УДК 517.9

© 2009 р. Л.М. Сергєєва, Я.Й. Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗНАХОДЖЕННЯ ГЛОБАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для лінійної системи функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженим відхиленням аргументу побудована відповідна лінійна система звичайних диференціальних рівнянь, всі глобальні розв'язки якої є глобальними розв'язками вихідної системи. Обгрунтовано побудову апроксимуючої системи диференціальних рівнянь.

For the linear system of functional-differential equations with bounded deviating argument the appropriate linear system of ordinary differential equations was built, all global solutions of which are global solutions of initial system. The construction of approximate system of differential equations was substantiated.

Питання побудови глобальних розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь досліджувались багатьма авторами, зокрема у працях [1-4].

А.М. Самойленко в статті [5] побудував систему без відхилення аргументу, всі розв'язки якої є розв'язками вихідної системи. У даній роботі аналогічна задача розглядається для системи функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_0^\lambda x(t+\eta)d_\eta\xi(t,\eta) + f(t), \qquad (1)$$

де $\lambda \in R$. Побудуємо відповідну (1) систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \qquad (2)$$

всі розв'язки якої будуть глобальними розв'язками системи рівнянь (1). Припустимо, що $t \in R$, $x \in R^n$; $\xi(t,\eta)$ – $n \times n-$ матрична функція, вимірна в $(t,\eta) \in R \times [0,\lambda]$, неперервна зліва по η на $(0,\lambda)$, має обмежену варіацію по η на $[0,\lambda]$ для кожного t і $Var_{[0,\lambda]}\xi(t,\cdot) \leq p(t) \in \mathbb{L}_1^{loc}((-\infty,\infty),R)$; f,g – визначені й вимірні (за Лебегом) векторні функції.

Цей же підхід для диференціальних рівнянь нейтрального типу з аргументом, що відхиляється, реалізований в роботі [6].

Покажемо, що матриця $C = C(t)$ і вектор-функція $g = g(t)$ задовольняють рівняння вигляду:

$$C(t) = \int\limits_0^\lambda \Omega_t^{t+\eta}(C)d_\eta\xi(t,\eta), \qquad (3)$$

$$g(t) = f(t) + \int\limits_0^\lambda \int\limits_t^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)dsd_\eta\xi(t,\eta). \qquad (4)$$

Тут $\Omega_\tau^t(C)$ – фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь (2), яка є розв'язком рівняння $\Omega_\tau^t(C) = I + \int\limits_\tau^t C(s)ds + \int\limits_\tau^t C(s)\int\limits_\tau^s C(s_1)ds_1ds + \ldots + \int\limits_\tau^t C(s)\int\limits_\tau^s C(s_1)\ldots\int\limits_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1}\ldots ds_1ds + \ldots$, де I – одинична матриця, $t \in R, \tau \in R$.

Загальний розв'язок системи рівнянь (2), як відомо, визначається формулою Коші [7]

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 + \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds, \qquad (5)$$

де $t \in R$, $\tau \in R$, $x_0 \in R^n$. Функція (5) задовольняє рівняння (1), коли

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds] + g(t) =$$

$$= \int_0^{\lambda} [\Omega_\tau^{t+\eta}(C)x_0 +$$

$$+ \int_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)ds]d_\eta \xi(t,\eta) + f(t). \qquad (6)$$

Покладаючи в (6) $x_0 = 0$, одержимо

$$C(t) \int_\tau^{t} \Omega_s^{t}(C)g(s)ds + g(t) =$$

$$= \int_0^{\lambda} \int_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)ds d_\eta \xi(t,\eta) + f(t), \qquad (7)$$

де $t \in R$.

Використовуючи (6) і (7), отримаємо рівняння

$$C(t)\Omega_\tau^t(C) = \int_0^{\lambda} \Omega_\tau^{t+\eta}(C)d_\eta \xi(t,\eta), \ t \in R.$$

Враховуючи, що $\Omega_t^{t+\eta}(C) = \Omega_t^{\tau}(C)\Omega_\tau^{t+\eta}(C)$, можна зробити висновок, що

$$C(t) = \int_0^{\lambda} \Omega_t^{t+\eta}(C)d_\eta \xi(t,\eta). \qquad (8)$$

Підставляючи (8) в (7), маємо

$$\int_0^{-\lambda} \Omega_t^{t+\eta}(C)d_\eta \xi(t,\eta) \int_\tau^{t} \Omega_s^{t}(C)g(s)ds + g(t) =$$

$$= \int_0^{\lambda} \int_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)ds d_\eta \xi(t,\eta) + f(t),$$

тому

$$g(t) = f(t) + \int_0^{\lambda} \int_t^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)ds d_\eta \xi(t,\eta). \qquad (9)$$

Отже, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є глобальними розв'язками системи рівнянь (1), то матриця $C(t)$ задовольняє рівняння (8), а вектор-функція $g(t)$ – рівняння (9) при $t \in R$.

Розглянемо приклади знаходження рівнянь (8), (9) в деяких часткових випадках.

Для однорідної системи рівнянь ($f(t) = 0$)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{\lambda} x(t+\eta)d_\eta \xi(t,\eta) \qquad (10)$$

система рівнянь (2) набуває вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t), \qquad (11)$$

розв'язок якої

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0. \qquad (12)$$

Тоді (12) задовольняє (10), коли:

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)\Omega_\tau^t(C)x_0 = \int_0^{\lambda} \Omega_\tau^{t+\eta}(C)x_0 d_\eta \xi(t,\eta),$$

звідки маємо:

$$C(t) = \int_0^{\lambda} \Omega_t^{t+\eta}(C)d_\eta \xi(t,\eta).$$

Приклад 1. Нехай $n = 1$, $f = 0$, c – стала, тоді (1) і (2) будуть мати, відповідно, вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{\lambda} x(t+\eta)d\xi(\eta),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = cx(t).$$

Розв'язок рівняння (2) $x(t) = x_0 e^{ct}$, тоді для c одержується рівняння

$$c = e^{-ct} \int_0^{\lambda} e^{c(t+\eta)} d\xi(\eta) = \int_0^{\lambda} e^{c\eta} d\xi(\eta).$$

Приклад 2. Нехай $\xi = \xi(\eta)$. Для системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{\lambda} x(t+\eta)d\xi(\eta) + f(t) \qquad (13)$$

апроксимуючу систему побудуємо у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = Cx(t) + g(t), \tag{14}$$

де C – стала матриця. Оскільки розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$x(t) = e^{C(t-\tau)}x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} e^{C(t-s)}g(s)ds,$$

то

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(e^{C(t-\tau)}x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} e^{C(t-s)}g(s)ds) + g(t) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\lambda}[e^{C(t+\eta-\tau)}x_0 + \int\limits_{\tau}^{t+\eta} e^{C(t+\eta-s)}g(s)ds]d\xi(\eta) +$$

$f(t)$. Покладемо $x_0 = 0$, одержимо

$$C\int\limits_{\tau}^{t} e^{C(t-s)}g(s)ds + g(t) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\lambda}\int\limits_{\tau}^{t+\eta} e^{C(t+\eta-s)}g(s)dsd\xi(\eta) + f(t).$$

Тому

$$C = \int\limits_{0}^{\lambda} e^{C\eta}d\xi(\eta),$$

$$g(t) = f(t) + \int\limits_{0}^{\lambda}\int\limits_{t}^{t+\eta} e^{C(t+\eta-s)}g(s)dsd\xi(\eta).$$

Зауваження. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t+\lambda) + f(t),$$

де $\lambda > 0$, $t \in R$, $x \in R^n$; A, B – n-вимірні матричні, f – векторна функція, причому норми матриць A, B – обмежені. Воно є частковим випадком рівняння (1), якщо $\xi(t,\eta)$ задається у вигляді:

$$\xi(t,\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \le 0, \\ A(t), & 0 < \eta < \lambda, \\ A(t) + B(t), & \eta \ge \lambda. \end{cases}$$

Слід зазначити, що в точках $\eta = 0$ і $\eta = \lambda$ функція $\xi(t,\eta)$ має стрибки. Справді, при такому виборі ядра отримаємо результати з праці А.М. Самойленка [5]:

$$C(t) = A(t) + B(t)\Omega_t^{t+\lambda}(C),$$

$$g(t) = f(t) + B(t)\int\limits_{t}^{t+\lambda}\Omega_\tau^{t+\lambda}(C)g(\tau)d\tau.$$

Для доведення цього факту слід скористатися формулою для обчислення інтеграла Стільтьєса із заданою функцією $\xi(t,\eta)$.

Доведемо існування розв'язків систем рівнянь (8) і (9) у випадку $\lambda > 0$.

Теорема. *Нехай функції f і p задовольняють накладеним вище умовам та виконуються нерівності:*

$$\|f(t)\| \le 1, \|p(t)\| \le \gamma,\ t \in R,$$

причому

$$\lambda\gamma e < 1. \tag{15}$$

Тоді існують визначені й вимірні на R розв'язки C і g рівнянь (8), (9), відповідно, такі, що $\|C\| \le m$, $\|g\| \le M$, де m і M – деякі сталі, що залежить від λ та γ.

Доведення. Розглянемо рівняння (8), розв'язки якого є вже неперервними функціями [3].

У просторі $\mathbb{C}(m)$ матриць $C = C(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$ і таких, що

$$\| C \|_0 = \sup_{t\in R}\|C(t)\| \le m,$$

визначимо оператор S

$$(SC)(t) = \int\limits_{0}^{\lambda}\Omega_t^{t+\eta}(C)d_\eta\xi(t,\eta) \tag{16}$$

Тоді для $(SC)(t)$ правильна оцінка

$$\|SC\|_0 = \sup_{t\in R}|\int\limits_{0}^{\lambda}\Omega_t^{t+\eta}(m)d_\eta\xi(t,\eta)| = \gamma e^{\lambda m}.$$

Тому, якщо виконується нерівність

$$\gamma e^{\lambda m} \le m, \tag{17}$$

то оператор S відображає простір $\mathbb{C}(m)$ в себе.

Нехай матричні функції $C_1, C_2 \in \mathbb{C}(m)$. Для різниці $(SC_1)(t) - (SC_2)(t)$ маємо:

$$\|SC_1 - SC_2\| = \| \int\limits_0^{\lambda} [\Omega_t^{t+\eta}(C_1) -$$

$$-\Omega_t^{t+\eta}(C_2)] d_\eta \xi(t,\eta)\| \le \int\limits_0^{\lambda} [\| \int\limits_t^{t+\eta} C_1(s)ds -$$

$$-\int\limits_t^{t+\eta} C_2(s)ds\| + \| \int\limits_t^{t+\eta} C_1(s) \int\limits_t^{s} C_1(s_1)ds_1 ds -$$

$$-\int\limits_t^{t+\eta} C_2(s) \int\limits_t^{s} C_2(s_1)ds_1 ds\| + ...$$

$$+\| \int\limits_t^{t+\eta} C_1(s) \int\limits_t^{s} C_1(s_1)...$$

$$... \int\limits_t^{s_{n-2}} C_1(s_{n-1})ds_{n-1}...ds_1 ds -$$

$$-\int\limits_t^{t+\eta} C_2(s) \int\limits_t^{s} C_2(s_1)...$$

$$... \int\limits_t^{s_{n-2}} C_2(s_{n-1})ds_{n-1}...ds_1 ds + ...\|] d_\eta \xi(t,\eta).$$

Знайдемо оцінку для кожного з доданків у правій частині одержаної нерівності. Для першого з них

$$\| \int\limits_0^{\lambda} \int\limits_t^{t+\eta} (C_1(s) - C_2(s)) ds d_\eta \xi(t,\eta)\| \le$$

$$\le \gamma\lambda \|C_1 - C_2\|_0.$$

Далі маємо:

$$\| \int\limits_0^{\lambda} [\int\limits_t^{t+\eta} C_1(s) \int\limits_t^{s} C_1(s_1)ds_1 ds -$$

$$-\int\limits_t^{t+\eta} C_2(s) \int\limits_t^{s} C_2(s_1)ds_1 ds] d_\eta \xi(t,\eta)\| \le$$

$$\le \| \int\limits_0^{\lambda} [\int\limits_t^{t+\eta} (C_1(s) - C_2(s)) \int\limits_t^{s} C_1(s_1)ds_1 ds +$$

$$+\int\limits_t^{t+\eta} C_2(s) \int\limits_t^{s} (C_1(s) - C_2(s)) ds_1 ds] d_\eta \xi(t,\eta)\| \le$$

$$\le m \left| \int\limits_0^{\lambda} (\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{2}) d_\eta \xi(t,\eta) \right| \|C_1 - C_2\|_0 \le$$

$$\le m\gamma\lambda \frac{\lambda}{1!} \|C_1 - C_2\|_0.$$

Тому

$$\| \int\limits_0^{\lambda} [\int\limits_t^{t+\eta} C_1(s) \int\limits_t^{s} C_1(s_1)... \int\limits_t^{s_{n-2}} C_1(s_{n-1})ds_{n-1}...ds_1 ds -$$

$$-\int\limits_t^{t+\eta} C_2(s) \int\limits_t^{s} C_2(s_1)... \int\limits_t^{s_{n-2}} C_2(s_{n-1})ds_{n-1}...ds_1 ds +$$

$$+...] d_\eta \xi(t,\eta)\| \le n m^{n-1} \gamma \frac{\lambda^n}{n!} \|C_1 - C_2\|_0 =$$

$$= \lambda\gamma \frac{m^{n-1}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \|C_1 - C_2\|_0.$$

Звідси випливає, що:

$$\|(SC_1)(t) - (SC_2)(t)\| \le \lambda\gamma e^{\lambda m} \|C_1 - C_2\|_0, t \in R. \tag{18}$$

Оператор S буде оператором стиску в $\mathbb{C}(m)$, якщо виконується нерівність

$$\lambda\gamma e^{\lambda m} < 1. \tag{19}$$

Будемо вимагати одночасного виконання нерівностей (17) і (19). Нехай

$$\lambda\gamma e < 1, \tag{20}$$

тоді рівняння

$$\gamma e^{\lambda m} = m$$

матиме два розв'язки, такі що

$$\lambda m_1 < 1 < \lambda m_2.$$

Звідси маємо, що для

$$m_1 \leq m < \frac{1}{\lambda} \tag{21}$$

будуть одночасно виконуватись нерівності (17) і (19).

Отже, при виконанні нерівності (20) для значень m, які задовольняють нерівність (21), оператор S є оператором стиску і відображає простір в себе. Тобто S має в просторі $\mathbb{C}(m)$ єдину нерухому точку, яка і є розв'язком рівняння (8).

Розглянемо тепер рівняння (9). Виконавши в ньому заміну змінних $g = f + z$, отримаємо рівняння

$$z(t) = \int\limits_0^\lambda \int\limits_t^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)(f(s) + z(s))ds d_\eta \xi(t, \eta). \tag{22}$$

Визначимо оператор S_1 в просторі $\mathbb{C}(M)$ функцій $z = z(t)$, заданих і неперервних на R, таких, що

$$\| z \|_0 = \sup_{t \in R} \|z(t)\| \leq M.$$

$(S_1 z)(t)$ буде вже неперервною на R функцією і

$$\| S_1 z \|_0 \leq \frac{(1+M)}{m} \gamma |e^{\lambda m} - 1|.$$

Таким чином, якщо

$$\frac{(1+M)}{m} \gamma |e^{\lambda m} - 1| \leq M,$$

то оператор $S_1 : \mathbb{C}(M) \to \mathbb{C}(M)$. Розглянемо різницю

$$\|(S_1 z_1)(t) - (S_1 z_2)(t)\| \leq$$

$$\leq \| \int\limits_0^\lambda \int\limits_t^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C) ds d_\eta \xi(t, \eta) \| \|z_1 - z_2\|_0 \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{m} |e^{\lambda m} - 1| \|z_1 - z_2\|_0.$$

При виконанні умови $\frac{\gamma}{m}|e^{\lambda m} - 1| < 1$ оператор S_1 буде оператором стиску. На підставі цієї нерівності, при

$$M \geq \frac{\gamma |e^{\lambda m} - 1|}{m - \gamma |e^{\lambda m} - 1|}$$

оператор S_1 відображає $\mathbb{C}(M)$ в себе і є стискаючим. Простір $\mathbb{C}(M)$ відносно норми $\| \cdot \|_0$ є повним нормованим простором і цього достатньо, щоб існував єдиний розв'язок рівняння (22), а отже, і рівняння (9).

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра Ляпунова-Пуанкаре в теории систем с запаздыванием // Инж. журн. – 1961. – 1, вып. 2. – С. 3-15.

2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

4. Diblik J., Koksch N. Existence of global solutions of delayed differential equations via retract approach // Nonlinear Analysis. – 2006. – 64. – P. 1153 – 1170.

5. Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003.– **55**, №5.– С. 631-640.

6. Сергєєва Л.М. Знаходження розв'язків диференціальних рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 96-100.

7. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння – К.: Либідь, 2007. – 600 с.