УДК 517.52

©2010 р. В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ОПЕРАТОРНОГО РЯДУ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$

Наведено умови збіжності операторного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$.

We obtain the conditions for convergence of operator series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$.

Нехай E – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, $L(E,E)$ – банахова алгебра лінійних неперервних операторів B, що діють у просторі E, з нормою

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$$

та одиницею I, а $\sigma(C)$ і $\partial\sigma(C)$ – спектр і межа спектра оператора $C \in L(E,E)$ відповідно.

Розглянемо операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}, \tag{1}$$

де $A \in L(E,E)$.

Оскільки $n = e^{\ln n}$, то загальний член ряду (1) можна подати за допомогою операторної експоненти у вигляді

$$n^{-A} = e^{-(\ln n)A}. \tag{2}$$

Нагадаємо, що операторна експонента e^{tA}, де $t \in \mathbb{C}$, може бути визначена рівностями

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots \tag{3}$$

і

$$e^{tA} = \int\limits_{\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

де Γ – орієнтований у додатному напрямку спрямний контур, що охоплює спектр $\sigma(A)$ [1], [2]. Також експоненту e^{tA} можна визначити як розв'язок [2] диференціального рівняння

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

що задовольняє початкову умову

$$X(0) = I.$$

Зазначимо, що добре відомий у математичному аналізі [3], [4] числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}, \tag{4}$$

де $p \in \mathbb{R}$, є окремим випадком ряду (1).

Нас цікавитимуть умови збіжності ряду (1). Для розв'язання цієї непростої задачі нам будуть потрібні деякі допоміжні результати.

1. Допоміжні твердження. Розглянемо операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{5}$$

де $A_n \in L(E,E)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ряд (5) називається *збіжним*, якщо існує такий елемент $S \in L(E,E)$, що

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S - \sum_{k=1}^{n} A_k \right\| = 0.$$

Якщо ж такого елемента не існує, то цей ряд називається *розбіжним*.

З означення збіжного операторного ряду випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Операторний ряд* (5) *збігається тоді і тільки тоді, коли для довільних відображень* $p_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k = \overline{1,2}$, *для яких* $p_1(n) \le p_2(n)$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} p_1(n) = +\infty$, *виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=p_1(n)}^{p_2(n)} A_k \right\| = 0.$$

Важливими для подальшого також є наступні теореми про оцінку норми операторної експоненти і про межову точку спектра оператора.

Теорема 2 ([2]). *Для того, щоб дійсному числу* ρ *відповідало додатне число* N_ρ *таке, щоб*

$$\|e^{tA}\| \le N_\rho e^{\rho t}, \ t \ge 0,$$

необхідно, щоб

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \le \rho\},$$

і достатньо, щоб

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < \rho\}.$$

Теорема 3 ([2]). *Якщо* $\lambda \in \partial\sigma(A)$, *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує нормований вектор* $x \in E$ ($\|x\| = 1$) *такий, що*

$$\|(A - \lambda I)x\| < \varepsilon.$$

2. Формулювання основного результату. Нагадаємо, що числовий ряд (4) з дійсним p збігається лише у випадку $p > 1$. Цей ряд у випадку комплексного p збігається тільки тоді, коли $\mathrm{Re}\, p > 1$. Сума ряду (4) є значенням дзета-функції Рімана $\zeta(z)$ [5], [6] у точці $z = p$.

Для операторного ряду (1) справджуються аналогічні умови збіжності.

Теорема 4. *Операторний ряд* (1) *збігається лише у випадку*

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 1\}.$$

3. Доведення теореми 4. Проведемо дослідження збіжності операторного ряду (1) у кожному з випадків:

а) $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 1\}$;
б) $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda = 1\} \ne \emptyset$;
в) $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda = 1\} = \emptyset$ і $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 1\} \ne \emptyset$.

Спочатку розглянемо випадок а).

Завдяки теоремі 2, рівності (2) та компактності множини $\sigma(A)$ існують такі додатні числа $\rho > 1$ і $N \ge 1$, що

$$\left\| e^{(-\ln n)A} \right\| \le N e^{-\rho \ln n}, \ n \ge 1,$$

тобто

$$\left\| n^{-A} \right\| \le \frac{N}{n^\rho}, \ n \ge 1.$$

Оскільки числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{n^\rho}$$

збігається, то на підставі ознаки порівняння [3] збігається і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| n^{-A} \right\|.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \left\| n^{-A} \right\| = 0.$$

Тому завдяки нерівності трикутника для елементів банахової алгебри $L(E,E)$

$$\left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} n^{-A} \right\| \to 0,$$

якщо $m_1 \le m_2$ і $m_1 \to +\infty$.

Отже, на підставі теореми 1 у випадку а) ряд (1) збігається.

Тепер розглянемо випадок б).

Нехай $1+\beta i \in \partial\sigma(A)$, де $\beta \in \mathbb{R}$. Спочатку приділимо увагу випадку $\beta \neq 0$. Розглянемо дійсні числа

$$t_k = e^{\frac{2k\pi}{|\beta|}},\ k \in \mathbb{N},$$

і

$$\tau_k = e^{\frac{(4k+1)\pi}{2|\beta|}},\ k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що

$$\cos(\beta \ln t_k) = 1,\ k \in \mathbb{N},$$

$$\cos(\beta \ln \tau_k) = 0,\ k \in \mathbb{N},$$

і

$$\cos(\beta \ln t) > 0 \tag{6}$$

для всіх $t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [t_k, \tau_k)$. Використаємо натуральні числа

$$n_k = [t_k] + 1,\ k \in \mathbb{N},$$

і

$$m_k = [\tau_k],\ k \in \mathbb{N},$$

де $[x]$ – ціла частина числа x. Оцінимо знизу

$$\left| \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(1+\beta i)} \right|.$$

Оскільки за формулами Ейлера [7]

$$\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(1+\beta i)} = \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1} e^{-(\beta \ln n) i} =$$

$$= \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1} (\cos(\beta \ln n) - i \sin(\beta \ln n)),$$

то для всіх досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(1+\beta i)} \right| \geq$$

$$\geq \left| \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1} \cos(\beta \ln n) \right| =$$

$$= \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1} \cos(\beta \ln n) >$$

$$> \int\limits_{n_k}^{m_k-1} t^{-1} \cos(\beta \ln t) dt >$$

$$> \int\limits_{t_k+1}^{\tau_k-2} t^{-1} \cos(\beta \ln t) dt =$$

$$= \frac{1}{|\beta|} \int\limits_{|\beta| \ln(t_k+1)}^{|\beta| \ln(\tau_k-2)} \cos s\, ds >$$

$$> \int\limits_{2k\pi+\frac{\pi}{3}}^{2k\pi+\frac{\pi}{6}} \cos s\, ds = \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}.$$

Тут ураховано співвідношення (6) і те, що для досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$|\beta| \ln(t_k + 1) < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

і

$$|\beta| \ln(\tau_k - 2) > 2k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Отже, для всіх досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(1+\beta i)} \right| > \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}. \tag{7}$$

Далі покажемо, що

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-A} \right\| \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}. \tag{8}$$

Зафіксуємо довільне $k \in \mathbb{N}$, для якого виконується співвідношення (7).

Використаємо теорему 3. Існують нормовані вектори $x_l \in E$, $l \in \mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{l\to\infty} \|(A - (1+\beta i) I)\, x_l\| = 0.$$

Тому

$$\lim_{l\to\infty} \|(A^m - (1+\beta i)^m I)\, x_l\| = 0$$

для кожного $m \in \mathbb{N}$ і на підставі (3)

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \left(e^{-tA} - e^{-t(1+\beta i)} I\right) x_l \right\| = 0$$

для кожного $t \geq 0$.

Отже, завдяки (2)

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(n^{-A}-n^{-(1+\beta i)}I\right)x_l\right\|=0,\ n\in\mathbb{N},$$

зокрема,

$$\max_{n=\overline{n_k,m_k}}\left\|\left(n^{-A}-n^{-(1+\beta i)}I\right)x_l\right\|=0. \qquad (9)$$

Оскільки для кожного $l\in\mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-A}\right\|\geq\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-A}x_l\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-(1+\beta i)}x_l+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=n_k}^{m_k}\left(n^{-A}-n^{-(1+\beta i)}I\right)x_l\right\|\geq$$

$$\geq\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-(1+\beta i)}x_l\right\|-$$

$$-\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}\left(n^{-A}-n^{-(1+\beta i)}I\right)x_l\right\|\geq$$

$$\geq\left|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-(1+\beta i)}\right|-$$

$$-\sum_{n=n_k}^{m_k}\left\|\left(n^{-A}-n^{-(1+\beta i)}I\right)x_l\right\|,$$

то на підставі (9)

$$\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-A}\right\|\geq\left|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-(1+\beta i)}\right|.$$

Звідси та (7) випливає (8).

Таким чином, на підставі теореми 1 та співвідношення (8) у випадку $\beta\neq0$ операторний ряд (1) є розбіжним.

Тепер приділимо увагу випадку $\beta=0$, коли $1\in\partial\sigma(A)$.

Для кожного $k\in\mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left\|\sum_{n=k}^{2k}n^{-A}\right\|\geq\sum_{n=k}^{2k}n^{-1}. \qquad (10)$$

Справді, за теоремою 3 існують нормовані вектори x_l, $l\in\mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{l\to\infty}\|(A-I)x_l\|=0.$$

Тому аналогічним чином, як і у випадку $\beta\neq0$, отримуємо, що для кожного $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(n^{-A}-n^{-1}I\right)x_l\right\|=0. \qquad (11)$$

Оскільки для всіх $k,l\in\mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{n=k}^{2k}n^{-A}\right\|\geq\left\|\sum_{n=k}^{2k}n^{-A}x_l\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{n=k}^{2k}n^{-1}x_l+\sum_{n=k}^{2k}\left(n^{-A}-n^{-1}I\right)x_l\right\|\geq$$

$$\geq\left\|\sum_{n=k}^{2k}n^{-1}x_l\right\|-\left\|\sum_{n=k}^{2k}\left(n^{-A}-n^{-1}I\right)x_l\right\|=$$

$$=\sum_{n=k}^{2k}n^{-1}-\left\|\sum_{n=k}^{2k}\left(n^{-A}-n^{-1}I\right)x_l\right\|,$$

то на підставі (11) виконується співвідношення (10).

Ураховуючи те, що для всіх $k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{n=k}^{2k}n^{-1}>\frac{k+1}{2k}>\frac{1}{2}, \qquad (12)$$

отримуємо

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left\|\sum_{n=k}^{2k}n^{-A}\right\|\geq\frac{1}{2}\neq0.$$

Звідси і теореми 1 випливає, що у випадку $1\in\partial\sigma(A)$ операторний ряд (1) є розбіжним.

Отже, у випадку б) операторний ряд (1) розбігається.

Нарешті дослідимо ряд (1) у випадку в).

Нехай $\alpha+\beta i\in\partial\sigma(A)$, де $\alpha<1$ і $\beta\in\mathbb{R}$. Розглянемо випадок $\beta\neq0$. Використаємо числа n_k і m_k, що розглядалися у випадку $\alpha=1$ і $\beta\neq0$, і очевидні нерівності

$$\left|\sum_{n=n_k}^{m_k}n^{-(\alpha+\beta i)}\right|\geq$$

$$\geq \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-\alpha}\cos(\beta\ln n) >$$

$$> \sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-1}\cos(\beta\ln n).$$

Звідси та з проведених міркувань у частині " $\alpha = 1$ і $\beta \neq 0$ " випливає, що для всіх досить великих $k \in \mathbb{N}$ справджується співвідношення

$$\left|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(\alpha+\beta i)}\right| > \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}. \qquad (13)$$

Далі використаємо теорему 3. За цією теоремою існують нормовані вектори x_l, $l \in \mathbb{N}$, для яких виконується співвідношення

$$\lim_{l\to\infty}\|(A-(\alpha+\beta i)I)x_l\| = 0.$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(n^{-A} - n^{-(\alpha+\beta i)I}\right)x_l\right\| = 0. \qquad (14)$$

Оскільки для всіх $k, l \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-A}\right\| \geq \left\|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-A}x_l\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(\alpha+\beta i)}x_l + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=n_k}^{m_k}\left(n^{-A} - n^{-(\alpha+\beta i)}I\right)x_l\right\| \geq$$

$$\geq \left\|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(\alpha+\beta i)}x_l\right\| -$$

$$- \left\|\sum_{n=n_k}^{m_k}\left(n^{-A} - n^{-(\alpha+\beta i)}I\right)x_l\right\| \geq$$

$$\geq \left|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(\alpha+\beta i)}\right| -$$

$$- \sum_{n=n_k}^{m_k}\left\|\left(n^{-A} - n^{-(\alpha+\beta i)}I\right)x_l\right\|,$$

то на підставі (14) для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-A}\right\| \geq \left|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-(\alpha+\beta i)}\right|.$$

Тому завдяки (13)

$$\left\|\sum_{n=n_k}^{m_k} n^{-A}\right\| > \frac{\sqrt{3}-1}{2|\beta|}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$. Звідси та теореми 1 випливає, що у випадку $\alpha < 1$ і $\beta \neq 0$ операторний ряд (1) розбігається.

Тепер розглянемо випадок $\alpha < 1$ і $\beta = 0$. Легко показати, використовуючи (2), (3) та теорему 2, що для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{n=k}^{2k} n^{-A}\right\| \geq \sum_{n=k}^{2k} n^{-\alpha} > \sum_{n=k}^{2k} n^{-1},$$

звідки на підставі (12) та теореми 1 випливає розбіжність ряду (1).

Отже, у випадку в) операторний ряд (1) розбігається.

Теорему 4 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория, т.1. – М.: ИЛ, 1962. – 896с.

2. *Далецкий М.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.

4. *Слюсарчук В.Ю.* Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Рівненський державний технічний університет, 2001. – 240 с.

5. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

6. *Бейкер А.* Введение в теорию чисел. – Минск: Вышэйшая школа, 1995. – 128 с.

7. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1966. – 388 с.