УДК 517.9

©2009 р. Ю.І. Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПАРНОГО СТЕПЕНЯ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у випадку парного степеня малого параметра при старшій похідній.

Algorithm of constructing asymptotic solutions to Cauchy problem for singular perturbed Korteweg-de Vries equation with varying coefficients in case of even degree of small parameter is proposed.

1. Вступ. Як відомо, рівняння Кортевега-де Фріза моделює широке коло найрізноманітніших явищ та процесів [1,2]. Зокрема, це рівняння описує так звані відокремлені хвилі, які вперше були описані Дж. Расселом [3].

Наприкінці 60-х років минулого століття вивчення властивостей розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза спонукало розвиток методу оберненої задачі розсіювання [4–7], який став потужним інструментом дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними і за допомогою якого було побудовано точні розв'язки багатьох диференціальних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад, [7,8]). В той же час потрібно зазначити, що згаданий метод не завжди дозволяє знаходити точні розв'язки так званих інтегровних систем для випадку змінних коефіцієнтів, а тому для побудови розв'язків сингулярно збурених рівнянь зі змінними коефіцієнтами застосовуються асимптотичні методи [9].

В даній статті розглядається питання про побудову асимптотичних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду:

$$\varepsilon^{2n_0} u_{xxx} = a(x,\varepsilon) u_t + b(x,\varepsilon) u u_x, \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon^{n_0}}\right), \qquad (2)$$

де n_0 – деяке натуральне число,

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $k = 0, 1, \ldots$; функція $f(\eta)$, $\eta \in \mathbf{R}$, належить простору Шварца; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Як було показано в [10–13] вигляд асимптотичного розкладу для розв'язку рівняння (1) залежить від порядку степеня малого параметра при старшій похідній. Так, у випадку, коли при старшій похідній маємо малий параметр непарного степеня, при побудові асимптотичних розв'язків рівняння (1) виникають члени асимптотичного ряду з малим параметром дробового степеня, в той час, як у випадку парного степеня таких членів немає.

Ідея побудови асимптотичних розв'язків задачі Коші (1), (2) полягає в тому, що спочатку знаходиться асимптотичний розв'язок рівняння (1), а потім визначаються функції нев'язки [11–13], які дозволяють врахувати початкову умову (2). В [12] побудовано асимптотичний розв'язок задачі Коші (1), (2) для випадку $n_0 = 1$, а в [13] — асимптотичний розв'язок цієї задачі для випадку, коли при старшій похідній міститься малий параметр непарного степеня.

В даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза для випадку, коли при старшій похідній маємо малий параметр парного степеня.

2. Основні припущення і позначення. Сформулюємо основні припущення та дамо означення, які необхідні для подальшого викладу.

Позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел k, m, q, p рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються такі дві умови [9]:

1. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^k\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x,t,\tau)=0;$$

2. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^k\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(f(x,t,\tau)-f^-(x,t)\right)=0.$$

Як і в [9] позначимо через $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний підпростір простору $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел k, m, q, p рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^k\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x,t,\tau)=0.$$

Позначимо [12] через $G_2^+ = G_2^+(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times[0;\Theta])$, де Θ – деяке дійсне додатне число, – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;\Theta]$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, q_1, q_2 рівномірно щодо змінних (x,t) на кожній компактній множині $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ для всіх $\tau_2\in[0;\Theta]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^r\frac{\partial^{q_1}}{\partial\tau_1^{q_1}}\frac{\partial^{q_2}}{\partial\tau_2^{q_2}}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x,t,\tau_1,\tau_2)=0.$$

3. Зображення асимптотичного розв'язку задачі Коші (1), (2). Розв'язок задачі Коші (1), (2) шукається у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_n(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\qquad(3)$$

де

$$Y_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^n\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1)+\right.$$

$$\left.+W_j(\tau_1,\tau_2)\right),\quad\tau_1=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon^{n_0}},\quad\tau_2=\frac{t}{\varepsilon^{n_0}}.$$

Функція

$$U_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^n\varepsilon^j u_j(x,t)$$

визначає регулярну частину асимптотики (3), а функції

$$V_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^n\varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1),$$

$$W_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^n\varepsilon^j W_j(\tau_1,\tau_2)$$

– сингулярну частину асимптотики (3).

При цьому функція $V_n(x,t,\varepsilon)$ визначена в деякому околі кривої $\Gamma=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x=\varphi(t)\}$, а функція $W_n(x,t,\varepsilon)$ – в деякому околі зв'язної множини $\{(t,x):t=0,x\in\mathbf{R}\}\cup\{(t,x):x=\varphi(t),t\in[0;T]\}$.

Означення [12]. *Якщо для розв'язку $u(x,t,\varepsilon)$ задачі Коші (1), (2) при будь-якому цілому числі $n\geq 0$ має місце зображення (3), де $\varphi(t)\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T])$ – деяка скалярна дійсна функція; функції $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,n}$, – нескінченно диференційовні (в точках $t=0$, $t=T$ розглядаються відповідно права та ліва похідні); $V_0(x,t,\tau_1)\in G_1^0$; $V_j(x,t,\tau_1)\in G_1$, $j=\overline{1,n}$; $W_j(\tau_1,\tau_2)\in G_2^+$, $j=\overline{0,n}$, то функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичним однофазовим солітоноподібним розв'язком задачі Коші (1), (2).*

4. Визначення регулярної частини асимптотичного розв'язку в (3). Відповідно до загальної методології асимптотичних методів для визначення коефіцієнтів асимптотичних розкладів (3) знаходимо:

$$\varepsilon^{2n_0}\left(\frac{\partial^3 U_n}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 V_n}{\partial x^3}+\frac{3}{\varepsilon^{n_0}}\frac{\partial^3 V_n}{\partial x^2\partial\tau_1}+\right. \tag{4}$$

$$\left.+\frac{3}{\varepsilon^{2n_0}}\frac{\partial^3 V_n}{\partial x\partial\tau_1^2}+\frac{1}{\varepsilon^{3n_0}}\frac{\partial^3 V_n}{\partial\tau_1^3}+\frac{1}{\varepsilon^{3n_0}}\frac{\partial^3 W_n}{\partial\tau_1^3}\right)=$$

$$=a(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_n}{\partial t}+\frac{\partial V_n}{\partial t}-\frac{1}{\varepsilon^{n_0}}\frac{\partial V_n}{\partial\tau_1}\varphi'(t)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\varepsilon^{n_0}}\frac{\partial W_n}{\partial\tau_1}\varphi'(t)+\frac{1}{\varepsilon^{n_0}}\frac{\partial W_n}{\partial\tau_2}\right)+$$

$$+b(x,\varepsilon)\left(U_n+V_n+W_n\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}+\frac{\partial V_n}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon^{n_0}}\frac{\partial W_n}{\partial\tau_1}+\frac{1}{\varepsilon^{n_0}}\frac{\partial W_n}{\partial\tau_2}\right)+$$

$$+g_n(x,t,\varepsilon),$$

де $g_n(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$ – деяка нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, що визначається рекурентним (стосовно j) чином за функціями $Y_j(x,t,\varepsilon)$, $j=\overline{0,n-1}$. Число n вважаємо довільним, але фіксованим.

Регулярна частина асимптотики (3) визначається функціями, які є розв'язками задач вигляду:

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{5}$$

$$u_0(0,0)=0; \tag{6}$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_j= \tag{7}$$

$$=f_j(x,t,u_0,u_1,\ldots,u_{j-1}),$$

$$u_j(0,0)=0,\quad j=\overline{1,N}. \tag{8}$$

Зауважимо, що розв'язки задач (5), (6) та (7), (8) існують при досить загальних умовах, а тому задачу про знаходження регулярної частини асимптотики (3) можна вважати розв'язаною.

5. Визначення сингулярної частини асимптотики $V_n(x,t,\varepsilon)$. Враховуючи рівняння (5), (7), з системи співвідношень (4) отримуємо систему диференціальних рівнянь для знаходження функцій $V_j(x,t,\tau_1)$, $j=\overline{0,n}$, які визначають сингулярну частину асимптотики. Спочатку рівняння для функцій $V_j(x,t,\tau_1)$, $j=\overline{0,n}$, використовуються для знаходження цих функцій на кривій розриву $x=\varphi(t)$, яка визначається на наступному етапі, як розв'язок певного звичайного диференціального рівняння, а потім ці рівняння використовуються для продовження функцій $V_j(x,t,\tau_1)$, $j=\overline{0,N}$, на множину

$$\Omega_\mu(\Gamma)=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:|x-\varphi(t)|<2\mu\},$$

де $\mu>0$ – деяка стала.

Таким чином, функції

$$v_j=v_j(t,\tau_1)=V_j(x,t,\tau_1)\Big|_{x=\varphi(t)}, \tag{9}$$

де $j=\overline{0,n}$, визначаються як розв'язки системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau_1^3}+a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}- \tag{10}$$

$$-b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}\right]=0,$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau_1^3}+a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau_1}- \tag{11}$$

$$-b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}v_j+v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau_1}\right]=$$

$$=\mathcal{F}_j(t,\tau_1),\quad j=\overline{1,n}.$$

Тут функції $\mathcal{F}_j(t,\tau_1)$, $j=\overline{1,n}$, обчислюються рекурентним чином.

Розв'язком рівняння (10) в просторі G_1^0 є функція

$$v_0(t,\tau_1)=$$

$$=-3\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}(\tau_1+C)\right),$$

при умові, що

$$A(\varphi(t),t)=$$

$$=-a_0(\varphi(t))\varphi'(t)+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)>0.$$

За умови $\mathcal{F}_j(t,\tau_1)\in G_1^0$, $j\geq 1$, розв'язки системи рівнянь (10), (11) існують і належать простору G_1.

Необхідна і достатня умова існування розв'язків рівнянь (10), (11) в просторі G_1

називається умовою ортогональності [10–13] і має вигляд

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_j(t,\tau_1) v_0(t,\tau_1) d\tau_1 = 0, \quad j \geq 1. \qquad (12)$$

З (12) при $j=1$ отримуємо рівняння

$$15 a_0(\varphi(t)) b_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} A(\varphi(t),t) - \qquad (13)$$
$$-20 a_0(\varphi(t)) b_0'(\varphi(t)) \varphi'(t) A(\varphi(t),t) +$$
$$+10 b_0^2(\varphi(t)) u_{0x}'(\varphi(t),t) A(\varphi(t),(t)) +$$
$$+10 A(\varphi(t),t) b_0(\varphi(t)) a_0'(\varphi(t)) \varphi'(t) -$$
$$-10 A(\varphi(t),t) b_0(\varphi(t)) b_0'(\varphi(t)) u_0(\varphi(t),t) +$$
$$+16 b_0'(\varphi(t)) A^2(\varphi(t),t) = 0,$$

з якого визначається крива розриву $x = \varphi(t)$ при початковій умові

$$\varphi(0) = 0. \qquad (14)$$

Тепер продовжимо функції сингулярної частини асимптотики $V_j(x,t,\tau_1)$, $j \geq 0$, з кривої Γ на множину $\Omega_\mu(\Gamma)$. Покладемо:

$$V_0(x,t,\tau_1) = v_0(t,\tau_1).$$

Зобразимо функції $v_j(t,\tau_1)$, $j \geq 1$, у вигляді:

$$v_j(t,\tau_1) = \nu_j(t) \eta(t,\tau_1) + \psi_j(t,\tau_1) \qquad (15)$$

де

$$\nu_j(t) = (a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t)) u_{0x}(\varphi,t))^{-1} \times$$
$$\times \lim_{\tau \to -\infty} \Phi_j(t,\tau_1),$$
$$\Phi_j(t,\tau_1) = \int\limits_{-\infty}^{\tau_1} \mathcal{F}_j(t,\tau) d\tau + E_j(t),$$
$$\lim_{\tau \to +\infty} \Phi_j(t,\tau_1) = 0.$$

Тут $\eta(t,\tau_1)$ – деяка така функція з простору G_1, що $\lim\limits_{\tau_1 \to -\infty} \eta(t,\tau_1) = 1$; $E_j(t)$ – деяка нескінченно диференційовна функція;

$$\psi_j(t,\tau_1) = \psi_{j,1}(t,\tau_1) + c_j(t) v_{0\tau_1}(t,\tau_1),$$

де $\psi_{j,1}(t,\tau_1)$ – деяка функція з простору G_1^0; $c_j(t)$ – стала інтегрування.

Зображення (15) дозволяє продовжити функції $v_j(t,\tau_1)$, $j \geq 1$, з кривої Γ на множину $\Omega_\mu(\Gamma)$, за допомогою визначення функцій $V_j(x,t,\tau_1)$, $j \geq 1$, наступним чином:

$$V_j(x,t,\tau_1) = u_j^-(x,t) \eta(t,\tau_1) + \psi_j(t,\tau_1), \qquad (16)$$

де функції $u_j^-(x,t)$, $j = \overline{1,n}$, визначаються як розв'язки задач Коші вигляду

$$\Lambda u_j^-(x,t) = f_j^-(x,t), \qquad (17)$$

$$u_j^-(x,t)\Big|_\Gamma = \nu_j(t), \quad j = \overline{1,n}, \qquad (18)$$

а диференціальний оператор Λ записується у вигляді

$$\Lambda = a_0(x) \frac{\partial}{\partial t} + b_0(x) u_0(x,t) \frac{\partial}{\partial x} + b_0(x) \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}.$$

Диференціальні рівняння (17) для визначення функцій $u_j^-(x,t)$, $j = \overline{1,n}$, отримано з рівняння (1) за допомогою граничного переходу при $\tau_1 \to -\infty$ після підстановки в нього співвідношення (16).

Оскільки крива Γ трансверсальна характеристикам оператора Λ при всіх $t \in [0;T]$, то задача (17), (18) коректно поставлена, а тому згідно теореми Коші-Ковалевської (при достатньо малих μ) в околі кривої Γ має розв'язок $u_j^-(x,t) \in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$. Надалі припускаємо, шо задача Коші (17), (18) має нескінченно диференційовний розв'язок і на множині $\{(x,t) : x - \varphi(t) \leq -\mu,\ t \in [0;T]\}$.

Таким чином n-те наближення $Y_n(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbf{R}^1 \times [0;T]$, асимптотичного розв'язку (3) рівняння (1) можна записати у вигляді

$$Y_n(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + u_j^-(x,t) \right],$$

для випадку, коли $(x,t) \in D^- \backslash \Omega_\mu(\Gamma)$;

$$Y_n(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1) \right],$$

для випадку, коли $(x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma)$;

$$Y_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j u_j(x,t),$$

для випадку, коли $(x,t)\in D^+\backslash\Omega_\mu(\Gamma)$.

Тут

$$D^-=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:\varphi(t)-x\geq\mu\},$$

$$D^+=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x-\varphi(t)\leq\mu\},$$

причому припускається, що функції $u_j^-(x,t)$, $j=\overline{1,n}$, визначені як розв'язки задач Коші (17), (18) як на множині $\Omega_\mu(\Gamma)$, так і на множині $\{(x,t):x-\varphi(t)\leq-\mu$, $t\in[0;T]\}$.

Таке наближення розв'язку рівняння (1) при $\tau\to-\infty$ задовольняє рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^{n+2})$.

Якщо ж розв'язки задачі Коші (17), (18) визначені лише на множині $\Omega_\mu(\Gamma)$, то n-те наближення $Y_n(x,t,\varepsilon)$, $(x,t)\in\mathbf{R}^1\times[0;T]$, розв'язку рівняння (1) можна записати у вигляді

$$Y_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1)\right],$$

для випадку, коли $(x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma)$;

$$Y_n(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j u_j(x,t),$$

для випадку, коли $(x,t)\in(D^+\cup D^-)\backslash\Omega_\mu(\Gamma)$.

Таке наближення розв'язку рівняння (1) при $\tau_1\to-\infty$ задовольняє рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$.

6. Визначення сингулярної частини асимптотики $W_n(x,t,\varepsilon)$**.** Враховуючи рівняння (5), (7), (10), (11), із співвідношень (4) для визначення функцій $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{0,n}$, (в околі зв'язної множини $\mathcal{M}=\{(t,x):t=0,x\in\mathbf{R}^1\}\cup\{(t,x):x=\varphi(t),t\in[0;T]\}$) знаходимо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 W_0}{\partial\tau_1^3}=-a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}-\frac{\partial W_0}{\partial\tau_2}\right]+\quad(19)$$

$$+b_0(0)\left[V_0(0,\tau_1)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial\tau_1}W_0+\right.$$

$$\left.+W_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\right],$$

$$\frac{\partial^3 W_j}{\partial\tau_1^3}=-a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_j}{\partial\tau_1}-\frac{\partial W_j}{\partial\tau_2}\right]+\quad(20)$$

$$+b_0(0)\left[V_0(0,\tau_1)\frac{\partial W_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial\tau_1}W_j+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}W_j+W_0\frac{\partial W_j}{\partial\tau_1}\right]+\mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2),$$

де функції $\mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,n}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $W_0(\tau_1,\tau_2)$, $W_1(\tau_1,\tau_2)$, $\ldots$, $W_{j-1}(\tau_1,\tau_2)$.

Для однозначного визначення функцій $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{0,n}$, з системи диференціальних рівнянь (19), (20), потрібно задати для них початкові умови. Ці умови можна отримати з початкової умови (2). Після підстановки (3) в (2) знаходимо співвідношення вигляду:

$$\left.U_n(x,t,\varepsilon)+V_n(x,t,\varepsilon)+W_n(x,t,\varepsilon)\right|_{t=0}=$$

$$=f\left(\frac{x}{\varepsilon^{n_0}}\right),$$

звідки, враховуючи асимптотичні розклади для функцій $U_n(x,t,\varepsilon)$, $V_n(x,t,\varepsilon)$, $W_n(x,t,\varepsilon)$, отримуємо початкові умови для функцій $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{0,n}$, при $\tau_2=0$. Маємо:

$$W_0(\tau_1,0)=f(\tau_1)-V_0(0,0,\tau_1),\qquad(21)$$

$$W_j(\tau_1,0)=-V_j(0,0,\tau_1)+Q_j(\tau_1),\qquad(22)$$
$$j=\overline{1,n},$$

де функції $Q_j(\tau_1)$, $j=\overline{1,n}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $W_0(\tau_1,\tau_2),W_1(\tau_1,\tau_2)$, $\ldots$, $W_{j-1}(\tau_1,\tau_2)$.

Задачі Коші (19), (21) та (20), (22) мають єдиний розв'язок в певному класі функцій [14]. Властивості цих розв'язків характеризують наступні леми.

Лема 1. *Функція* $W_0(\tau_1,\tau_2)$*, яка є розв'язком задачі Коші (19), (21), належить простору* G_2^+*.*

Твердження леми 1 випливає з умови $W_0(\tau_1, 0) \in G_1^0$.

Лема 2. *Якщо функції* $-V_j(0,0,\tau_1) + Q_j(\tau_1)$, $j = \overline{1,n}$, *належать простору* G_1^0, *а функції* $\mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,n}$, *належать простору* G_2^+, *то функції* $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,n}$, *які є розв'язком задачі (20), (22), належать простору* G_2^+.

Твердження леми 2 випливає з теореми 2.1 [14].

Таким чином, грунтуючись на викладених вище міркуваннях, можна сформулювати таке твердження.

Теорема. *Нехай функції* $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$, $k \geq 0$, *задача Коші (11), (12) має розв'язок* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, *для якого справедлива умова* $A(\varphi(t),t) > 0$, *функції* $\mathcal{F}_j(t,\tau_1)$, $j = \overline{1,n}$, *належать простору* G_1^0 *та задовольняють умову ортогональності (12), виконуються умови леми 2.*

Тоді функція

$$Y_n(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1) + \right.$$

$$\left. + W_j(\tau_1,\tau_2)\right] + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\tau_1 = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon^{n_0}}, \quad \tau_2 = \frac{t}{\varepsilon^{n_0}},$$

є асимптотичним розвиненням для однофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (1), (2) для рівняння Кортевега-де Фріза при $0 \leq t \leq \varepsilon^{n_0}\Theta$.

Висновок. За допомогою запропонованого алгоритму побудовано однофазові солітоноподібні асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett.— 1967.— **19**.— P.1095—1098.

2. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag.— 1895.— N39.— P.422—433.

3. *Scott-Russel J.* Report on waves // Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of science. – John Murray, London.— 1844.— P.311—390.

4. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications Pure Applied Mathematics.— 1968.— **21**, N15.— P.467—490. (Переклад російською мовою: Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика.— 1969.— **13**, N15.— С.128—150.

5. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* Уравнение Кортевега-де Фриза – вполне интегрируемая гамильтонова система // Функц. анализ и его прилож.— 1971.— **5**, N4.— С.18—27.

6. *Новиков С.П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза // Функц. анализ и его прилож.— 1974.— **8**, N3.— С.54—66.

7. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи рассеяния. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

8. *Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. — Киев: Наукова думка, 1987. — 296 с.

9. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук.— 1981.— **36 (219)**, N2.— С.63—124.

10. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн.— 2005.— **58**, N1.— С.111—124.

11. *Samoylenko V.Hr., Samoylenko Yu.I.* Asymptotic solution to Cauchy problem for Korteweg-de Vries equation with varying coefficients and small dispersion // Computer algebra systems in teaching and research. Proceedings of 4-th International Workshop, CASTR 2007. — Siedlce: Wydavnictwo Akademii Podlaskiey. — 2007. — P.272—280.

12. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн.— 2007.— **59**, N1.— С.122—132.

13. *Самойленко Ю.І.* Задача Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика. Чернівці.— 2007.— **336—337**.— С.170—177.

14. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского.— 1988.— **13**.— С.56—105.