_{\delta_1}^{\gamma}(x)$$
$$c_3 A_4^{k-l} (k-l)! \overline{\theta}_{-2\delta}^{\gamma}(x) =$$

$$\begin{aligned} &= \overline{\theta}_{\delta_{1/2}}^{\gamma}(x) \, k! \sum_{l=0}^{k} c_1 c_3 A_1^l A_4^{k-l} \le \\ &\le \overline{\theta}_{\delta_{1/2}}^{\gamma}(x) \, \overline{\theta}_{-2\delta}^{\gamma}(x) \le \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\le c_6 A_6^k k! \overline{\theta}_{\delta_{1/2}}^{\gamma}(x) \times$$
$$\times \exp\left\{ -\left(\frac{\delta_1}{2}\right) \left(R_\gamma(x) - \left(\frac{4\delta}{\delta_1}\right) R_\alpha(x) \right) \right\},$$

коли $x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+$, (тут константа $\delta_1 > 0, \ c_6 > 0$ і $A_6 > 0$ – незалежні від x і k). Скориставшись тепер твердженням (5), з (6) дістанемо

$$\left| D_x^k \theta_\delta(x) \right| \le c_6 A_6^k k! \overline{\theta}_{\delta_{1/2}}^{\gamma}(x), \qquad (7)$$

коли $|x| > r_0, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ \alpha < \gamma$, при деякому $r_0 \in (0; +\infty)$. У випадку, коли $|x| \le r_0$ величина $\left(R_\gamma(x) - \left(\frac{4\delta}{\delta_1}\right) R_\alpha(x) \right)$ – обмежена, тому з (6) одержуємо оцінку типу (7) і для $|x| \le r_0$ (при певному значенні c_6).

Таким чином, маємо

$$\forall \delta > 0 \ \exists \{c_0, \ A_0, \ \delta_0\} \subset (0; +\infty) \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| D_x^k \theta_\delta(x) \right| \le c_0 A_0^k \delta^{\tau(k)} k! \overline{\theta}_{\delta_0}^{\gamma}(x), \gamma > \alpha,$$

що й доводить сформульовану лему. □

Лема 2. *Для кожного* $\varphi \in W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}$ *існує таке* $\delta_0 \in (0; 1)$, *що для всіх* $\delta \in (0; \delta_0)$ *добуток* $\theta_{-\delta}(\cdot) \varphi(\cdot) \in W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}$.

Доведення. Розглянемо співвідношення

$$\begin{aligned} D_x^k \left(\theta_{-\delta}(x) \varphi(x) \right) &= D_x^k \left(e^{\delta P_\gamma(x)} \varphi(x) \right) = \\ &= D_x^k \left(e^{\delta R_\gamma(x)} e^{-\delta R_\alpha(x)} \varphi(x) \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{k} C_k^l D_x^l \overline{\theta}_{\delta}^{\gamma}(x) \, D_x^{k-l} \left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\gamma}(x) \varphi(x) \right), \end{aligned}$$

де $x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки функція $\varphi(\cdot)$ належить до простору $W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}$, то згідно з означенням

$$\exists c_1 > 0 \ \exists A_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$\left| D_x^k \varphi(x) \right| \le c_1 A^k k! e^{-\Omega_\gamma(\delta_1 x)}. \qquad (8)$$

Згідно з лемою 1 маємо, що

$$\forall\delta > 0 \ \exists \{c_0,\, A_0,\, \delta_0\} \subset (0;+\infty) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ \left|D_x^k \theta_\delta (x)\right| \le c_0 A_0^k k! \overline{\theta}_{\delta_0}^{\gamma} (x)\,,$$

тоді

$$\left|D_x^k \theta_\delta (x)\right| \le c_0 A_0^k k!, \ x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

Використовуючи нерівність (9) одержимо

$$\left|D_x^k \left(\theta_{-\delta}(x)\varphi(x)\right)\right| \le c_0 \sum_{l=0}^{k} \Bigg(C_k^l A_0^l l! \times$$
$$\times \left| D_x^{k-l} \left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x)\varphi(x)\right)\right| \Bigg), \ x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Оцінюватимемо величину

$$\left| D_x^{k-l} \left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x)\varphi(x)\right)\right|.$$

Розглянемо випадок, коли $\alpha \le 0$. Тоді, маємо, що

$$\left| D_x^{k-l} \left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x)\varphi(x)\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{s=0}^{k-l} C_{k-l}^s \left| D_x^s \overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x)\, D_x^{k-l-s}\varphi(x)\right|.$$

Тепер, використовуючи нерівність (4), одержимо:

$$\sum_{s=0}^{k-l} C_{k-l}^s \left| D_x^s \overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x)\, D_x^{k-l-s}\varphi(x)\right| \le$$
$$\le c_1 c_2 \sum_{s=0}^{k-l} C_{k-l}^s A_1^s s! \overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(x) \times$$
$$\times (k-l-s)!\, A_2^{k-l-s} e^{-\Omega_\gamma(\delta_1 x)},$$

де $\{c_1, c_2, A_1, A_2, \delta_1\} \subset (0;+\infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Оскільки при $\alpha \le 0$ функція $R_\alpha(\cdot)$ обмежена на R, то такою є $\overline{\theta}_{-\delta}^{\alpha}(\cdot)$. Далі скористаємось такими нерівностями:

$$s!\,(k-l-s)! \le (k-l)!;$$

$$\sum_{s=0}^{k-l} C_{k-l}^s \le 2^{k-l};$$

$$A_1^s A_2^{k-l-s} \le \left[\max\{A_1,\, A_2\}\right]^{k-l} \equiv A_s^{k-l}.$$

Отже,

$$\left| D_x^{k-l} \left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\varphi(x)\right)\right| \le$$
$$\le c\,(2A_3)^{k-l}(k-l)! e^{-\Omega_\gamma(\delta_0 x)}, \quad \delta_0 < \delta_1.$$

Тоді

$$\left|D_x^k \left(\theta_{-\delta}(x)\varphi(x)\right)\right| \le c_0 c \sum_{l=0}^{k} \Bigg(C_k^l A_0^l l! \times$$
$$\times (2A_3)^{k-l}(k-l)! e^{-\Omega_\gamma(\delta_0 x)} \Bigg) \le$$
$$\le c_0 c_1 \left[2\max\{A_0,\, 2A_3\}\right]^{k} k! e^{-\Omega_\gamma(\delta_0 x)}, \delta_0 < \delta_1\,.$$

Таким чином, в цьому випадку отримали те, що й потрібно.

Нехай тепер $0 \le \alpha < \gamma$. Тоді використовуючи оцінку (4) одержимо

$$\left| D_x^{k-l} \left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\varphi(x)\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{s=0}^{k-l} C_{k-l}^s \left| D_x^k \overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\, D_x^{k-l-s}\varphi(x)\right| \le$$
$$\le c_3 c_4 \sum_{s=0}^{k-l} \Bigg(C_{k-l}^s A_3^s s! \overline{\theta}_{-2\delta}^{\ \alpha}(x)\,(k-l-s)! \times$$
$$\times A_3^{k-l-s} e^{-\Omega_\gamma(\delta_2 x)} \Bigg) \le$$
$$\le c_5 \left[2\max\{A_3,\, A_4\}\right]^{k-l}(k-l)! \times$$
$$\times \overline{\theta}_{-2\delta}^{\ \alpha}(x)\, e^{-\Omega_\gamma(\delta_2 x)} \equiv$$
$$\equiv c_5 A_5^{k-l}(k-l)! e^{2\delta R_\alpha(x)} e^{-2(R_\gamma(\delta_2 x) - R_\gamma(0))} =$$
$$= c_5 A_5^{k-l}(k-l)! e^{-2(R_\gamma(\delta_2 x) - R_\alpha(x) - R_\gamma(0))} \le$$
$$\le c_5 A_5^{k-l}(k-l)! e^{-2(R_\gamma(\delta_2 x) - R_\alpha(\delta_3 x) - R_\gamma(0))},$$

де $\delta_3 \in (0;1)$.

Покажемо, що існує $0 < \delta_3 < \delta_2$ таке, що

$$R_\gamma(\delta_2 x) - R_\alpha(\delta_3 x) \ge R_\gamma(\delta_3 x)\,,\ x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Справді, поділивши цю нерівність на $R_\gamma(\delta_3 x)$ одержимо

$$\frac{R_\gamma(\delta_2 x)}{R_\gamma(\delta_3 x)} - \frac{R_\alpha(\delta_3 x)}{R_\gamma(\delta_3 x)} \ge 1\,,$$

де $\dfrac{R_\alpha(\delta_3 x)}{R_\gamma(\delta_3 x)} \le 1$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді виберемо δ_3 так, щоб

$$R_\alpha(\delta_2 x) \ge 2^{\frac{\gamma}{2}} R_\alpha(\delta_3 x)$$

або
$$a+(\delta_2 x)^2 \geq 2a+2(\delta_3 x)^2$$
або
$$2\delta_3^2 \leq \delta_2^2-\frac{a}{x^2}<\delta_2^2 \qquad (x\neq 0)$$
або
$$\delta_3<\frac{\delta_2}{\sqrt{2}} \qquad (x\neq 0)\ .$$

Якщо $x=0$, то при $\delta_3<\dfrac{\delta_2}{\sqrt{2}}$ нерівність (10) виконується. Отже, при $\delta_3<\dfrac{\delta_2}{\sqrt{2}}$ маємо:
$$\left| D_x^{k-l}\left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\,\varphi(x)\right)\right| \leq$$
$$\leq c_5 A_5^{k-l}(k-l)!e^{-\Omega_\gamma(\delta_3 x)}\ x\in\mathbb{R},\ \{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+ .$$

Тоді
$$\left|D_x^k\theta_{-\delta}(x)\,\varphi(x)\right|\leq$$
$$\leq c_0c_5\sum_{l=0}^{k}C_k^lA_0^l l!A_5^{k-l}(k-l)!e^{-\Omega_\gamma(\delta_3 x)}\leq$$
$$\leq c_6\left[2\max\{A_0,\ A_5\}\right]^k k!e^{-\Omega_\gamma(\delta_3 x)},$$
$$\delta_3>0,\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Таким чином, у цьому випадку отримали те, що й потрібно.

Якщо $\alpha>\gamma$, то
$$\left| D_x^{k-l}\left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\,\varphi(x)\right)\right|\leq$$
$$\leq c_7A_7^{k-l}(k-l)!e^{-2\delta R_\alpha(x)}\left| D_x^{k-l-s}\varphi(x)\right|\leq$$
$$\leq c_7A_7^{k-l}(k-l)!e^{-2\delta R_\gamma(x)}\left| D_x^{k-l-s}\varphi(x)\right| .$$

Оскільки $\overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\,\varphi(x)\in W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}$, де $\delta\in\in(0;\delta_0)$, $\delta_0>0$ (див. лему 3 з [4]), то звідси випливає, що $D_x^{k-l}\left(\overline{\theta}_{-\delta}^{\ \alpha}(x)\,\varphi(x)\right)\in W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}$. Тому, здійснивши аналогічні міркування, як і в попередніх випадках, одержимо те, що й потрібно було довести. Таким чином, лему доведено повністю. $\square$

2. Мультиплікатори у просторі основних функцій. В цьому пункті розглянемо поняття мультиплікатора у просторі Φ, та доведемо деякі його властивості.

Означення. Функція $c(\cdot)$ називається мультиплікатором у просторі Φ, якщо виконуються такі умови:

1) $\forall\varphi\in\Phi:\ c(\cdot)\,\varphi(\cdot)\in\Phi;$

2) $\forall\{\varphi_\nu,\ \nu\in N\}\subset\Phi,\ \varphi_\nu\underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}}0:$ $c(\cdot)\,\varphi_\nu(\cdot)\underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}}0.$

Правильною є наступна теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб функція $c(\cdot)$ була мультиплікатором у просторі Φ, необхідно й достатньо, щоб для кожного фіксованого δ, $0<\delta<1$, добуток $c(\cdot)\,\theta_\delta(\cdot)\in\Phi$.*

Доведення. Необхідність є очевидною, якщо взяти до уваги означення мультиплікатора у просторі Φ. Доведемо достатність сформульованого твердження. Згідно з твердженням леми 2 маємо
$$\forall\,\varphi\in\Phi\ \exists\,\delta_0\in(0;1)\ \forall\,\delta\in(0;\delta_0)\ :$$
$$c(\cdot)\varphi(\cdot)=(c(\cdot)\,\theta_\delta(\cdot))\,(\theta_{-\delta}(\cdot)\,\varphi(\cdot))\in\Phi,$$
як добуток функцій з Φ. Отже, перша умова означення функції-мультиплікатора виконується.

Для доведення другої умови цього означення перевіримо виконання таких умов:

1) $\forall k\in\mathbb{Z}_+:\ \left|D_x^k(c(x)\,\varphi_\nu(x))\right|\to 0$ при $\nu\to+\infty$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$;

2) $\exists\,\delta>0\ \exists\,c_1>0\ \exists\,A_1>0\ \forall\nu\in\mathbb{N}\ \forall k\in\in\mathbb{Z}_+\ \forall x\in\mathbb{R}:$
$$\left|D_x^k(c(x)\,\varphi_\nu(x))\right|\leq c_1A_1^kk!e^{-\Omega_\gamma(\delta x)}.$$

Оскільки $\varphi_\nu\underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}}0$, то згідно з означенням збіжності в Φ, маємо:

а) $\forall k\in\mathbb{Z}_+:\ \left|D_x^k\varphi_\nu(x)\right|\underset{\nu\to+\infty}{\to}0$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}$;

б) $\forall\nu\in\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{Z}_+\forall x\in\mathbb{R}:\left|D_x^k\varphi_\nu(x)\right|\leq\leq c_0A_0^kk!\theta_{\delta_0}$, де c_0,A_0,δ_0 – додатні сталі, які не залежать від x, k і ν.

Тоді, використовуючи правило Лейбніца для знаходження похідної від добутку двох функцій k-го порядку, одержимо виконання першої умови. Отже,

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ : \left| D_x^k \left(c\left(x\right) \varphi_\nu \left(x\right)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C_k^l \sup_{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}} \left(\left| D_x^l c\left(x\right)\right| \right) \left| D_x^{k-l} \varphi_\nu \left(x\right)\right| \to 0$$

рівномірно по x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ (тут C_k^l – біноміальні коефіцієнти) при $\nu \to +\infty$.

Доведемо виконання наступної умови. Для цього використаємо таку оцінку з [4]:

$$\left| D_x^l \left(\theta_{-\delta}\left(x\right) \varphi_\nu \left(x\right)\right)\right| \le c_2 A_2^l k! e^{-\left(\frac{\delta_0}{2}-\delta\right)P(x)},$$

де c_2, A_2 – додатні сталі, які не залежать від $l \in \mathbb{Z}_+$ і $x \in \mathbb{R}$, а $0 < \delta < \dfrac{\delta_0}{2}$.

Звідси, зважаючи на те, що $c\left(\cdot\right)\theta_\delta\left(\cdot\right) \in \Phi$, $0 < \delta < 1$, приходимо до наступних співвідношень:

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$\left| D_x^k \left(c\left(x\right) \varphi_\nu \left(x\right)\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{l=0}^{k} \Big(C_k^l \left| D_x^{k-l} \left(c\left(x\right) \theta_\delta\left(x\right)\right)\right| \times$$
$$\times \left| D_x^l \left(\theta_{-\delta}\left(x\right) \varphi_\nu\left(x\right)\right)\right| \Big) \le$$
$$\le c_3 A_3^k k! \sup_{x\in R} \left| D_x^{k-l} \left(c\left(x\right)\theta_\delta\left(x\right)\right) \right| \times$$
$$\times e^{-\Omega_\gamma(\delta_3 x)} \equiv c_4 A_3^k k! e^{-\Omega_\gamma(\delta_3 x)},$$

де c_3, c_4, A_3, δ_3 – додатні сталі, які не залежать від ν, k і x. Таким чином, достатність теореми доведено повністю. □

Отже, властивості мультиплікатора в певній мірі визначається функцією $\theta_\delta\left(\cdot\right)$. Доведемо ще деякі допоміжні твердження, які характеризують властивості функції $\theta_\delta\left(\cdot\right)$ відносно параметра $\delta > 0$.

Лема 3. *Для кожного елемента φ з Φ граничне співвідношення $\theta_\delta\left(\cdot\right)\varphi\left(\cdot\right) \underset{\delta\to+0}{\to} \varphi\left(\cdot\right)$ виконується в розумінні топології простору Φ.*

Доведення. Отже, досить перевірити виконання таких умов:

1) $\forall k \in Z_+$: $D_x^k\left(\theta_\delta\left(x\right)\varphi\left(x\right)\right) \underset{\delta\to+0}{\to} D_x^k\varphi\left(x\right)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$;

2) $\exists\, \delta_1 > 0\ \exists\, c_1 > 0\ \exists\, A_1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \delta \in (0;1)\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\left| D_x^k \left(\theta_\delta\left(x\right)\varphi\left(x\right)\right)\right| \le c_1 A_1^k k! e^{-\Omega_\gamma(\delta_1 x)}.$$

Зазначимо, що на основі формули Лейбніца

$$D_x^k\left(\theta_\delta\left(x\right)\varphi\left(x\right)\right) = \theta_\delta\left(x\right) D_x^k\varphi\left(x\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} C_k^l D_x^l \theta_\delta\left(x\right) D_x^{k-l}\varphi\left(x\right),$$

де $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, і оскільки для кожної компактної множини $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$

$$D_x^l\theta_\delta\left(x\right) D_x^{k-l}\varphi\left(x\right) \underset{\delta\to+0}{\to} 0, \quad \theta_\delta\left(x\right) \underset{\delta\to+0}{\to} 1$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K}$ для всіх $l \in \{1;...;k\}$, то перша умова виконується.

Перевіримо виконання другої умови. Оскільки $\varphi \in \Phi$, то маємо:

$$\exists\, \delta_0 > 0\ \exists\, c_0 > 0\ \exists\, A_0 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$\left| D_x^k \varphi\left(x\right)\right| \le c_0 A_0^k k! \theta_{\delta_0}\left(x\right).$$

Враховуючи нерівність з твердження леми 1 та властивість монотонності послідовності $\{k!\}_{k=0}^{+\infty}$, одержуємо оцінку

$$\left| D_x^k \left(\theta_\delta\left(x\right)\varphi\left(x\right)\right)\right| \le$$
$$\sum_{i=1}^{k} C_k^l \left| D_x^l\theta_\delta\left(x\right)\right| \left| D_x^{k-l}\varphi\left(x\right)\right| \le$$
$$\le c_0 \sum_{i=1}^{k} C_k^l \sup_{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}} \left(\left| D_x^l\theta_\delta\left(x\right)\right| \right) k! A_0^{k-l} \theta_{\delta_0}\left(x\right) \le$$
$$\le c_0 M \sum_{l=0}^{k} \left(2A_0\right)^k \theta_{\delta_0}\left(x\right) \le$$
$$\le c_0 M \left(2A_0\rho\right)^k \theta_{\delta_0}\left(x\right),$$

де $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}} \left| D_x^l\theta_\delta\left(x\right)\right|$, $\rho \ge 1$, тобто доведено другу умову, сформульовану вище. □

Лема 4. *Функція $\theta_t\left(\cdot\right)$ диференційовна по $t > 0$ у розумінні топології простору Φ.*

Доведення. Досить переконатись у тому, що граничне співвідношення

$$\psi_{\Delta t}\left(t,x\right) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\Delta t}\left[\theta_{(t+\Delta t)}\left(x\right) - \theta_t\left(x\right)\right] \underset{\Delta t\to 0}{\to} P_\gamma\left(x\right)\theta_t\left(x\right)$$

виконується у тому розумінні, що:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \forall t > 0$:
$D_x^k \psi_{\Delta t}(t,x) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_x^k \left(P_\gamma(x)\, \theta_t(x)\right)$
рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}$;

2) $\forall t > 0 \ \exists \delta_3 > 0 \ \exists c_3 > 0 \ \exists A_3 > 0$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall \Delta t \in (-1;1)\ , \ |\Delta t| \leq \frac{t}{2}\ :$$

$$\left|D_x^k \psi_{\Delta t}(t,x)\right| \leq c_3 A_3^k k! e^{-\Omega_\gamma(\delta_3 x)}.$$

Функція $\theta_t(\cdot)$, $t > 0$, диференційовна по t у звичайному розумінні, отже,

$$\varphi_{\Delta t}(t,x) = P_\gamma(x)\, \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x)\,,$$

де $t + \eta\Delta t > 0$, $\eta \in (0;1)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, згідно з формулою Лейбніца

$$D_x^k \psi_{\Delta t}(t,x) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j D_x^j P_\gamma(x)\, D_x^{k-j} \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x)\,,$$

$$t + \eta\Delta t > 0, \eta \in (0;1), t > 0, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Враховуючи те, що

$$D_x^j P_\gamma(x)\, D_x^{k-j} \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_x^j P_\gamma(x)\, D_x^{k-j} \theta_t(x)$$

рівномірно по x на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \subset \mathbb{R}$, з останньої рівності приходимо до виконання першої умови.

Виконання другої умови безпосередньо випливає з лем 1 та 2, а також з представлення похідної $D_x^k \psi_{\Delta t}(t,x)$ через формулу Лейбніца. □

Зважаючи на те, що оператор оберненого перетворення Фур'є F^{-1} є неперервним у просторі Φ, з твердження леми 4 приходимо до такого наслідку.

Наслідок. Для кожного $t > 0$ є правильною рівність

$$F^{-1}\left[\frac{d}{dt}\theta_t(\cdot)\right] = \frac{d}{dt} F^{-1}\left[\theta_t(\cdot)\right].$$

3. Задача Коші. Розглянемо рівняння (1) з параметром $a > 1$, причому γ і a виберемо такі, що функція $\Omega_\gamma(\cdot)$, яка визначена у п. 1 є опуклою.

Якщо для рівняння (1) задати початкову умову

$$U(t,\ \cdot)\,|_{t=0} = f\ ,\ f \in \tilde{\Phi}'\,, \tag{11}$$

де $\tilde{\Phi}' \equiv F[\Phi]$ – простір Фур'є-образів, тобто

$$F[\Phi] = \left\{ F[\varphi](\sigma) = \int_R \varphi(x)\, e^{ix\sigma} dx\ ,\ \varphi \in \Phi \right\}\,,$$

де $\sigma \in \mathbb{R}$, то одержимо задачу Коші (1), (11), під розв'язком якої розумітимемо функцію U, яка є диференційовною по t, при кожному $t > 0$ належить до S, а також задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (11) у тому сенсі, що

$$U(t,\ \cdot) \underset{t \to +0}{\overset{\tilde{\Phi}'}{\longrightarrow}} f.$$

Позначимо через $G_t(\cdot)$ обернене перетворення Фур'є функції

$$\theta_t(x) = \exp\left(-\frac{2t}{\ln(a+x^2)}\left(\left(a+x^2\right)^{\gamma/2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(a+x^2\right)^{\alpha/2}\right)\right),\ x \in \mathbb{R},$$

тобто

$$G_t(x) = F^{-1}\left[\theta_t(\xi)\right](t,\ x)\ ,\ t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $M_\gamma(\cdot)$ і $\Omega_\gamma(\cdot)$ є взаємодвоїстими за Юнгом функціями [1]. Тоді для того, щоб задача Коші* (1), *(11) була коректно розв'язною (тобто мала єдиний розв'язок, який неперервно залежить від початкових даних) і:*

1) *її розв'язок $U(t,\ \cdot)$ при кожному фіксованому $t > 0$ належав до простору $\tilde{\Phi} \equiv W_{\{k!\}}^{M_\gamma}$;*

2) $\dfrac{d}{dt} F[U] = F\left[\dfrac{dU}{dt}\right]\ ,\ t > 0\,,$

необхідно і досить, щоб перетворення Фур'є $F[f]$ було мультиплікатором у *просторі* Φ. *При цьому завжди виконуватиметься рівність*

$$U(t,x) = f * G_t(x)\ ,\ t>0\,,\ x\in\mathbb{R},$$

де операція $*$ *позначає згортку.*

Доведення. Перш за все встановимо, що

$$\forall f\in S:\ \int\limits_{\alpha}^{\gamma}\left(\left(aE-D^2\right)^{\tau/2} f\right)(x)\,d\tau =$$
$$= F^{-1}\left[P(\xi)\,F[f](\xi)\right](x)\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Для цього досить переконатись у тому, що

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma} F^{-1}\left[\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} F[f](\xi)\right]d\tau =$$
$$= F^{-1}\left[\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} d\tau F[f](\xi)\right](x)\,, \tag{12}$$
$$f\in S\,,\ x\in\mathbb{R}.$$

Але рівність (12) стає очевидною, якщо врахувати, що функція

$$\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} e^{-ix\xi}F[f](\xi)$$

вимірна (як неперервна) за сукупністю змінних $\tau\in(\alpha;\gamma]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}$, а інтеграл

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} F[f](\xi)\,d\tau d\xi$$

абсолютно збігається по $x\in\mathbb{R}$. Покажемо цей факт. Розглянемо спочатку випадок, коли $\alpha>0$. Тоді, зваживши на властивості елементів простору S, одержимо

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} e^{-ix\xi}F[f](\xi)\right|d\tau\,d\xi\le$$
$$\le\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2}|F[f](\xi)|\,d\tau\,d\xi<+\infty,$$

де $x\in\mathbb{R}$, $f\in S$.

У випадку, коли $\alpha<0$ отримуємо

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} e^{-ix\xi}F[f](\xi)\right|d\tau\,d\xi\le$$
$$\le\int\limits_{-|\alpha|}^{0}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|a^{\tau/2}\ |F[f](\xi)|\right|d\tau\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{0}^{\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\left(a+\xi^2\right)^{\tau/2} F[f](\xi)\right|d\tau\,d\xi<+\infty,$$

тут $x\in\mathbb{R}$, $f\in S$.

Таким чином, рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$\begin{gathered}\frac{dU(t,x)}{dt}+\\ +F^{-1}\left[P_\gamma(\xi)\,F[U](t,\xi)\right](t,x)=\\ =0\,,\ t>0\,,\ x\in\mathbb{R},\end{gathered}\tag{13}$$

тобто задача Коші (1), (11) є рівносильною задачі Коші (13), (11).

Далі, оскільки нас цікавлять розв'язки рівняння (13), які при кожному фіксованому $t>0$ є елементами простору $\Psi=\tilde{\Phi}$ і по t задовольняють умову 2 даної теореми, то, враховуючи те, що відображення

$$F\left(F^{-1}\right):\ W_{\Omega_\gamma}^{\{k!\}}\to W_{\{k!\}}^{M_\gamma},$$

є взаємно однозначним і неперервним, одержуємо рівносильність рівняння (13) з рівнянням

$$\frac{d\tilde{U}(t,\xi)}{dt}+P_\gamma(\xi)\,\tilde{U}(t,\xi)=0\,,\tag{14}$$

при $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ (тут $\tilde{Y}=F[Y]$), причому початкова умова (11) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{U}(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\overset{\Phi'}{\to}}\tilde{f}\,.\tag{15}$$

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (1), (11) у просторі Ψ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (14), (15) у просторі Φ.

Доведемо необхідність. Для цього досить показати, що якщо задача Коші (14), (15) коректно розв'язна, то $\tilde{f}$ – мультиплікатор у Φ.

Зазначимо, що рівняння (14) – звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок якого

$$\tilde{U}(t,\xi) = c(\xi)\,\theta_t(\xi)\ ,\ t>0\,,\ \xi\in\mathbb{R}. \qquad (16)$$

Оскільки $\tilde{U}(t,\cdot)\in\Phi$ при кожному фіксованому $t>0$, то згідно з теоремою 1 функція $c(\cdot)$ є мультиплікатором у просторі Φ. Із умови (15) та з рівності (16) знаходимо

$$\forall\varphi\in\Phi:\ \langle c(\cdot)\,,\,\varphi(\cdot)\rangle = \langle\tilde{f}(\cdot)\,,\,\varphi(\cdot)\rangle,$$

де у кутових дужках позначено дію узагальненої функції на просторі основних функцій. Звідси на підставі єдності розв'зку задачі Коші (14), (15) переконуємось у тому, що $\tilde{f}\equiv F[f]$ – мультиплікатор у просторі Φ. Отже, необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай $F[f]$ – мультиплікатор у просторі Φ, тоді (див. лему 1) функція $\tilde{U}(t,\cdot) = \tilde{f}(\cdot)\,\theta_t(\cdot)$ є елементом з простору Φ при кожному $t>0$, причому вона є розв'язком задачі Коші (14), (15). Доведемо, що цей розв'язок єдиний у Φ. Для цього припустимо, що існує у цьому просторі ще один розв'язок $\tilde{U}_1$ цієї задачі. Виходячи зі структури загального розв'язку (16) рівняння (14), маємо

$$\tilde{U}_1(t,\cdot) = c_1(\cdot)\,\theta_t(\cdot)\ ,\ t>0.$$

Оскільки $\tilde{U}_1(t,\cdot)\in\Phi$, $t>0$, то функція $c_1(\cdot)$ – мультиплікатор у Φ (теорема 1).

Розглянемо функцію $V(t,\cdot) = \tilde{U}(t,\cdot) - \tilde{U}_1(t,\cdot)$, $t>0$, яка також є розв'язком рівняння (14), причому ця функція задовольняє умову $V(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\overset{\Phi'}{\to}} 0$. З цієї умови, оскільки різниця мультиплікаторів у просторі Φ є мультиплікатором у цьому просторі, то матимемо

$$\langle V(t,\cdot)\,,\,\varphi(\cdot)\rangle \underset{t\to+0}{\to} \langle\tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot)\,,\,\varphi(\cdot)\rangle =$$
$$= \langle 0,\,\varphi(\cdot)\rangle\,,\ \varphi\in\Phi.$$

Таким чином,

$$\forall\varphi\in\Phi:\ \langle\tilde{f} - c_1(\cdot)\ ,\ \varphi(\cdot)\rangle = 0.$$

Покладемо в останній рівності

$$\varphi(\cdot) = \overline{\left(\tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot)\right)}\,\theta_1(\cdot)\in\Phi$$

й одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\left(\tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot)\right)^2}\,\theta_1(\xi)\,d\xi = 0$$

(тут $\bar{g}(\cdot)$ – функція, комплексно-спряжена до $g(\cdot)$). Звідси $\tilde{f}(\cdot) = c_1(\cdot)$ майже скрізь на d. Але оскільки $\tilde{f}(\cdot)$ і $c_1(\cdot)$ – нескінченно диференційовні функції, то ця рівність справджується скрізь на $\mathbb{R}$, тобто

$$\tilde{U}_1(t,\xi)\equiv U(t,\xi)\ ,\ t>0\,,\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Отже, задача Коші (14), (15) має єдиний розв'язок у просторі Φ.

Що стосується умови 2 цієї теореми, то її виконання безпосередньо випливає з наслідку з леми 4.

Оскільки правильним є співвідношення

$$U(t,\cdot) = F^{-1}\left[\tilde{U}(t,\xi)\right] =$$
$$= F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\,\theta_t(\xi)\right]\ ,\ t>0,$$

то беручи до уваги твердження теореми 1 з [6], приходимо до висновку, що

$$U(t,\cdot) = f * G_t(\cdot)\ ,\ t>0,$$

де $G_t(x) = F^{-1}\left[\exp(-iP_\gamma(\xi))\right](x)$.

Розв'язок U задачі Коші (1), (11) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок $\tilde{U}$ має таку властивість, а F^{-1} є неперервним оператором з Φ у $\tilde{\Phi}$. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.:Физматгиз, 1958. – 274с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основних и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

3. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225с.

4. *Гуревич Б.Л.* Нове типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем конечно-разностных уравнений // Докл. АН СРСР, **XCIX** (1954), №6. – С.893-895.

5. *Гуревич Б.Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для дифференциально-разностных уравнений // Докл. АН СРСР, **108** (1956), №6. – С.1001-1003.

6. *Борок В.М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СРСР, **97** (1954), №6. – С.949-952.

7. *Літовченко В.А.* Коректна розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду // Укр.мат.журн. **56** (2004), №2. – С.185-197.

8. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з гладкими символами // Нелінійні коливання. **9** (2006), №4. – С.502-523.

9. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.