УДК 517.51

©2009 р. Нестеренко В.В.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО СИМЕТРИЧНУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ЇЇ АНАЛОГИ

Встановлено ряд теорем про наявність точок різних типів симетричної ослабленої неперервності на вертикалях для відображень від двох змінних. Зокрема доведено, що коли простір X має зліченну псевдо базу, Y – берівський простір, який має зліченну псевдо базу, Z – метричний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ клікове відносно першої змінної і квазінеперервне відносно другої змінної, то існує залишкова множина A в X, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

We prove several theorems on the existence of points of symmetric "weak"continuity on the verticals for mappings of two variables. In particular, we prove the following statement. Let X be a topological space with countable pseudo-base, Y a Baire space with countable pseudo-base, Z a metric space and $f : X \times Y \to Z$ a cliquish mapping with respect to the first variable and quasicontinuous with respect to the second variable. Then there exists a residual set A in X such that the function f is symmetrically quasicontinuous with respect to x at each point of the set $A \times Y$.

1. В математиці XX століття з'явилось багато видів ослабленої неперервності: квазінеперервність, ледь неперервність майже неперервність, кліковість тощо. При розгляді нарізно ослаблено неперервних відображень від двох змінних природнім є питання про сукупну ослаблену неперервність цих відображень. Для деяких видів ослабленої неперервності відповідь на це питання позитивна, а для деяких ні [1]. В роботах багатьох математиків досліджуються сукупні властивості ослабленої непервності відображень, які мають певні (різні) типи ослабленої неперервності відносно першої і другої змінних. У тих випадках, коли сукупна ослаблена неперервність не одержується в кожній точці, виникає питання про множину точок сукупної ослабленої неперервності.

В цій роботі буде подано ряд результатів про наявність точок симетричної ослабленої неперервності відображення $f : X \times Y \to Z$, які мають деякий тип ослабленої неперервності відносно першої і другої змінних чи за сукупністю змінних.

2. Нехай X і Y — топологічні простори, $f : X \to Y$ — відображення. Відображення f називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу U точки x в X і для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина U_1, така, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Відображення f називається *ледь неперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина U в X, така, що $f(U) \subseteq V$. Відображення f називається *майже неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$. Відображення f називається *майже квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-яких околів U і V точок x і $y = f(x)$ відповідно в X та Y існує множина A в X, така, що $int\overline{A} \neq \emptyset$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. Відображення f називається *майже ледь неперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $int\overline{A} \neq \emptyset$ і $f(A) \subseteq V$. Нехай Y – метричний простір. Позначимо через $\omega_f(A)$ коливання функції f на множині A. Функція $f : X \to Y$ називається *кліковою в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x_0 в X існує відкрита непорожня множина U_1, така, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_f(U_1) < \varepsilon$. Відображення f є *квазінеперервним, ледь непе-*

рервним, майже неперервним, майже ледь неперервним чи кліковим, якщо воно є таким в кожній точці.

Нехай $f : X \times Y \to Z$, де X, Y і Z – топологічні простори, $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$ і для множини $E \subseteq X \times Y$ покладемо $pr_X(E) = \{x \in X : (\forall x)(\exists y \in Y)((x, y) \in E)\}$.

Відображення f називається *симетрично квазінеперервним відносно* x *в точці* p_0, якщо для довільних околів U, V і W відповідно точок $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і $z_0 = f(p_0) \in W$ існують окіл U_1 точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $f(U_1 \times V_1) \subseteq W$. Відображення f називається *симетрично ледь неперервним відносно* x *в точці* p_0, якщо для довільного околу W точки $z_0 = f(p_0) \in W$ існують окіл U_1 точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $f(U_1 \times V_1) \subseteq W$. Відображення f називається *симетрично майже квазінеперервним відносно* x *в точці* p_0, якщо для довільних околів U, V і W відповідно точок $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і $z_0 = f(p_0) \in W$ існує множина A в $X \times Y$, така, що $A \subseteq U \times V$, $x_0 \in pr_X(int\overline{A})$ і $f(A) \subseteq W$. Відображення f називається *симетрично майже ледь неперервним відносно* x *в точці* p_0, якщо для довільного околу W точки $z_0 = f(p_0) \in W$ існує множина A в $X \times Y$, така, що $x_0 \in pr_X(int\overline{A})$ і $f(A) \subseteq W$. Нехай Z – метричний простір. Відображення f називається *симетрично кліковим відносно* x *в точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільних околів U, V відповідно точок $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ існують окіл U_1 точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $\omega(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Відображення f є *симетрично квазінеперервним відносно* x, *симетрично ледь неперервним відносно* x, *симетрично майже квазінеперервне відносно* x, *симетрично майже ледь неперервним відносно* x *чи симетрично кліковим відносно* x, якщо воно є таким в кожній точці.

Аналогічно можна ввести поняття різних типів симетричної ослабленої неперервності відносно y.

3. В цьому пункті ми одержимо результати аналогічні до результатів з [2].

Теорема 1. *Нехай* X *– топологічний простір, простори* Y *та* Z *задовольняють другу аксіому зліченності і відображення* $f : X \times Y \to Z$ *майже неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в* X. *Тоді існує залишкова в* X *множина* A, *така, що відображення* f *сукупно майже неперервне в кожній точці множини* $A \times Y$.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f майже неперервне в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є майже неперервне в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існує окіл $W(x)$ точки $z_x = f(p_x)$ в Z, такий, що для кожної множини O в $X \times Y$, що $p_x \in int\overline{O}$ маємо $f(O) \not\subseteq W$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ і $\{W_n : n \in \mathbf{N}\}$ – бази просторів Y і Z відповідно та M – залишкова множина в X, для точок якої функція f^x майже неперервна. Позначимо через $E = E_1 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in E : (z_x \in W_m)(\exists B_x \subseteq V_n) \\ (y_x \in V_n \subseteq \overline{B_x})(f^x(B_x) \subseteq W_m)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = E$, бо відображення f^x майже неперервне для кожного $x \in M$. Оскільки множина E другої категорії в X, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G з X. Покладемо $A_0 = A_{n_0,m_0} \cap G$. Розглянемо множину $\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x$. Зрозуміло, що для $x \in A_0$ маємо $p_x \in G \times V_{n_0} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x}$. Крім того, $f(\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x) \subseteq W_m$. А це суперечить тому, що $A_0 \subseteq E_1$. Отже, наше припущення хибне.

Аналогічно одержуємо результати для майже квазінеперервності та майже ледь неперервності.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдо базу, простір Z задовольняє другу аксіому зліченності і відображення $f: X \times Y \to Z$ майже квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично майже квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Це означає, що для кожної точки x з деякої залишкової множини E_1 існують околи $U(x), V(x)$ і $W(x)$ відповідно точок x в X, y_x в Y і $z_x = f(p_x)$ в Z, такі, що для кожної множини O в $X \times Y$, такої, що $int\overline{O} \neq \emptyset$, $x \in pr_X(int\overline{O})$ і $O \subseteq U \times V$ маємо, що $f(O) \nsubseteq W$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – псевдо база простору Y і $\{W_n : n \in \mathbf{N}\}$ – база простору Z та M – залишкова множина в X, для точок якої функція f^x майже квазінеперервна. Позначимо через $E = E_1 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in E : (z_x \in W_m)(V_n \subseteq V(x)) \\ (\exists B_x \subseteq Y)(V_n \subseteq \overline{B_x})(f^x(B_x) \subseteq W_m)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = E$, бо відображення f^x майже квазінеперервне для кожного $x \in M$. Оскільки множина E другої категорії в X, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G з X. Покладемо $A_0 = A_{n_0,m_0} \cap G$. Розглянемо множину $\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x$. Зрозуміло, що для $x \in A_0$ маємо $p_x \in G \times V_{n_0} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x}$. Крім того, $f(\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x) \subseteq W_m$. А це суперечить тому, що $A_0 \subseteq E_1$. Отже, наше припущення хибне.

Теорема 3. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдо базу, простір Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f: X \times Y \to Z$ майже ледь неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично майже ледь неперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f майже ледь неперервне в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є майже ледь неперервне в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існує окіл $W(x)$ точки $z_x = f(p_x)$ в Z, такий, що для кожної множини O в $X \times Y$, такої, що $int\overline{O} \neq \emptyset$ і $x \in pr_X(int\overline{O})$ маємо, що $f(O) \nsubseteq W$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – псевдо база простору Y, а $\{W_n : n \in \mathbf{N}\}$ – бази простору Z і M – залишкова множина в X, для точок якої функція f^x майже ледь неперервна. Позначимо через $E = E_1 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in E : (z_x \in W_m)(\exists B_x \subseteq Y) \\ (V_n \subseteq int\overline{B_x})(f^x(B_x) \subseteq W_m)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = E$. Оскільки множина E другої категорії в X, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G з X. Покладемо $A_0 = A_{n_0,m_0} \cap G$. Розглянемо множину $\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x$. Зрозуміло, що для $x \in A_0$ маємо $p_x \in G \times V_{n_0} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x}$. Крім того, $f(\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x) \subseteq W_m$. А це суперечить тому, що $A_0 \subseteq E_1$. Отже, наше припущення хибне.

4. В [3] було встановлено наступний результат: якщо X – топологічний простір,

простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метричний сепарабельний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ сукупно квазінеперервне, то існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Пізніше, в [4], умову на простір Z вдалось послабити, вимагаючи лише щоб простір Z задовольняв другу аксіому зліченності. Зрозуміло, що коли відображення симетрично квазінеперервне відносно x, то відображення f^x є квазінеперервним. В [5] були встановлені наступні результати для функцій з $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, перший з яких є простим наслідком вище згаданої теореми з [3]:

1) якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ квазінеперервна за сукупністю змінних, то існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f^x квазінеперервна для всіх $x \in A$;

2) якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сукупно клікова, то існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f^x клікова для всіх $x \in A$;

Другий результат з [5] є простим наслідком з наступної теореми.

Теорема 4. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метричний простір і функція $f : X \times Y \to Z$ сукупно клікова. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що функці f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f симетрично клікове відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є симетрично кліковим відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$, $V(x)$ відповідно точок x в X, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії в X.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – база простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E_2 : y_x \in V_n \subseteq V(x)\}, n \in \mathbb{N}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E_2$. Оскільки множина E_2 другої категорії в X, то існує число n_0, таке, що множина A_{n_0} щільна в деякій відкритій множині G в X. Візьмемо точку $x_0 \in A_{n_0}$. Оскільки функція f сукупно клікова, то існують відкриті непорожні множини U в X і V в Y, такі, що $U \times V \subseteq G \times V_{n_0}$ і $\omega_f(U \times V) < \varepsilon$. Оскільки $U \cap A_{n_0} \neq \emptyset$, то одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне.

5. Ще С.Кемпістий в [6] відзначав, що нарізно квазінеперервна функція на добутку паралелепіпедів є сукупно квазінепервною. А коли функція сукупно квазінеперервна, то, як було зазначено вище, у неї існує багато вертикалей, в точках яких вона симетрично квазінеперервна. Однак для нарізно клікових функцій подібного результату немає, але має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай простір X має зліченну псевдо базу, Y – берівський простір, який має зліченну псевдо базу, Z – меричний простір і функці $f : X \times Y \to Z$ клікова відносно першої змінної і квазінеперервна відносно другої змінної. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Нехай $|\circ - \circ|$ метрика в просторі Z, яка породжує його топологію. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існують $U(x), V(x)$ відповідно точок x в X, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $|f(p) - f(p_x)| \geq \varepsilon$ для деякого $p \in U \times V$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – псевдо база простору Y. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E_2 : V_n \subseteq V(x), \\ \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \tfrac{\varepsilon}{4}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E_2$, бо відображення f^x квазінеперервне для кожного x. Оскільки множина E_2 другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} щільна в деякій відкритій множині G в $\mathbb{R}$.

Нехай $\{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ – псевдо база простору X. Розглянемо множини

$$B_m = \{y \in V_{m_0} : U_m \subseteq G, \omega_{f_y}(U_m) < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Оскільки простір Y берівський, то множина V_{n_0} другої категорії. Через те, що функція f_y клікова для кожного $y \in Y$, то існує номер m_0, такий, що множина B_{m_0} щільна в деякій відкритій множині H, $H \subseteq V_{n_0}$. Візьмемо точку $x_0 \in U_{m_0} \cap A_{n_0}$ і точку $p = (x, y) \in U_{m_0} \times H$. Оскільки відображення f^x квазінеперервне, то існує точка $y' \in B_{m_0} \cap H$, що $|f^x(y) - f^x(y')| < \frac{\varepsilon}{4}$. Тоді

$$|f(p) - f(x_0, y_{x_0})| \leq |f(p) - f(x, y')| + \\ + |f(x, y') - f(x_0, y')| + |f(x_0, y') - f(x_0, y_{x_0})| < \\ < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

А це суперечить тому, що $x_0 \in A_{n_0} \subseteq E_2$. Отже, наше припущення хибне.

5. В цьому пункті ми покажемо істотність деяких умов на простори у вище згаданих теоремах. Спочатку встановимо, що умова зліченності простору Y в усіх теоремах є істотною.

Приклад 1. Розглянемо у ролі простору Y банаховий простір l_∞ всіх обмежених послідовностей дійсних чисел. Простір l_∞ не має зліченної псевдо бази. Нехай T – система всіх непорожніх підмножин натурального ряду і $e_\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – характеристична функція множини $\tau \in T$. Як добре відомо, існує бієкція $\tau \to x_\tau$ множини T на числову пряму $\mathbb{R}$. Позначимо через V_τ кулю радіуса $\frac{1}{3}$ з центром в точці e_τ в банаховому просторі l_∞. Покладемо $U_\tau = [x_\tau, +\infty)$, $E = \bigcup\limits_{\tau \in T} (U_\tau \times V_\tau)$ і нехай $f : \mathbb{R} \times l_\infty \to \mathbb{R}$ – характеристична функція множини E. Оскільки $e_{\tau'} \neq e_{\tau''}$ для $\tau' \neq \tau''$, то множини $(U_{\tau'} \times V_{\tau'}) \cap (U_{\tau''} \times V_{\tau''}) \neq \emptyset$ для $\tau' \neq \tau''$. Тоді всі вертикальні перерізи $f^x : l_\infty \to \mathbb{R}$ і всі горизонтальні перерізи $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – квазінеперервні. Крім того, функція f є квазінеперервною (а значить кліковою і ледь неперервною) за сукупністю змінних. Однак функція f не є ні симетрично майже квазінеперервною, ні симетрично майже ледь неперервною, ні симетрично кліковою відносно x в точках (x_τ, τ).

Цей приклад показує істотність умови зліченності простору Y в теоремах 2, 3, 4 і 5.

Запропонована конструкція подібна до відповідних прикладів з [7] [8].

Наступний приклад показує, що умова зліченності простору Y є істотною в усіх теоремах.

Приклад 2. Нехай Y – пряма сума континумума числових прямих. Будуємо відображення $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, як склейку функцій $g^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, де

$$g^t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{якщо } t \leq x, y \in \mathbb{R}, \\ 0, \text{ в інших точках } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Функція f буде квазінеперервною за сукупністю змінних. Функції f_y квазінеперервні для всіх $y \in Y$, а функції f^x неперервні для всіх $x \in \mathbb{R}$. Однак на кожній вертикалі $\{x\} \times Y$ є точки, в яких функція f не є симетрично майже ледь неперервною відносно x, а також не є симетрично кліковою відносно x.

Цей приклад показує істотність умови зліченності простору Y в усіх теоремах.

Ідея такої конструкції запозичена з [9].

Тепер покажемо істотність умови другої аксіоми зліченності на простір Z в теоремах 1, 2 та 3.

Приклад 3. Нехай відображення $f : \mathbb{R}^2 \to l_\infty$ визначається так: $f(x_\tau, y) = e_\tau$, де $(x_\tau, y) \in \mathbb{R}$. Для кожного $x = x_\tau \in \mathbb{R}$ функція f^{x_τ} є сталою, а отже, неперервною. Однак функція f не є навіть сукупно майже ледь неперервною, бо для довільної точки (x_τ, y) прообраз кулі $W_{\frac{1}{3}}(f(x_\tau, y))$ радіуса $\frac{1}{3}$ є множина $x_\tau \times \mathbb{R}$, яка не є відкритою множиною в $\mathbb{R}^2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Piotrowski Z. A survey of results concerning generalized continuity in topological spaces// Acta Math. Comen.– 1987. – 52-53. – P. 91-110.

2. Nesterenko V. On two classes of functions with the Hahn property// International Conference "Analysis and Topology, June 2 - 7, 2008", Part II. Topology./ Theses of lectures. - Lviv, 2008. - P. 45 - 46.

3. Маслюченко В., Михайлюк В., Нестеренко В. Симетрична квазінеперервність сукупно квазінеперервних функцій // Математичні Студії. – 1999. – Т. 11, № 2. – С. 204 - 208.

4. Нестеренко В. Про одну характеризацію сукупної квазінеперервності // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 336 - 337. Математика. - Чернівці: Рута. - 2007, - С. 137 - 141.

5. Kotlicka E., Maliszewski A. On quasi-continuity and cliquishness of sections of functions of two variables// Tatra Mt. Math. Publ. – 2002. – 24.– P. 105 - 108.

6. Kempisty S. Sur les fuctions quasicontinues // Fund. Math. – 1932. – 19. – P. 184 - 197.

7. Вітренко О., Маслюченко В. Про ледь неперервні функції // Мат. Студії. – 1996. – Т. 6, – С. 113 - 118.

8. Нестеренко В.В. Різні типи квазінеперервності та їх застосування: дис. канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 111 с.

9. Piotrowski Z. Separate and joint continuity // Real Anal. Exch. - 1985 - 1986. - 11, N 2. - P.293-322.