УДК 517.95

©2009 р. **П.Я. Пукач**

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

ПРО ІСНУВАННЯ ЛОКАЛЬНО ІНТЕГРОВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

Праця присвячена дослідженню першої мішаної задачі для сильно нелінійного рівняння п'ятого порядку в необмеженій області. Розглянуте рівняння узагальнює рівняння коливань балки, що вивчається в теорії пружності. Отримано умови існування узагальненого розв'язку в просторах локально інтегровних функцій.

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for strongly nonlinear equation of the fifth order in unbounded domain. Described equation generalizes the equation of beam vibrations, which is studied in elasticity theory. The conditions of the existence of generalized solution in the spaces of local integrable functions have been obtained.

У цій праці досліджено першу мішану задачу в необмеженій області для нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,t) \left| u_{tx_ix_j} \right|^{p_2-2} u_{tx_ix_j} \right)_{x_ix_j} - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,t) \left| u_{tx_i} \right|^{p_1-2} u_{tx_i} \right)_{x_i} + d(x,t)u_t + \\ + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta} \left(b_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u \right) + \\ + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_{\alpha}(x,t) D^{\alpha} u + g(x,u_t) = f(x,t), \quad (1)$$

$D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, ..., n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Коефіцієнти та права частина рівняння (1) є дійснозначними функціями.

У праці [1] досліджено існування слабких розв'язків мішаних задач в обмеженій області для деякої системи лінійних рівнянь з частинними похідними, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки. Відповідне рівняння такої системи $u_{tt} + a u_{txxxx} + b u_{xxxx} = f$ є частинним випадком рівняння вигляду (1) за умов $n = 1$, $p_2 = 2$, $a_i = 0$, $i = 1, ..., n$, $d = 0$, $b_{\alpha\beta} = 0$, $0 \le |\alpha| = |\beta| \le 1$, $c_{\alpha} = 0$, $1 \le |\alpha| \le 2$, $g = 0$. Рівняння (1) узагальнює модель коливання балки у середовищі з опором (див. [1] та подану там бібліографію). Зазначимо, що мішана задача в обмеженій області для рівняння (1) за умови $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ вивчена у праці [2]. Для дослідження класів коректності узагальненого розв'язку використано метод Гальоркіна та метод монотонності.

У цій праці досліджено мішану задачу в необмеженій області для рівняння п'ятого порядку (1), деякі коефіцієнти у якому можуть степеневим чином зростати при $|x| \to \infty$. Отримано умови існування узагальненого розв'язку без обмежень на поведінку при $|x| \to \infty$ розв'язку, правої частини рівняння та початкових даних. При цьому припускаємо, що $p_2 > 2$, $p_1 > 2$.

Зазначимо, що отримані умови існування розв'язку продовжують результати праці [3], в якій розглянуто мішану задачу для рівняння вигляду (1) за умов $p_2 = 2$, $p_1 = 2$, та результати праці [4], в якій аналогічна задача вивчена для рівняння вигляду (1) в припущенні $p_2 = 2$, $1 < p_1 < 2$.

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$ розглядаємо для рівняння (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \quad (3)$$

та крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0, \qquad (4)$$

де $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускаємо, що Ω – необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, причому $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ – область для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [5, с. 45] межею $\partial\Omega^R$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t | t = \tau\}$ для довільних $\tau \in [0,T]$, $R > 1$, $\partial\Omega^R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$, $\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap \partial\Omega^R$, $\Gamma_2^R = \partial\Omega^R \backslash \Gamma_1^R$.

Використовуємо надалі такі функційні простори:

$$H^2_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \left\{ u \in H^2(\Omega^R) \colon u|_{\Gamma_1^R} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1^R} = 0 \right\},$$

$$H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in H^2_{0,\Gamma_1^R}\left(\Omega^R\right) \forall R > 1 \right\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \left\{ u \in W^{1,p_1}(\Omega^R) : u|_{\Gamma_1^R} = 0 \right\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in W^{1,p_1}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) \forall R > 1 \right\},$$

$$W^{2,p_2}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \left\{ u \in W^{2,p_2}(\Omega^R) \colon u|_{\Gamma_1^R} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1^R} = 0 \right\},$$

$$W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in W^{2,p_2}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) \forall R > 1 \right\},$$

$$L^r_{loc}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ u \colon u \in L^r(\Omega^R) \forall R > 1 \right\}, r \in (1, +\infty].$$

Всюди далі $p' = p/(p-1)$, $p_l' = p_l/(p_l - 1)$, $l = 1, 2$, через V^* позначено простір, спряжений до функційного простору V.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускаємо виконання наведених нижче умов.

(A2) $a_2 \le a_{ij}(x,t) \le a^2 R^{\alpha_2}$ для довільних $R > 1$, $(x,t) \in Q_T^R$, де $a_2 > 0$, $a^2 > 0$, $\alpha_2 \in [0; 1 - \dfrac{(p_1 - p_2)n}{p_1 p_2})$, $i = 1, ..., n$; функції $a_{ij, x_i x_j}$, $a_{ij,t}$ належать до простору $L^\infty\big(Q_T\big)$, $i, j = 1, ..., n$.

(A1) $a_1 \le a_i(x,t) \le a^1 R^{\alpha_1}$ для довільних $R > 1$, $(x,t) \in Q_T^R$, де $a_1 > 0$, $a^1 > 0$, $i = 1, ..., n$, $\alpha_1 \in [0; 1)$; функції a_{i,x_i}, $a_{i,t}$ належать до простору $L^\infty\big(Q_T\big)$, $i = 1, ..., n$.

(D) Функція $d \in L^\infty\left((0,T); L^\infty_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, $d(x,t) \ge d_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де d_0 – стала.

(B2) $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2} \operatorname*{esssup}\limits_{x \in \Omega^R} |b_{\alpha\beta}(x)| \le b_2 R^{\varkappa_2}$ для довільного $R > 1$, де $b_2 > 0$, $\varkappa_2 \in [0; 1 - \dfrac{(p_1 p_2 - p_1 - p_2)n}{p_1 p_2})$, причому $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \ge b_{0,2} \sum\limits_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$ для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$ та для майже всіх $x \in \Omega$, $b_{0,2} > 0$; функції $b_{\alpha\beta, x_i x_j}$ ($|\alpha| = |\beta| = 2$; $i, j = 1, ..., n$) належать до простору $L^\infty(\Omega)$; $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $|\alpha| = |\beta| = 2$.

(B1) $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} \operatorname*{esssup}\limits_{x \in \Omega^R} |b_{\alpha\beta}(x)| \le b_1 R^{\varkappa_1}$ для довільного $R > 1$, де $b_1 > 0$, $\varkappa_1 \in [0; 1 - \dfrac{(p_1 - 2)n}{2p_1})$, причому $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \ge b_{0,1} \sum\limits_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2$ для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 1$ та для майже всіх $x \in \Omega$, $b_{0,1} > 0$; функції $b_{\alpha\beta, x_i}$ ($|\alpha| = |\beta| = 1$; $i = 1, ..., n$) належать до простору $L^\infty(\Omega)$; $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $|\alpha| = |\beta| = 1$.

(B0) Функція b_{00} належить до простору $L^\infty(\Omega)$.

(C) Функції c_α, $c_{\alpha,t}$ належать до простору $L^\infty\left(Q_T\right)$, $1 \le |\alpha| \le 2$.

(G) Функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x для всіх η, неперервна за η для майже всіх $x \in \Omega$, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$:

$$\left(g(x,\xi) - g(x,\eta)\right)(\xi - \eta) \ge g_0 |\xi - \eta|^p,$$

$$|g(x,\eta)| \le g_1 |\eta|^{p-1},$$

де g_0, g_1 – додатні сталі, $p > 2$; функція g_ξ – неперервна за ξ для майже всіх $x \in \Omega$.

(F) $f \in L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega}))$.

(U) $u_0 \in H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})$; $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$.

(P) $2 < p_2 < p_1 < p$, якщо $n = 1, 2$; $2 < p_2 < p_1 < p$, $n < \min\Big\{(1 -$

$\alpha_2)\dfrac{p_1p_2}{p_1-p_2}, (1 - \varkappa_2)\dfrac{p_1p_2}{p_1p_2-p_1-p_2}, (2 - \varkappa_2)\dfrac{2p_2}{p_2-2}, (1-\varkappa_1)\dfrac{2p_1}{p_1-2}\Big\}$, якщо $n \ge 3$.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в області Q_T називаємо функцію $u \in C([0,T]; H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in C\left([0,T]; L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right) \cap L^{p_2}\Big((0,T); W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega})\Big) \cap L^{p_1}\Big((0,T); W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega})\Big) \cap L^p\left((0,T); L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$, яка задовольняє умову (2) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_tv_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)|u_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}v_{x_i}\Big]dxdt + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta v - f(x,t)v + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha uv\Big]dxdt + \int\limits_{Q_\tau} d(x,t)u_tvdxdt + \int\limits_{Q_\tau} g(x,u_t)vdxdt + \int\limits_{\Omega}\left[u_t(x,\tau)v(x,\tau) - u_1(x)v(x,0)\right]dx = 0 \quad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ і для довільної функції $v \in C^1([0,T]; C^\infty_0(\Omega))$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A2), (A1), (D), (B2), (B1), (B0), (C), (G), (F), (U), (P).** *Тоді існує узагальнений розв'язок u задачі (1)–(4) в Q_T.*

Д о в е д е н н я. Виберемо послідовність областей $\{\Omega^k\}$, $k = 2,3,\ldots$ Позначимо $S^k_T = \partial\Omega^k \times (0,T)$. Розглянемо в обмеженій області Q^k_T допоміжну задачу:

$$u_{tt} + \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x,t)\left|u_{tx_ix_j}\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}\right)_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^n \left(a_i(x,t)\left|u_{tx_i}\right|^{p_1-2}u_{tx_i}\right)_{x_i} + d(x,t)u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u\right) + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u + g(x,u_t) = f^{k,k}(x,t), \quad (6)$$

$$u(x,0) = u^{k,k}_0(x), \quad (7)$$

$$u_t(x,0) = u^{k,k}_1(x),\ x \in \Omega^k, \quad (8)$$

$$u|_{S^k_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S^k_T} = 0, \quad (9)$$

де $f^{k,k}(x,t) = \begin{cases} f^k(x,t), |x| \le k, \\ 0, |x| > k, \end{cases}$, $u^{k,k}_0(x) = u^k_0(x)\chi^k(x)$, $u^{k,k}_1(x) = u^k_1(x)\chi^k(x)$, причому $\chi^k \in C^4(\mathbb{R}^n)$, $\chi^k(x) = \begin{cases} 1,\ |x| \le k-1, \\ 0,\ |x| > k, \end{cases}$, $0 \le \chi^k(x) \le 1$. Послідовності $\{f^k\}$, $\{u^k_0\}$, $\{u^k_1\}$ такі, що $f^k \in C^1([0,T]; C^1_0(\Omega))$, $u^k_0 \in C^4_0(\Omega)$, $u^k_1 \in C^2_0(\Omega)$ і $f^k \to f$ в $L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u^k_0 \to u_0$ в $H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u^k_1 \to u_1$ в $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k \to \infty$.

На підставі [2, с. 68, теор. 2] можна стверджувати: існує єдиний узагальнений розв'язок u^k задачі (6)–(9) в області Q^k_T такий, що $u^k \in C([0,T]; H^2_0(\Omega^k))$, $u^k_t \in C\left([0,T]; L^2\left(\Omega^k\right)\right) \cap L^{p_2}\Big((0,T); W^{2,p_2}_0(\Omega^k)\Big) \cap L^{p_1}\Big((0,T); W^{1,p_1}_0(\Omega^k)\Big) \cap L^p\left(Q^k_T\right)$, $u^k_{tt} \in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega^k)\right) \cap L^2\left((0,T); H^2_0\left(\Omega^k\right)\right)$.

Розглянемо послідовність задач вигляду (6)–(9) для $k=2$, $k=3,\ldots$ та продовжимо u^k нулем на $Q_T \backslash Q^k_T$. Нехай $R>1$, $\tau \in (0,T]$ – довільні числа, $k>R$. Розглянемо функцію [6]

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{R}, |x| \le R, \\ 0, |x| > R. \end{cases}$$

Легко перевірити правильність оцінок

$$R - |x| \le \varphi_R(x) \le 2(R-|x|),$$
$$\left|(\varphi^\gamma_R(x))_{x_i}\right| \le 2\gamma\varphi^{\gamma-1}_R(x),$$
$$\left|(\varphi^\gamma_R(x))_{x_ix_j}\right| \le 6\gamma^2\varphi^{\gamma-2}_R(x). \quad (10)$$

Розглянемо інтегральну рівність (5) для функцій u^k, f^k, поклавши $v = u_t^k\varphi_R^\gamma$, де число $\gamma > 2$ буде уточнене пізніше. Використовуючи умови теореми, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} u_{tt}^k u_t^k \varphi_R^\gamma(x)dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(a_{ij}(x,t)\times$$

$$\times\left|u_{tx_ix_j}^k\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}^k\Big)_{x_ix_j}u_t^k\varphi_R^\gamma(x)dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i(x,t)\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1-2}u_{tx_i}^k\Big)_{x_i}u_t^k\varphi_R^\gamma(x)\times$$

$$\times dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R} d(x,t)(u_t^k)^2\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u^k D^\beta\big(u_t^k\varphi_R^\gamma(x)\big)dxdt+$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\big[g(x,u_t^k)-f^k(x,t)\big]u_t^k\varphi_R^\gamma(x)dxdt=0. \quad (11)$$

З врахуванням умов теореми проведемо перетворення та оцінки інтегралів рівності (11). Зокрема, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} u_{tt}^k u_t^k\varphi_R^\gamma(x)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left|u_t^k(x,\tau)\right|^2dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left|u_1^k(x)\right|^2dx,$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(a_{ij}(x,t)\left|u_{tx_ix_j}^k\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}^k\Big)_{x_ix_j}u_t^k\varphi_R^\gamma(x)\times$$

$$\times dxdt = \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\left|u_{tx_ix_j}^k\right|^{p_2}\varphi_R^\gamma(x)\times$$

$$\times dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\left|u_{tx_ix_j}^k\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}^k u_{tx_j}^k\times$$

$$\times\varphi_{R,x_i}^\gamma(x)dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\left|u_{tx_ix_j}^k\right|^{p_2-2}\times$$

$$\times u_{tx_ix_j}^k u_t^k\varphi_{R,x_ix_j}^\gamma(x)dxdt = \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3.$$

Враховуючи умову **(A2)** та використовуючи нерівність Гельдера, відповідно одержимо

$$\mathcal{I}_1 \ge a_2\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2}\varphi_R^\gamma(x)dxdt;$$

$$\mathcal{I}_2 \le \delta_1 C_1(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2}\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$\delta_1 C_2(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1}\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+C_3(a^2,\gamma,\delta_1,n,T)R^{\gamma+n+(\alpha_2-1)r_1},$$

де $r_1 = \dfrac{p_1p_2}{p_1-p_2}$, тобто $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2'}+\dfrac{1}{r_1} = 1$, $\gamma \ge \dfrac{p_1p_2}{p_1-p_2}$, $\delta_1 > 0$ – довільне число, C_1, C_2, C_3 – додатні сталі. Далі отримаємо

$$\mathcal{I}_3 \le \delta_2 C_4(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2}\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$\delta_2 C_5(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^k\right|^{q_1}\varphi_R^\gamma(x)\times dxdt+$$

$$+C_6(a^2,\gamma,\delta_2,n,T)R^{\gamma+n+(\alpha_2-2)r_2},$$

де $q_1 \in (p_2;p]$, $\delta_2 > 0$ – довільні числа, $r_2 = \dfrac{q_1p_2}{q_1-p_2}$, тобто $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{p_2'}+\dfrac{1}{r_2} = 1$, $\gamma \ge \dfrac{q_1p_2}{q_1-p_2}$, $C_4>0$, $C_5>0$, $C_6>0$. Враховуючи очевидну нерівність $\left|u_t^k\right|^{q_1} \le \left|u_t^k\right|^{p_2}+\left|u_t^k\right|^{p} \le \left|u_t^k\right|^2+2\left|u_t^k\right|^p$, продовжимо оцінку:

$$\mathcal{I}_3 \le \delta_2 C_4(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2}\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\delta_2 C_5(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^k\right|^2\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\delta_2 C_7(a^2,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^k\right|^p\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+C_6(a^2,\gamma,\delta_2,n,T)R^{\gamma+n+(\alpha_2-2)r_2},\ C_7>0.$$

Перетворимо тепер

$$-\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n\left(a_i(x,t)\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1-2}u_{tx_i}^k\right)_{x_i}u_t^k\varphi_R^\gamma(x)dxdt=$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1}\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1-2}u_{tx_i}^k u_t^k\varphi_{R,x_i}^\gamma(x)dxdt=$$

$$=\mathcal{I}_4+\mathcal{I}_5.$$

Аналогічно до проведених вище оцінок, для $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_5$ отримаємо:

$$\mathcal{I}_4\ge a_1\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1}\varphi_R^\gamma(x)dxdt;$$

$$\mathcal{I}_5\le\delta_3 C_8(a^1,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1}\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\delta_3 C_9(a^1,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^k\right|^2\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+\delta_3 C_{11}(a^1,\gamma,n)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^k\right|^p\varphi_R^\gamma(x)dxdt+$$

$$+C_{10}(a^1,\gamma,\delta_3,n,T)R^{\gamma+n+(\alpha_2-1)r_3},$$

де $r_3=\dfrac{q_2p_1}{q_2-p_1}$, тобто $\dfrac{1}{q_2}+\dfrac{1}{p_1'}+\dfrac{1}{r_3}=1$, $q_2\in(p_1;p]$, $\delta_3>0$ – довільні числа, $\gamma\ge\dfrac{q_2p_1}{q_2-p_1}$, C_8, C_9, C_{10}, C_{11} – додатні сталі.

Перетворимо наступні інтеграли рівності (11). Зокрема, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha u^k\,D^\beta\left(u_t^k\varphi_R^\gamma\right)\,dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha u^k\,D^\beta u_t^k\,\varphi_R^\gamma\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha u^k\,D^\sigma u_t^k\times$$

$$\times D^{\beta-\sigma}\varphi_R^\gamma\,dxdt+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha u^k\,u_t^k\,D^\beta\times$$

$$\times\varphi_R^\gamma dxdt=\mathcal{I}_6+\mathcal{I}_7+\mathcal{I}_8,$$

де $\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}$ – коефіцієнти бінома Ньютона.

Враховуючи умову **(B2)**, маємо

$$\mathcal{I}_6\ge\frac{b_{0,2}}{2}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^k\right|^2\varphi_R^\gamma dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_0^k D^\beta u_0^k\varphi_R^\gamma dx.$$

Для обгрунтування оцінок інтегралів $\mathcal{I}_7$, $\mathcal{I}_8$ використаємо наступні рівність

$$u^k(x,t)=u^k(x,0)+\int\limits_0^t u^k(x,\tau)d\tau$$

та нерівність

$$(a+b)^\alpha\le 2^{\alpha-1}(a^\alpha+b^\alpha),\ \ a>0,\ b>0,\ \alpha>1,$$

з яких, зокрема, одержуємо

$$\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_ix_i}^k\right|^\alpha\varphi_R^\gamma(x)dx\le M(\alpha,n)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^n\left|u_{0,x_ix_i}^k\right|^\alpha\varphi_R^\gamma(x)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^n\left|\int\limits_0^t u_{tx_ix_i}^k(x,\tau)d\tau\right|^\alpha\varphi_R^\gamma(x)dx\Big)\le$$

$$\le M(\alpha,n)\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^n\left|u_{0,x_ix_i}^k\right|^\alpha\varphi_R^\gamma(x)dx+M(\alpha,n)\times$$

$$\times T^\alpha\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^n\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^\alpha\varphi_R^\gamma(x)dx,M(\alpha,n)>0.$$

Використовуючи останню нерівність, можна отримати

$$\mathcal{I}_7 \le C_{12}(b_2,p_2,n,\gamma)T^{p_2}\delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{tx_ix_i}\right|^{p_2} \times$$

$$\times \varphi_R^\gamma(x)dxdt + C_{12}(b_2,p_2,n,\gamma)T\delta_4 \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{0,x_ix_i}\right|^{p_2} \varphi_R^\gamma(x)dx + \delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{tx_i}\right|^{p_1} \times$$

$$\times \varphi_R^\gamma(x)dxdt +$$

$$+ C_{13}(b_2,p_1,p_2,n,\gamma,T,\delta_4)R^{\gamma+n+(\varkappa_2-1)r_4},$$

$r_4 = \dfrac{p_1p_2}{p_1p_2-p_1-p_2}$, тобто $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{r_4}=1$, $\gamma \ge \dfrac{p_1p_2}{p_1p_2-p_1-p_2}$, $\delta_4>0$ – довільне число, C_{12}, C_{13} – додатні сталі;

$$\mathcal{I}_8 \le C_{14}(b_2,p_2,n,\gamma)T^{p_2}\delta_5 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{tx_ix_i}\right|^{p_2} \times$$

$$\times \varphi_R^\gamma(x)dxdt + C_{14}(b_2,p_2,n,\gamma)T\delta_5 \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{0,x_ix_i}\right|^{p_2} \varphi_R^\gamma(x)dx + \delta_5 \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u^k_t\right|^2 \varphi_R^\gamma(x) \times$$

$$\times dxdt + C_{15}(b_2,p_2,n,\gamma,T,\delta_5)R^{\gamma+n+(\varkappa_2-2)r_5},$$

$r_5 = \dfrac{2p_2}{p_2-2}$, тобто $\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{r_5}=1$, $\gamma \ge \dfrac{2p_2}{p_2-2}$, $\delta_5>0$ – довільне число, C_{14}, C_{15} – додатні сталі.

Крім того, одержимо

$$-\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}\, D^\alpha u^k\, D^\beta \left(u^k_t \varphi_R^\gamma\right)\, dxdt =$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}\, D^\alpha u^k\, D^\beta u^k_t\, \varphi_R^\gamma\, dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}\, D^\alpha u^k\, u^k_t\, D^\beta\, \varphi_R^\gamma\, dxdt = \mathcal{I}_9 + \mathcal{I}_{10};$$

$$\mathcal{I}_9 \ge \frac{b_{0,1}}{2} \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u^k_0 D^\beta u^k_0 \varphi_R^\gamma dx;$$

$$\mathcal{I}_{10} \le C_{16}(b_1,p_1,n,\gamma)T^{p_1}\delta_6 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{tx_i}\right|^{p_1} \varphi_R^\gamma(x) \times$$

$$\times dxdt + C_{16}(b_1,p_1,n,\gamma)T\delta_6 \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{0,x_i}\right|^{p_1} \varphi_R^\gamma(x) \times$$

$$\times dx + \delta_6 \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u^k_t\right|^2 \varphi_R^\gamma(x)dxdt +$$

$$+ C_{17}(b_1,p_1,n,\gamma,T,\delta_6)R^{\gamma+n+(\varkappa_1-1)r_6},$$

$r_6 = \dfrac{2p_1}{p_1-2}$, тобто $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{r_6}=1$, $\gamma \ge \dfrac{2p_1}{p_1-2}$, $\delta_6>0$ – довільне число, C_{16}, C_{17} – додатні сталі;

$$\int\limits_{Q_\tau^R} d(x,t)\left|u^k_t\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt \ge -|d_0| \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u^k_t\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} b_{00}(x) u^k u^k_t \varphi_R^\gamma dxdt = \int\limits_{Q_\tau^R} b_{00}(x) \left[\int\limits_0^t u^k_\tau(x,\tau)d\tau\right] \times$$

$$\times u^k_t \varphi_R^\gamma\, dxdt \le b_0 T \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u^k_t\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt,$$

$b_0 = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} |b_{00}(x)|$.

Завершимо оцінювання інтегралів рівності (11):

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u^k u^k_t \varphi_R^\gamma dxdt \le \frac{c_2 n}{2} \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + \frac{c_2}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u^k_t(x)\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt,$$

$c_2 = \max\limits_{|\alpha|=2} \operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T} |c_\alpha(x,t)|$;

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(x,t) D^\alpha u^k u^k_t \varphi_R^\gamma dxdt \le \frac{c_1 n}{2} \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + \frac{c_1}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u_t^k(x)\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt,$$

$c_1 = \max\limits_{|\alpha|=1} \operatorname{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |c_\alpha(x,t)|$;

$$\int\limits_{Q_\tau^R} g(x,u_t^k) u_t^k \varphi_R^\gamma dxdt \geq g_0 \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u_t^k\right|^p \varphi_R^\gamma dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} f^k u_t^k \varphi_R^\gamma dxdt \leq \delta_7 \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u_t^k\right|^p \varphi_R^\gamma dxdt + C_{18} \int\limits_{Q_\tau^R} \left|f^k\right|^{p'} \varphi_R^\gamma dxdt,$$

δ_7 – довільна додатна стала, C_{18} – деяка додатна стала, що залежить від p, δ_7.

Враховуючи наведені вище оцінки інтегралів рівності (11) та послідовно вибираючи належним чином достатньо малі додатні сталі $\delta_1, ..., \delta_7$, можна отримати після відповідних перепозначень, що

$$\int\limits_{\Omega^R} \left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 \varphi_R^\gamma dx + \int\limits_{\Omega^R} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2 \times \varphi_R^\gamma dx + \int\limits_{\Omega^R} \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2 \varphi_R^\gamma dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n \left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2} \varphi_R^\gamma dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n \left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1} \times \varphi_R^\gamma dxdt + \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u_t^k\right|^p \varphi_R^\gamma dxdt \leq$$

$$\leq C_{19} \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u_t^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + C_{20} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k\right|^2 \times \varphi_R^\gamma dxdt + C_{21} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ C_{22} \int\limits_{\Omega^R} \left|u_0^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dx + C_{23} \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x) \times D^\alpha u_0^k D^\beta u_0^k dx + C_{24} \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^n \left|u_{0,x_ix_i}^k\right|^{p_2} \varphi_R^\gamma dx +$$

$$+ C_{25} \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^n \left|u_{0,x_i}^k\right|^{p_1} \varphi_R^\gamma dx + C_{26} \int\limits_{\Omega^R} \left|u_1^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dx + C_{27} \int\limits_{Q_\tau^R} \left|f^k\right|^{p'} \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ C_{28} R^{\gamma+n+(\alpha_2-1)\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}} + C_{29} R^{\gamma+n+(\alpha_2-2)\frac{q_1p_2}{q_1-p_2}} + C_{30} R^{\gamma+n+(\alpha_1-1)\frac{q_2p_1}{q_2-p_1}} + C_{31} R^{\gamma+n+(\varkappa_2-1)\frac{p_1p_2}{p_1p_2-p_1-p_2}} + C_{32} \times R^{\gamma+n+(\varkappa_2-2)\frac{2p_2}{p_2-2}} + C_{33} R^{\gamma+n+(\varkappa_1-1)\frac{2p_1}{p_1-2}}, \quad (12)$$

причому додатні сталі C_{19} – C_{33} не залежать від R.

Якщо позначимо

$$y(\tau) = \int\limits_{\Omega^R} \left[\left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^k(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u_t^k(x,\tau)\right|^2 \right] \varphi_R^\gamma dx$$

та використаємо лему Гронуола, то одержимо

$$\int\limits_{\Omega^R} \left[\left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2 \right] \varphi_R^\gamma dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n \left[\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2} + \sum_{i=1}^n \left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1} + \left|u_t^k\right|^p \right] \times \varphi_R^\gamma dxdt \leq C_{34} \int\limits_{\Omega^R} \left|u_0^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dx +$$

$$+ C_{35} \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_0^k D^\beta u_0^k \varphi_R^\gamma dx + C_{36} \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^n \left|u_{0,x_ix_i}^k\right|^{p_2} \varphi_R^\gamma dx +$$

$$+ C_{37} \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^n \left|u_{0,x_i}^k\right|^{p_1} \varphi_R^\gamma dx + C_{38} \int\limits_{\Omega^R} \left|u_1^k\right|^2 \varphi_R^\gamma dx +$$

$$+C_{39}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|f^k\right|^{p'}\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+C_{40}R^{\gamma+n+(\alpha_2-1)\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}+C_{41}R^{\gamma+n+(\alpha_2-2)\frac{q_1p_2}{q_1-p_2}}+$$

$$+C_{42}R^{\gamma+n+(\alpha_1-1)\frac{q_2p_1}{q_2-p_1}}+$$

$$+C_{43}R^{\gamma+n+(\varkappa_2-1)\frac{p_1p_2}{p_1p_2-p_1-p_2}}+$$

$$+C_{44}R^{\gamma+n+(\varkappa_2-2)\frac{2p_2}{p_2-2}}+C_{45}R^{\gamma+n+(\varkappa_1-1)\frac{2p_1}{p_1-2}},$$

додатні сталі C_{34} – C_{45} не залежать від R.

Враховуючи (10), умови теореми та належним чином вибираючи число $q_1\in(p_2;p]$ достатньо близьким до p_2, а число $q_2\in(p_1;p]$ достатньо близьким до p_1, з останньої нерівності для довільного $R_0>1$ та достатньо великого $R>R_0$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}}\Big[\left|u_t^k(x,\tau)\right|^2+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2+$$

$$+\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2\Big]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\sum_{i=1}^n\Big[\left|u_{tx_ix_i}^k\right|^{p_2}+\sum_{i=1}^n\left|u_{tx_i}^k\right|^{p_1}+$$

$$+\left|u_t^k\right|^p\Big]dxdt\le C_{46},\tag{13}$$

$\tau\in(0,T]$ – довільне число, додатна стала C_{46} не залежить від R_0. Беручи до уваги довільність R_0, з нерівності (13) робимо висновок про існування деякої підпослідовності $\{u^{k_n}\}$ послідовності $\{u^k\}$ такої, що

$$u^{k_n}\to u\ \ *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})),$$

$$u_t^{k_n}\to u_t\ \ *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega})),$$

$$u_t^{k_n}\to u_t\quad\text{слабко в}\quad L^{p_2}((0,T);W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega})),$$

$$u_t^{k_n}\to u_t\quad\text{слабко в}\quad L^{p_1}((0,T);W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega}))),$$

$$u_t^{k_n}\to u_t\quad\text{слабко в}\quad L^{p}((0,T);L^{p}_{loc}(\overline{\Omega}))$$

при $k_n\to\infty$. З цих нерівностей одержимо (переходячи при потребі до підпослідовностей):

$$\left|u_{tx_ix_j}^{k_n}\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}^{k_n}\to\chi_2\quad\text{слабко в}$$

$$\left(L^{p_2}((0,T);W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega}))\right)^*,\quad i,j=1,...,n,$$

$$\left|u_{tx_i}^{k_n}\right|^{p_1-2}u_{tx_i}^{k_n}\to\chi_1\quad\text{слабко в}$$

$$\left(L^{p_1}((0,T);W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega}))\right)^*,\quad i=1,...,n,$$

$$g(x,u_t^{k_n})\to\chi_0\ \text{слабко в}\ \left(L^p((0;T);L^p_{loc}(\overline{\Omega}))\right)^*$$

при $k_n\to\infty$. Використовуючи [7, с. 20, лема 1.2], маємо $u\in C([0,T];H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$. Міркуючи подібно до [7, с. 234, заув. 6.2], з рівняння (1) робимо висновок, зокрема, що $u_{tt}\in V^*$, де $V=L^{p_2}\left((0,T);W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega})\right)\cap L^{p_1}\left((0,T);W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega})\right)\cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}(\overline{\Omega})\right)$. На підставі правильності останнього включення одержимо $u_t\in C\left([0,T];L^2_{loc}(\Omega)\right)$ [7, с.20, лема 1.2]. Оскільки $u^{k_n}(\cdot,0)\to u(\cdot,0)$ слабко в $H^2_0(\Omega)$, $u_0^{k_n}\to u_0$ сильно в $H^2_0(\Omega)$, то $u(x,0)=u_0(x)$, $x\in\Omega$. Крім того, аналогічно до [7, с.236] показуємо, що $u_t(x,0)=u_1(x)$.

Покажемо, що $\chi_2=\left|u_{tx_ix_j}\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}$, $\chi_1=\left|u_{tx_i}\right|^{p_1-2}u_{tx_i}$, $\chi_0=g(x,u_t)$. Зауважимо, що з отриманих вище збіжностей випливає [7, с. 70, теорема 5.1]:

$$u_t^{k_n}\to u_t\ \text{сильно в}\ L^2((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega})),\tag{14}$$

$$u^{k_n}\to u\ \text{сильно в}\ L^2((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})).\tag{15}$$

В області Q_τ^R розглянемо різницю u^l-u^m, $l,m\in\mathbb{N}$, $R>R_0$ та позначимо $w^{l,m}=u^l-u^m$, $f^{l,m}=f^l-f^m$, $u_0^{l,m}=u_0^l-u_0^m$, $u_1^{l,m}=u_1^l-u_1^m$. Міркуючи аналогічно до того, як отримано (12), можна одержати

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\left[\sum_{i=1}^n\left|w_{tx_ix_i}^{l,m}\right|^{p_2}+\sum_{i=1}^n\left|w_{tx_i}^{l,m}\right|^{p_1}+\left|w_t^{l,m}\right|^p\right]\times$$

$$\times dxdt\le C_{47}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma\Big[\int\limits_{Q_\tau^R}\left|w_t^{l,m}\right|^2+$$

$$\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha w^{l,m}\right|^2\Big]dxdt+C_{48}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma R^{n-\beta}+$$

$$+\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma\Big(C_{49}\int\limits_{\Omega^R}\left|u_0^{l,m}\right|^2dx+$$

$$+C_{50}\sum_{i=1}^2\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=i}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_0^{l,m}D^\beta u_0^{l,m}dx+$$

$$+C_{51}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0,x_ix_i}^{l,m}\right|^{p_2}dx+$$

$$+C_{52}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0,x_i}^{l,m}\right|^{p_1}dx+C_{53}\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega^R}\left|u_1^{l,m}\right|^2dx+C_{54}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|f^{l,m}\right|^{p'}dxdt\Big),\quad(16)$$

де $\beta = \min\Big\{(1-\alpha_2)\frac{p_1p_2}{p_1-p_2},(1-\varkappa_2)\frac{p_1p_2}{p_1p_2-p_1-p_2},(2-\varkappa_2)\frac{2p_2}{p_2-2},(1-\varkappa_1)\frac{2p_1}{p_1-2}\Big\}$, додатні сталі C_{47} – C_{54} не залежать від R.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Очевидно, що $\lim\limits_{R\to+\infty}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma=1$. Оскільки послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна у просторі $L^2((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, а послідовність $\{u_t^k\}$ фундаментальна у просторі $L^2((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, що випливає зі збіжностей (14), (15), то існує таке $R_1>R_0$, що

$$C_{47}\left(\frac{R_1}{R_1-R_0}\right)^\gamma\Big[\int\limits_{Q_\tau^{R_1}}\left|w_t^{l,m}\right|^2+$$

$$+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha w^{l,m}\right|^2\Big]dxdt<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Зазначимо, що з умови **(P)** випливає існування такого $R_2>R_0$, що

$$C_{48}\left(\frac{R_2}{R_2-R_0}\right)^\gamma R^{n-\beta}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Позначимо тепер $R_3=\max\{R_1,R_2\}$. Використовуючи фундаментальності послідовностей $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$ і $\{u_1^k\}$ у відповідних функційних просторах та застосовуючи нерівність трикутника, можемо вибрати таке $k_0\in\mathbb{N}$, $k_0>[R_3]+1$, що для всіх $l,m>k_0$

$$\left(\frac{R_3}{R_3-R_0}\right)^\gamma\Big(C_{49}\int\limits_{\Omega^{R_3}}\left|u_0^{l,m}\right|^2dx+C_{50}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega^{R_3}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=i}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_0^{l,m}D^\beta u_0^{l,m}dx+$$

$$+C_{51}\int\limits_{\Omega^{R_3}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0,x_ix_i}^{l,m}\right|^{p_2}dx+$$

$$+C_{52}\int\limits_{\Omega^{R_2}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0,x_i}^{l,m}\right|^{p_1}dx+C_{53}\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega^{R_3}}\left|u_1^{l,m}\right|^2dx+C_{54}\int\limits_{Q_\tau^{R_3}}\left|f^{l,m}\right|^{p'}dxdt\Big)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким чином, з нерівності (16) випливає: для довільного фіксованого $R_0>1$ та довільного як завгодно малого $\varepsilon>0$ існує таке $k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Big[\sum_{i=1}^{n}\left|w_{tx_ix_i}^{l,m}\right|^{p_2}+\sum_{i=1}^{n}\left|w_{tx_i}^{l,m}\right|^{p_1}+\left|w_t^{l,m}\right|^p\Big]dxdt<\varepsilon$$

для довільних $l,m>k_0,\tau\in[0,T]$. Враховуючи довільність R_0, одержимо, що $\{u_t^k\}$ – фундаментальна послідовність в просторі $C\left([0,T];L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)\cap L^{p_2}\Big((0,T);W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega})\Big)\cap L^{p_1}\Big((0,T);W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega})\Big)(\overline{\Omega})\cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. Звідси випливає, що $\chi_2=\left|u_{tx_ix_j}\right|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}$, $\chi_1=\left|u_{tx_i}\right|^{p_1-2}u_{tx_i}$, $\chi_0=g(x,u_t)$. Отже, u задовольняє інтегральну тотожність (5). Крім того, функція u задовольняє умову (2), тобто u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4). Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam // J. Math. Anal. And Appl.– **242.**– 2000.– P. 212 – 236.

2. *Пукач П.Я.* Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області// Прикладні проблеми мех. та матем. – Вип. 4. – 2006. – С. 59 – 69.

3. *Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області//Матем. студії.–**27**.–2007, № 2.–С. 139–148.

4. *Пукач П.Я.* Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області// Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. Сер. Математика. – Вип. 314 – 315. – 2006. – С. 159 – 170.

5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.–Москва: Мир, 1978.

6. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity// Arch. Ration. Mech. Anal.– **106**.– 1989, № 3.– P. 217 – 241.

7. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– Москва: Эдиториал УРСС, 2002.