УДК 517.91:532.2

©2009 р. О.М. Нікітіна

Чернівецький факультет національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"

ЗАПРОВАДЖЕННЯ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера-Лежандра-Бесселя.

Hybrid integral transform of the Eiler-Legandres-Bessel type is constructed by the method of delta-shaped consequence (Dirichlet kernel) on the polar axies with two contact points.

Аналіз та ціль статті. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів побудови аналітичних розв'язків таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткованих в роботі [1]. Основні підвалини ГІП закладено в роботі [2]. Дана стаття присвячена запровадженню одного із типів ГІП.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup \cup (R_2, \infty);\ R_0 > 0\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)B_{\alpha_1}^* + +\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2\Lambda_{(\mu)} + +\theta(r - R_2)a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}, \qquad (1)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3], $a_j > 0$, $j = \overline{1,3}$.

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператора Ейлера $B_{\alpha_1}^*$ [4], Лежандра $\Lambda_{(\mu)}$ [5] та Бесселя B_{ν,α_2} [6]: $B_{\alpha_1}^* = r^2\dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1)r\dfrac{d}{dr} + \alpha_1^2$, $\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\mu_1^2}{1 - \operatorname{ch} r} + \dfrac{\mu_2^2}{1 + \operatorname{ch} r}\Big)$, $B_{\nu,\alpha_2} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2\alpha_2 + 1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{\nu^2 - \alpha_2^2}{r^2}$, $2\alpha_j + 1 > 0$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $\nu \geq \alpha_2 > -1/2$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. За область визначення ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові

$$(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty}[r^\gamma g_3(r)] = 0; \qquad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\Big[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k)g_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k)\times \times g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j,k = 1,2. \qquad (3)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$, $\alpha_{jk}^m \geq 0$, $\beta_{jk}^m \geq 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{\operatorname{sh} R_1}{\operatorname{sh} R_2}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}},$$

$$\sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{a_2^2}, \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r-R_1)\times$$

$$\times\theta(R_2-r)\sigma_2 \operatorname{sh} r + \theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}$$

та скалярний добуток

$$(u,v) = \int\limits_{R_0}^{\infty} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int\limits_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1\times$$

$$\times r^{2\alpha_1-1}dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 \operatorname{sh} r dr + \int\limits_{R_2}^{\infty} u_3(r)\times$$

$$\times v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr, u \in G, v \in G. \qquad (4)$$

Для $u \in G$ та $v \in G$ із умов спряження (3) випливає базова тотожність:

$$\Big(u_k(r)\frac{dv_k}{dr} - v_k\frac{du_k}{dr}\Big)\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\Big(u_{k+1}(r)\times$$

$$\times\frac{dv_{k+1}}{dr} - v_{k+1}\frac{du_{k+1}}{dr}\Big)\Bigg|_{r=R_k}, k = 1,2. \qquad (5)$$

Безпосередньо перевіряється, що справджується рівність

$$(\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v) = (u, \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v]). \qquad (6)$$

Рівність (6) показує, що ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$ і йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) +$$

$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) +$$

$$+\theta(r-R_2)V_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(r,\beta)\}.$$

Функції $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ знайдемо як розв'язок відповідної системи диференціальних рівнянь Ейлера, Лежандра та Бесселя

$$(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2),$$

$$(B_{\nu,\alpha_2} + b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_2, \infty) \quad (7)$$

за однорідними крайовими умовами (2) та однорідними умовами спряження (3), $b_j^2 = \beta^2 + k_j^2$, $k_j^2 \ge 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1(r) = r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2(r) = r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ та $B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ [5] ; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r)$ та $N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r)$ [6].

Якщо покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) +$$

$$+B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) +$$

$$+B_2 B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r) +$$

$$+B_3 N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r), \qquad (8)$$

то крайова умова в точці $r = R_0$ й умови спряження в точках $r = R_1$ та $r = R_2$ дають для визначення шести величин A_j, B_j ($j = \overline{1,3}$) алгебраїчну систему із п'яти рівнянь:

$$Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1, R_0)A_1 + Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1, R_0)B_1 = 0,$$

$$Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1, R_1)A_1 + Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1, R_1)B_1 -$$

$$-Y^{(\mu);11}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)A_2 - Y^{(\mu);12}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)B_2 = 0, \quad (9)$$

$$Y^{(\mu);21}_{-1/2+ib_2;j1}(\operatorname{ch} R_2)A_2 + Y^{(\mu);22}_{-1/2+ib_2;j1}(\operatorname{ch} R_2)B_2 -$$

$$-u^{21}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)A_3 - u^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)B_3 = 0, j = 1, 2.$$

У системі (9) беруть участь функції:

$$Y^{m1}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_m) = [(\beta^m_{j1} - \alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1})\cos(b_1 \ln R_m) -$$

$$-\alpha^m_{j1} R_m^{-1} b_1 \sin(b_1 \ln R_m)]R_m^{-\alpha_1}, m = 0, 1,$$

$$Y^{m2}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_m) = [(\beta^m_{j1} - \alpha_1 R_m^{-1}\alpha^m_{j1})\sin(b_1 \ln R_m) +$$

$$+\alpha^m_{j1} R_m^{-1} b_1 \cos(b_1 \ln R_m)]R_m^{-\alpha_1},$$

$$Y^{(\mu),m1}_{-1/2+ib_2;jk}(\operatorname{ch} R_m) = (\alpha^m_{jk} d/dr + \beta^m_{jk})\times$$

$$\times A^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch} r)\Big|_{r=R_m}, m = 1, 2,$$

$$Y^{(\mu),m2}_{-1/2+ib_2;jk}(\operatorname{ch} R_m) = (\alpha^m_{jk} d/dr + \beta^m_{jk})\times$$

$$\times B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch} r)\Big|_{r=R_m}, m = 1, 2,$$

$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2) = \left(\alpha^2_{j2}\frac{\nu - \alpha_2}{R_2} + \beta^2_{j2}\right)\times$$

$$\times J_{\nu,\alpha_2}(b_3R_2) - \alpha^2_{j2} b_3^2 R_2 J_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_3R_2),$$

$$u^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2) = \left(\alpha^2_{j2}\frac{\nu - \alpha_2}{R_2} + \beta^2_{j2}\right)\times$$

$$\times N_{\nu,\alpha_2}(b_3R_2) - \alpha^2_{j2} b_3^2 R_2 N_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_3R_2).$$

Якщо взяти $A_1 = Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)A_0$, $B_1 = -Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)A_0$, де A_0 підлягає визначенню, то перше рівняння в системі (9) стає тотожністю, а інші розпадаються на дві алгебраїчні системи по два рівняння в кожній.

Розглянемо алгебраїчну систему щодо A_2, B_2:

$$Y^{(\mu);11}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)A_2 + Y^{(\mu);12}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)B_2 =$$

$$= -A_0\delta_{\alpha_1;j1}(\beta), j = 1, 2, \quad (10)$$

$$\delta_{\alpha_1,j1}(\beta) = Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1) -$$

$$-Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1), j = 1, 2.$$

Визначник системи (10)

$$q_{(\mu)}(\beta) \equiv Y^{(\mu),11}_{-1/2+ib_2;12}(\operatorname{ch} R_1)Y^{(\mu),12}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_1) -$$

$$-Y^{(\mu),11}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_1)Y^{(\mu),12}_{-1/2+ib_2;12}(\operatorname{ch} R_1) =$$

$$= \frac{c_{21}}{\operatorname{sh} R_1}\cdot\frac{1}{S_{(\mu)}(b_2)} \neq 0; S_{(\mu)}(b_2) =$$

$$= \frac{2^{\mu_1-\mu_2}\gamma_{(\mu)}(b_2)\pi^3}{\operatorname{sh} 2\pi b_2|\Gamma(1/2 + ib_2 + \nu^+)|^2}\times$$

$$\times\frac{1}{|\Gamma(1/2 + ib_2 + \nu^-)|^2}, \gamma_{(\mu)}(b_2) =$$

$$= \frac{\cos\mu_1\pi \operatorname{sh} 2\pi b_2}{\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi \operatorname{ch} 2\pi b_2}, \nu^\pm = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2).$$

Алгебраїчна система (10) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_2 = -\frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta)}[\delta_{\alpha_1;11}(\beta)Y^{(\mu),12}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_1) -$$

$$-\delta_{\alpha_1;21}(\beta)Y^{(\mu),12}_{-1/2+ib_2;12}(\operatorname{ch} R_1)],$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta)}[\delta_{\alpha_1;11}(\beta)Y^{(\mu),11}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_1) -$$

$$-\delta_{\alpha_1;21}(\beta)Y^{(\mu),11}_{-1/2+ib_2;12}(\operatorname{ch} R_1)]. \quad (11)$$

Розглянемо алгебраїчну систему щодо A_3, B_3:

$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)A_3 + u^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)B_3 =$$

$$= A_0[q_{(\mu)}(\beta)]^{-1}a^{(\mu)}_{\alpha_1,j}(\beta), j = 1, 2. \quad (12)$$

У системі (12) прийняті позначення:

$$\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_2;jk}(\beta) = Y^{(\mu),11}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)\times$$

$$\times Y^{(\mu),22}_{-1/2+ib_2;k1}(\operatorname{ch} R_2) - Y^{(\mu),12}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)\times$$

$$\times Y^{(\mu),21}_{-1/2+ib_2;k1}(\operatorname{ch} R_2), j, k = 1, 2,$$

$$a^{(\mu)}_{\alpha_1;j}(\beta) = \delta_{\alpha_1;11}(\beta)\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_2;2j}(\beta) - \delta_{\alpha_1;21}(\beta)\times$$

$$\times\delta^{(\mu)}_{-1/2+ib_2;1j}(\beta), j = 1, 2.$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$q_{\nu,\alpha_2}(\beta) \equiv u^{21}_{\nu,\alpha_2;12}(b_3R_2)u^{22}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_2) -$$

$$-u^{21}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3R_2)u^{22}_{\nu,\alpha_2;12}(b_3R_2) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{b_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}} \neq 0.$$

При $A_0 = q_{(\mu)}(\beta) q_{\nu,\alpha_2}(\beta)$ алгебраїчна система (12) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta), B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta), \qquad (13)$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = a^{(\mu)}_{\alpha_1;2}(\beta) u^{2j}_{\nu,\alpha_2;12}(b_3 R_2) - a^{(\mu)}_{\alpha_1;1}(\beta)\times$$
$$\times u^{2j}_{\nu,\alpha_2;22}(b_3 R_2), j = 1, 2.$$

Підставивши визначені за формулами (13), (12) величини A_3, B_3, A_2, B_2 та визначені величини A_1, B_1 при $A_0 = q_{(\mu)}(\beta) q_{\nu,\alpha_2}(\beta)$ у рівності (8), маємо функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r, \beta)$:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) = q_{(\mu)}(\beta) q_{\nu,\alpha_2}(\beta)[Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)\times$$
$$\times r^{-\alpha_1} \cos(b_1 \ln r) - Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0) r^{-\alpha_1} \sin(b_1 \ln r)],$$
$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r, \beta) = q_{\nu,\alpha_2}(\beta)[\delta_{\alpha_1;11}\times$$
$$\times f^{(\mu),1}_{-1/2+ib,22}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r) - \delta_{\alpha_1;21}\times$$
$$\times f^{(\mu),1}_{-1/2+ib,12}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r)],$$
$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r, \beta) = \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta) N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r) -$$
$$-\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta) J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r), \qquad (14)$$
$$f^{(\mu),1}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r) = Y^{(\mu),11}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)\times$$
$$\times B^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch} r) - Y^{(\mu),12}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1)\times$$
$$\times A^{(\mu)}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch} r).$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r, \beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) = \beta b_3^{2\alpha_2}([\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$$

дозволяє визначити пряме $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathfrak{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ [2]:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r, \beta) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}(\beta), \qquad (15)$$

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)] = \int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r, \beta) \Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) d\beta \equiv$$
$$\equiv g(r). \qquad (16)$$

Математичним обгрунтуванням формул (15), (16) є твердження.

Теорема (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція* $f(r) = [\theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) r^{\alpha_1 - 1/2} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sqrt{\operatorname{sh} r} + \theta(r - R_2) r^{\alpha_2 + 1/2}] g(r)$ *неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині* (R_0, ∞), *то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \int_0^{\infty} V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r, \beta) \int_{R_0}^{\infty} g(\rho) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\rho, \beta)\times$$
$$\times \sigma(\rho) d\rho \Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) d\beta. \qquad (17)$$

Доведення. Функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta)$ і $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda)$ для $\lambda \neq \beta \in (0, \infty)$, задовольняють відповідно диференціальні рівняння:

$$[a_1^2 B^*_{\alpha_1} + (\lambda^2 + k_1^2)] V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda) = 0,$$

$$[a_1^2 B^*_{\alpha_1} + (\beta^2 + k_1^2)] V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) = 0.$$

Помножимо перше з них на $r^{2\alpha_1 - 1} V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta)$, а друге – на $r^{2\alpha_1 - 1} V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$(\lambda^2 - \beta^2) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1)}(r, \lambda) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) r^{2\alpha_1 - 1} =$$
$$= a_1^2 \frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_1 + 1}\Big(V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) \frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda)}{dr} -$$
$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda) \frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta)}{dr}\Big)\Big]. \qquad (18)$$

Функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r, \lambda)$ і $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r, \beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0, \infty)$, задовольняють відповідно диференціальні рівняння Лежандра:

$$[a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + (\lambda^2 + k_2^2)] V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda) = 0,$$

$$[a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + (\beta^2 + k_2^2)] V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) = 0.$$

Помножимо перше з них на функцію $\operatorname{sh} r V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)$, а друге – на функцію $\operatorname{sh} r V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)$ і віднімемо від першого друге:

$$(\lambda^2-\beta^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=a_2^2\frac{d}{dr}\Big[\operatorname{sh} r\times$$

$$\times\Big(V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)}{dr}-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)\times$$

$$\times\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big]. \qquad (19)$$

Функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$ і $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$, де $\lambda\neq\beta\in(0,\infty)$, задовольняють відповідно диференціальні рівняння Бесселя:

$$[a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}+(\lambda^2+k_3^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)=0,$$

$$[a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}+(\beta^2+k_3^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=0.$$

Помножимо перше з них на вираз $r^{2\alpha_2+1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$, а друге – на вираз $r^{2\alpha_2+1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$ і віднімемо від першого друге:

$$(\lambda^2-\beta^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3)}(r,\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=$$

$$=a_3^2\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_2+1}\Big(V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)}{dr}-$$

$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big]. \qquad (20)$$

Помножимо рівність (18) на $\sigma_1 dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_0$ до $r=R_1$; помножимо рівність (19) на $\sigma_2 dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_1$ до $r=R_2$; помножимо рівність (20) на $\sigma_3 dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_2$ до $r=R$, де R – як завгодно велике додатне число. Якщо одержані результати додати, то в силу крайової умови в точці $r=R_0$, базової тотожності в точка $r=R_1$ й $r=R_2$ та структури σ_1, σ_2, σ_3 матимемо рівність:

$$\int\limits_{R_0}^{R}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\frac{R^{2\alpha_2+1}}{\lambda^2-\beta^2}\times$$

$$\times\Big[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)V^{(\mu)\prime}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)-$$

$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)V^{(\mu)\prime}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\Big]. \qquad (21)$$

Для довільних додатних c та d ($c<d$) і довільної скінченної функції $\Psi(\lambda)$, визначеної на сегменті $[c,d]$, знайдемо величину інтеграла

$$I=\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{c}^{d}\Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{R_0}^{R}\int\limits_{c}^{d}\Psi(\lambda)\times$$

$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr. \qquad (22)$$

В силу рівності (21) подвійний інтеграл (22) зобразимо в такій формі:

$$I=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{c}^{d}\Psi(\lambda)\frac{R^{2\alpha_2+1}}{\lambda^2-\beta^2}\Big[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\times$$

$$\times\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)}{dr}-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)}{dr}\Big]\times$$

$$\times\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda. \qquad (23)$$

Оскільки c та d додатні числа, то для знаходження границі (23) скористаємося асимптотичними формулами для функцій Бесселя при великих значеннях аргумента [8]:

$$J_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{x^{\alpha+1/2}},$$

$$N_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{x^{\alpha+1/2}}. \qquad (24)$$

Безпосереднім підрахунком одержуємо:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)}{dr}-$$

$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)}{dr}\approx$$

$$\approx [\pi R^{\alpha_2+1}(b_3(\lambda)b_3(\beta))^{\alpha_2+1/2}]^{-1}\times$$
$$\times\{[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]Z^{+}\sin Rz^{-}-$$
$$-[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]Z^{+}\cos Rz^{-}+[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]Z^{-}\sin(Rz^{+}-\pi\nu)+$$
$$+[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]Z^{-}\cos(Rz^{+}-\pi\nu)\}, \qquad (25)$$
$$z^{\pm}=b_3(\beta)\pm b_3(\lambda).$$

Асимптотична рівність (25) дозволяє граничну рівність (23) замінити асимптотичною рівністю:

$$I\approx\lim_{R\to\infty}\int\limits_c^d\frac{\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)a_3^{-2}}{\pi[b_3(\lambda)b_3(\beta)]^{\alpha_2+1/2}}\times$$
$$\times\Big\{[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]\times$$
$$\times\frac{\sin Rz^{-}}{z^{-}}+[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]\frac{\cos Rz^{-}}{b_3(\beta)-b_3(\lambda)}+[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]\times$$
$$\times\frac{\sin(Rz^{+}-\pi\nu)}{b_3(\beta)+b_3(\lambda)}+[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)-$$
$$-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]\frac{\cos(Rz^{+}-ß\nu)}{b_3(\beta)+b_3(\lambda)}\Big\}d\lambda. \qquad (26)$$

Припустимо, що функція $\Psi(\lambda)$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на $[c,d]$. Тоді в силу леми Рімана [9]

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_c^d\frac{\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)}{a_3^2[b_3(\lambda)b_3(\beta)]^{\alpha_2+1/2}}[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)][b_3(\beta)-$$
$$-b_3(\lambda)]^{-1}\cos R(b_3(\beta)-b_3(\lambda))d\lambda=0, \qquad (27)$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_c^d\frac{\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)a_3^{-2}}{[b_3(\lambda)b_3(\beta)]^{\alpha_2+1/2}}[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)][b_3(\beta)+$$
$$+b_3(\lambda)]^{-1}\sin[R(b_3(\lambda)+b_3(\beta))-\pi\nu]d\lambda=0, \qquad (28)$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_c^d\frac{\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)a_3^{-2}}{[b_3(\lambda)b_3(\beta)]^{\alpha_2+1/2}}[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\times$$
$$\times\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)][b_3(\beta)+$$
$$+b_3(\lambda)]^{-1}\cos[R(b_3(\lambda)+b_3(\beta))-\nu\pi]d\lambda=0. \qquad (29)$$

В силу леми Діріхле [9]

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_c^d\frac{\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)a_3^{-2}}{[b_3(\lambda)b_3(\beta)]^{\alpha_2+1/2}}[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)+$$
$$+\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]\frac{1}{\pi}\frac{\sin R(b_3(\beta)-b_3(\lambda))}{b_3(\beta)-b_3(\lambda)}d\lambda=$$
$$=\begin{cases}\Psi(\beta), & \lambda=\beta\in[c,d],\\ 0, & \lambda\overline{\in}[c,d].\end{cases} \qquad (30)$$

Отже, внаслідок рівностей (26) – (30) інтеграл

$$I\equiv\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\Psi(\beta), \qquad (31)$$

якщо $\lambda=\beta\in[c,d]$. Якщо ж $\lambda=\beta\overline{\in}[c,d]$, то $I=0$.

Якщо функція $\Psi(\lambda)$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то невласний подвійний інтеграл

$$I\equiv\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\Psi(\beta), \qquad (32)$$

якщо $\lambda = \beta \in (0,\infty)$. Якщо $\lambda = \beta \overline{\in} (0,\infty)$, то $I = 0$.

Нехай тепер функція

$$g(r) = \int\limits_0^\infty \Psi(\beta) V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta. \quad (33)$$

Помножимо рівність (33) на вираз $\sigma(r) V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\lambda)$, де λ – довільне додатне число, й проінтегруємо по r від $r = R_0$ до $r = \infty$. В силу рівності (32)

$$\int\limits_{R_0}^\infty g(r) V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \Psi(\lambda).$$

Підставивши функцію

$$\Psi(\beta) = \int\limits_{R_0}^\infty g(\rho) V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

в рівність (33), приходимо до інтегрального зображення (17). Доведення теореми завершено.

Зауваження. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то зліва в рівності (17) замість $g(r)$ буде

$$\frac{1}{2}[g(r+0) + g(r-0)].$$

В основі застосування запровадженого формулами (15), (16) ГІП знаходиться основна тотожність ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (1).

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r) = \{B_\alpha^*[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}(r)[g_2(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)]\}$ *неперервна на множині* I_2^+, *а функції* $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови*

$$\Big(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\Big) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\Bigg[r^{2\alpha_2+1}\Big(\frac{dg_3}{dr} V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) - g_3(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\Big)\Bigg] = 0 \quad (34)$$

та умови спряження

$$\Bigg[\Big(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\Big) g_k(r) - \Big(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\Big) \times g_{k+1}(r)\Bigg]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk},\, j,k = 1,2, \quad (35)$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_k^2 \tilde{g}_j(\beta) + \sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1} \times V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta) g_0 + \sum_{k=1}^{2} h_k \times [Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}]. \quad (36)$$

У рівностях (36) прийняті позначення:

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 \operatorname{sh} r dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr,$$

$$h_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} c_{11}^{-1},\, h_2 = a_2^2\sigma_2 \operatorname{sh} R_2 \cdot c_{12}^{-1},$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta) = [(\alpha_{i2}^k d/dr + \beta_{i2}^k) \times V_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta)]\Big|_{r=R_k},\, i,k = 1,2.$$

Доведення. Згідно правила (15)

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = \int\limits_{R_0}^\infty \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)] \times V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$

$$= \int\limits_{R_0}^{R_1} (a_1^2 B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]) V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr +$$

$$+ \int\limits_{R_1}^{R_2} (a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) \operatorname{sh} r \sigma_2 dr +$$

$$+ \int\limits_{R_2}^{\infty} (a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}[g_3(r)]) V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1} dr. \tag{37}$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів два рази частинами:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] =$$

$$= \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r)(a_1^2 B_{\alpha_1}^*[V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)])\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr +$$

$$+ \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)(a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)])\sigma_2 \operatorname{sh} r dr +$$

$$+ \int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r)(a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}[V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)])\sigma_3 r^{2\alpha_2+1} dr +$$

$$+ a_1^2\sigma_1 \Big[r^{2\alpha_1+1} \Big[\frac{dg_1}{dr} V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) - g_1(r) \times$$

$$\times \frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr} \Big]\Big)\Big|_{R_0}^{R_1} + a_2^2\sigma_2 \Big[\operatorname{sh} r \times$$

$$\times \Big(\frac{dg_2}{dr} V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) - g_2(r) \frac{dV_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr} \Big) \Big]\Big|_{R_1}^{R_2} +$$

$$+ a_3^2\sigma_3 \Big[r^{2\alpha_2+1} \Big(\frac{dg_3}{dr} V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) - g_3(r) \times$$

$$\times \frac{dV_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr} \Big) \Big] \Big|_{R_2}^{\infty}. \tag{38}$$

Якщо умови спряження неоднорідні, то базова тотожність (5) набуває вигляду:

$$\Big[V_{\nu,(\alpha);k}^{(\mu)}(r,\beta) \frac{dg_k}{dr} - g_k(r) \frac{dV_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta)}{dr} \Big]\Big|_{r=R_k} =$$

$$= \frac{c_{2k}}{c_{1k}} \Big[V_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta) \frac{dg_{k+1}}{dr} - g_{k+1}(r) \times$$

$$\times \frac{dV_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)}{dr} \Big]\Big|_{r=R_k} + \frac{1}{c_{1k}} [Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} -$$

$$- Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}]. \tag{39}$$

В силу структури σ_1, σ_2, σ_3 та рівності (39) при $k = 1, 2$ маємо:

$$a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} \Big(\frac{dg_1(R_1)}{dr} V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_1,\beta) -$$

$$- g_1(R_1) \frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_1,\beta)}{dr} \Big) -$$

$$- a_2^2 \sigma_2 \operatorname{sh} R_1 \Big(\frac{dg_2(R_1)}{dr} V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta) -$$

$$- g_2(R_1) \frac{dV_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta)}{dr} \Big) =$$

$$= \Big(a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} \frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2 \sigma_2 \operatorname{sh} R_1 \Big) (g_2'(R_1) \times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta) - g_2(R_1) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\,\prime}(R_1,\beta)) +$$

$$+ h_1 (Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta)\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta)\omega_{11}) =$$

$$= 0 \cdot [g_2'(R_1) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta) - g_2(R_1) \times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\,\prime}(R_1,\beta)] + h_1 (Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta)\omega_{21} -$$

$$- Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta)\omega_{11}) = h_1 (Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta)\omega_{21} -$$

$$- Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta)\omega_{11}), \tag{40}$$

$$a_2^2 \sigma_2 \operatorname{sh} R_2 [g_2'(R_2) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_2,\beta) - g_2(R_2) \times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\,\prime}(R_2,\beta)] - a_3^2 \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1} [g_3'(R_2) \times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_2,\beta) - g_3(R_2) V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\,\prime}(R_2,\beta)] =$$

$$= \Big(a_2^2 \sigma_2 \operatorname{sh} R_2 \frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2 \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}) [g_3'(R_2) \times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_2,\beta) - V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\,\prime}(R_2,\beta) g_3(R_2)] +$$

$$+ \frac{1}{c_{12}} a_2^2 \sigma_2 \operatorname{sh} R_2 (Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{22} -$$

$$- Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{12}) = 0 \cdot [g_3'(R_2) \times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_2,\beta) - g_3(R_2) V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\,\prime}(R_2,\beta)] +$$

$$+ h_2 [Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{22} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{12}] =$$

$$= h_2 [Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{22} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{12}]. \tag{41}$$

При $\alpha_{11}^0 \neq 0$ маємо:

$$-a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\Big(\frac{dg_1}{dr}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) - g_1(r)\times$$

$$\times\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big|_{r=R_0} = -a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\Big[\Big(\alpha_{11}^0\times$$

$$\times\frac{dg_1}{dr} + \beta_{11}^0 g_1\Big)\Big|_{r=R_0}(\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)-$$

$$-\frac{\beta_{11}^0}{\alpha_{11}^0}g_1(R_0)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta) - g_1(R_0)\times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)\prime}(R_0,\beta)\Big] = a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1}\times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)g_0 + a_1^2\sigma_1 R_0^{\alpha_1+1}g_1(R_0)(\alpha_{11}^0)^{-1}\times$$

$$\times[\alpha_{11}^0 V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)\prime}(R_0,\beta) + \beta_{11}^0 V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)] =$$

$$= a_1^2\sigma_1 R_0^{\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)g_0+$$

$$+\frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{11}^0}R_0^{2\alpha_1+1}g_1(R_0)\cdot 0 =$$

$$= a_1^2\sigma_1 R_0^{\alpha_1+1}g_0(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}^{\mu(}(R_0,\beta). \quad (42)$$

Внаслідок диференціальних тотожностей

$$(a_1^2 B_{\alpha_1}^* + b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,$$

$$(a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + b_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,$$

$$(a_3^2 B_{\nu,\alpha_2} + b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0$$

маємо рівності:

$$a_1^2 B_{\alpha_1}^*[V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta),$$

$$a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta),$$

$$a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}[V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta). \quad (43)$$

Якщо в (38) підставити (40) – (43) й роз'єднати інтеграли на суму двох доданків, то матимемо рівність (36).

Застосування до знаходження інтегрального зображення розв'язків відповідних задач математичної фізики подамо в іншій роботі.

Висновок. В даній роботі запроваджено поліпараметричну сім'ю гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера-Лежандра-Бесселя на полярній вісі $r \geq R_0 > 0$, що поповнює сім'ю гібридних інтегральних перетворень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Уфлянд Я.С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С. 93 - 106.
2. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
3. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.
6. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.