УДК 517.53

©2009 р. О.М. Мулява, М.М. Шеремета

Київський національний університет харчових технологій
Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ ПОХІДНОЇ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Для цілих та аналітичних в одиничному крузі функцій досліджено належність похідних Гельфонда-Леонтьєва до класів збіжності.

For entire and analytic functions in the unit disk the belonging of Gelfond-Leont'ev derivatives to convergence classes is investigated.

1. Вступ. Для $0 < R \le \infty$ нехай $A(R)$ - клас аналітичних функцій f, зображених степеневими рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

з радіусом збіжності $R[f] = R$, а $A(0)$ - клас формальних степеневих рядів. Будемо говорити, що $f \in A^+(R)$, $0 \le R \le \infty$, якщо $f \in A(R)$ і $f_k > 0$ для всіх $k \ge 0$. Для $f \in A(0)$ і $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд

$$D_l^1 f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+1}} f_{k+1} z^k \tag{2}$$

називається [1] похідною Гельфонда-Леонтьва. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^1 f(z) = f'(z)$ - звичайна похідна. Для $f \in A(R)$ і $0 \le r < R$, приймемо $M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і нехай $\mu(r,f) = \max\{|f_k| r^k : k \ge 0\}$ - максимальний член ряду (1).

Якщо f - ціла функція (тобто $f \in A(+\infty)$), то величина $\varrho = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}$ називається її порядком, а за умови $0 < \varrho < +\infty$ вважається, що f належить до класу збіжності, якщо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M(r,f)}{r^{\varrho+1}} dr < +\infty. \tag{3}$$

Введений так Ж. Валіроном [2] клас збіжності неодноразово узагальнювався. Зокрема, узагальнений $\alpha\beta$-клас збіжності визначається [3 - 4] умовою

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty, \tag{4}$$

де функції α і β додатні, неперервні і зростають до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$. Відомим [5 - 6] також є Φ-клас збіжності, який визначається умовою

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r)\ln M(r,f)}{r\Phi^2(\ln r)} dr < +\infty, \tag{5}$$

де функція Φ додатна, опукла і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$.

Якщо функція f аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}$ (тобто $f \in A(1)$), то порядок переважно вводять за формулою $\varrho = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \frac{\ln\ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}$, а клас збіжності (при $0 < \varrho < +\infty$) – за умовою [7]

$$\int_{0}^{1} (1-r)^{\varrho-1} \ln^+ M(r,f) dr < +\infty. \tag{6}$$

За означенням аналітична в $\mathbb{D}$ функція f належить до узагальненого $\alpha\beta$-класу збіжності [3], якщо

$$\int_{r_0}^{1} \frac{\alpha(\ln^+ M(r,f))}{\beta(\frac{1}{1-r})} dr < +\infty, \tag{7}$$

де функції α і β такі, як вище. Φ-клас збіжності нам буде вигідно визначити умовою

$$\int_{r_0}^{1} \frac{\Phi'(\ln r) \ln^+ M(r,f)}{r\Phi^2(\ln r)} dr < +\infty, \tag{8}$$

де функція Φ додатна, опукла і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$.

Метою запропонованої замітки є дослідження умов на послідовність (l_k), за яких належність функції f до того чи іншого класу збіжності рівносильна належності до цього ж класу збіжності її похідної Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$.

Зрозуміло, що $D_l^1 f \in A(R)$, $0 < R \le +\infty$, не для кожної функції $f \in A(R)$, і навпаки. Тому спочатку дослідимо умови на (l_k), за яких рівності $R[f] = R$ і $R[D_l^1 f] = R$ є еквівалентними.

2. Аналітичність похідної Гельфонда-Леонтьєва.

Почнемо з цілих функцій.

Теорема 1. *Для того, щоб для кожного ряду (1) рівності* $R[f] = +\infty$ *і* $R[D_l^1 f] = +\infty$ *були рівносильними, необхідно і досить, щоб*

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \le \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} < +\infty. \tag{9}$$

Доведення. Використовуючи формулу Коші-Адамара, неважко показати, що для радіусів збіжності рядів (1) і (2) правильні нерівності $R[D_l^1 f] \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \le$ $\le R[f] \le R[D_l^1 f] \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}$, звідки з огляду на (9) випливає, що рівності $R[f] = +\infty$ і $R[D_l^1 f] = +\infty$ є рівносильними.

Припустимо тепер, що $\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = +\infty$, тобто не виконується друга з умов (9). Тоді існують зростаюча послідовність (k_n) натуральних чисел і послідовність $(\varkappa_n)$ додатних чисел такі, що $\varkappa_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ і $l_{k_n}/l_{k_n+1} = \varkappa_n^{k_n}$ для $n \ge 1$. Приймемо $f_{k_n+1} = \varkappa_n^{-(k_n+1)/2}$ і $f_k = 0$ для $k \ne k_n + 1$. Тоді $\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[k_n+1]{|f_{k_n+1}|} = \varlimsup_{n\to\infty} \varkappa_n^{-1/2} = 0$, тобто $f \in A(+\infty)$, а з іншого боку, $\sqrt[k_n]{\frac{l_{k_n}}{l_{k_n+1}} f_{k_n+1}} = \varkappa_n^{(k_n-1)/(2k_n)} \to +\infty$ при $n \to +\infty$, тобто $D_l^1 f \notin A(+\infty)$.

Якщо не виконується перша з умов (9), тобто існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\sqrt[k_j]{l_{k_j}/l_{k_j+1}} = \varepsilon_j \to 0\,(j \to \infty)$, то приймемо $f_{k_j+1} = \varepsilon_j^{-(k_n+1)/2}$ і $f_k = 0$ для $k \ne k_j + 1$. Тоді $\sqrt[k_j+1]{|f_{k_j+1}|} = \varepsilon_j^{-1/2} \to +\infty$ і $\sqrt[k_j]{\frac{l_{k_j}}{l_{k_j+1}} |f_{k_j+1}|} \to 0$ при $j \to \infty$, тобто $D_l^1 f \in A(+\infty)$ і $f \notin A(+\infty)$. Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер питання про аналітичність похідної Гельфонда-Леонтьєва в одиничному крузі (загальний випадок $0 < R[f] < +\infty$ зводиться до випадку $R[f] = 1$ простою заміною).

Теорема 2. *Для того, щоб для кожного ряду (1) рівності* $R[f] = 1$ *і* $R[D_l^1 f] = 1$ *були рівносильними, необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = 1. \tag{10}$$

Доведення. За умовою (10) $\frac{1}{R[D_l^1 f]} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}|} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_{k+1}|} = \frac{1}{R[f]}$, тобто ця умова є достатньою. Якщо вона не виконується, то існує зростаюча послідовність (k_n) натуральних чисел така, що $\sqrt[k_n]{l_{k_n}/l_{k_n+1}} \to q \ne 1$ при $n \to \infty$. Приймаючи $f_{k_n+1} = 1$ і $f_k = 0$ для $k \ne k_n + 1$ $(n \ge 1)$, отримуємо $R[f] = 1$ і $R[D_l^1 f] = 1/q \ne 1$, а якщо приймемо $f_{k_n+1} = l_{k_n+1}/l_{k_n}$ і $f_k = 0$ для $k \ne k_n + 1$ $(n \ge 1)$, то одержимо $R[D_l^1 f] = 1$ і $R[f] = q \ne 1$, тобто умова (10) є необхідною. Теорему 2 доведено.

3. Належність похідної Гельфонда-Леонтьєва цілої функції до класу збіжності.

З умови (9) випливає існування чисел

$0 < q_1 \le q_2 < +\infty$ таких, що $q_1^k \le l_k/l_{k+1} \le q_2^k$ для всіх $k \ge 0$. Тому

$$r\mu(r, D_l^1 f) = \max\left\{\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|r^{k+1} : k \ge 0\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{q_2}\max\{|f_{k+1}|(q_2 r)^{k+1} : k \ge 0\} \le \frac{\mu(q_2 r, f)}{q_2}$$

і, подібно,

$$r\mu(r, D_l^1 f) \ge \frac{1}{q_1}\max\{|f_{k+1}|(q_1 r)^{k+1} : k \ge 0\} \ge$$

$$\ge \frac{\mu(q_1 r, f)}{q_1}$$

для всіх досить великих r, бо $\mu(r, f) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ і тому $\mu(r, f) = \max\{|f_0|, \max\{|f_k|r^k : k \ge 1\}\} = \max\{|f_{k+1}|r^{k+1} : k \ge 0\}$ для великих r. Отже, $\ln \mu(q_1 r, f) - \ln q_1 \le \ln \mu(r, D_l^1 f) + \ln r \le \ln \mu(q_2 r, f) - \ln q_2$ для всіх досить великих r і, оскільки для цілих функцій $\ln r = o(\ln \mu(r, f))$ при $r \to +\infty$, то

$$(1 + o(1)) \ln \mu(q_1 r, f) \le \ln \mu(r, D_l^1 f) \le$$

$$\le (1 + o(1)) \ln \mu(q_2 r, f), \quad r \to +\infty. \qquad (11)$$

З іншого боку, враховуючи нерівність Коші, маємо

$$\mu(r, f) \le M(r, f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|f_k|(2r)^k \le 2\mu(2r, f). \qquad (12)$$

Використовуючи нерівності (11) і (12), доведемо тепер наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай α і β - додатні неперервні зростаючі до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функції такі, що $\alpha((1 + o(1))x) = O(a(x))$ і $\beta((1 + o(1))x) = O(\beta(x))$ при $x \to +\infty$. Тоді, якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (9), то ціла функція f і її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належать чи не належать до $\alpha\beta$-класу збіжності (визначеного умовою (4)) одночасно.*

Доведення. З (12), завдяки умовам теореми,

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr \le \int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr \le$$
$$\le \int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(2r,f) + \ln 2)}{r\beta(\ln r)} dr \le K_1 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(2r,f))}{2r\beta(\ln 2r - \ln 2)} d2r \le$$
$$\le K_2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr,$$

(тут і надалі через K_j позначатимемо додатні сталі), тобто інтеграли $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr$ і $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr$ збіжні чи розбіжні одночасно. Зрозуміло, що в останньому твердженні замість f можна поставити $D_l^1 f$. З іншого боку, використовуючи (11), подібно можна показати, що інтеграли $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r,f))}{r\beta(\ln r)} dr$ і $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r,D_l^1 f))}{r\beta(\ln r)} dr$ збіжні чи розбіжні одночасно. Теорему 3 доведено.

Легко перевірити, що функції $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = e^{\varrho x}$ задовольняють умови теореми 3. Тому правильне наступне тверджєення.

Наслідок 1. *Якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (9), то ціла функція f належить до (валіронового) класу збіжності тоді і тільки тоді, коли її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належить до цього ж класу збіжності.*

Припустимо тепер, що послідовність (l_k) задовольняє умову

$$0 < p_1 \le l_k/l_{k+1} \le p_2 < +\infty \quad (k \ge 0). \qquad (13)$$

Тоді, як вище,

$$p_1 \mu(r, f) \le r\mu(r, D_l^1 f) \le p_2 \mu(r, f) \qquad (14)$$

для всіх досить великих r. Викоистовуючи ці нерівності і дещо уточнюючи праву нерівність (12), можна у теоремі 3 послабити умови на функції α і β. На цьому зупинятися не будемо, а застосуємо (14) до дослідження надежності до Φ-класу збіжності.

Теорема 4. *Нехай функція Φ додатна, необмежена на $(-\infty, +\infty)$ і така, що її похідна Φ' неперервно диференційовна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Припустимо, що*

$$\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\sigma)\ln \Phi'(\sigma)}{\Phi^2(\sigma)} d\sigma < +\infty. \qquad (15)$$

Тоді, якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (13), то ціла функція f та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належать чи не належать до Φ-класу збіжності (визначеного умовою (5)) одночасно.

Доведення. В [6] доведено, що за умови (15) інтеграли $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r)\ln M(r,f)}{r\Phi^2(\ln r)}dr$ і $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r)\ln \mu(r,f)}{r\Phi^2(\ln r)}dr$ збіжні чи розбіжні одночасно, а оскільки згідно з (14) $\ln \mu(r, D_l^1 f) = \ln \mu(r,f) + O(\ln r) = (1+o(1))\ln \mu(r,f)$ при $r \to +\infty$, то звідси випливає, що (5) виконується тоді і тількт тоді, коли $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r)\ln M(r,D_l^1 f)}{r\Phi^2(\ln r)}dr < +\infty$. Теорему 4 доведено.

4. Належність похідної Гельфонда-Леонтьєва аналітичної в крузі функції до класу збіжності. Умова (9), яка є необхідною і достатньою для того, щоб f і $D_l^1 f$ були цілими одночасно, є також і достатньою, як видно з наслідку 1, і для того, щоб вони належали одночасно до валіронового класу збіжності. Проте умова (10), яка є необхідною і достатньою для того, щоб f і $D_l^1 f$ належали одночасно до $A(1)$, недостатня для того, щоб ці функції належали одночасно до класу збіжності, визначеного умовою (6). Навіть порядки функцій f і $D_l^1 f$ можуть бути різними.

Справді, добре відомо, що порядок ϱ аналітичної в одиничному крузі функції (1) обчислюється за формулою $\varrho = \frac{\gamma}{1-\gamma}$, де $\gamma = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |f_k|}{\ln r}$. Тому, якщо приймемо $f_k = \exp\{k^\gamma\}, 0 < \gamma < 1$, а послідовність (l_k) виберемо так, щоб $l_k/l_{k+1} = \exp\{(k+1)^\delta\}$, $\gamma < \delta < 1$, для всіх $k \ge 0$, то $\frac{l_k}{l_{k+1}} f_{k+1} = \exp\{(1+o())(k+1)^\delta\}$ при $k \to \infty$ і, отже, порядок функції f дорівнює $\gamma/(1-\gamma)$, а функції $D_l^1 f$ він дорівнює $\delta/(1-\delta) > \gamma/(1-\gamma)$.

Звідси випливає, що у випадку аналітичних в одиничному крузі функцій потрібно, щоб послідовність (l_k) задовольняла сильнішу ніж (10) умову. Будемо вважати тут, що послідовність (l_k) задовольняє умову (13). Тоді з (14) випливає, що

$$\ln \mu(r, D_l^1 f) = \ln \mu(r,f) + O(1), \quad r \uparrow 1, \qquad (16)$$

і отже, з огляду на нерівність Коші $\mu(r,f) \le M(r,f)$, залишається оцінити $M(r,f)$ через $\mu(r,f)$ зверху. Найпростішою з таких оцінок є

$$M(r,f) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \left(\frac{1+r}{2}\right)^k \left(\frac{2r}{1+r}\right)^k \le$$

$$\le \mu\left(\frac{1+r}{2}\right)\frac{1+r}{1-r},$$

звідки

$$\ln \mu(r,f) \le \ln M(r,f) \le \ln \mu\left(\frac{1+r}{2}\right) +$$

$$+ \ln \frac{2}{1-r}. \qquad (17)$$

(Зауважимо, що позбутися доданка $\ln \frac{1}{1-r}$ у правому боці (17) не можна, на що вказує приклад функції $f(z) = \frac{1}{1-z}$, для якої $M(r,f) = \frac{1}{1-r}$ і $\mu(r,f) = 1$). Надалі вважатимемо, що $\mu(r,f) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow 1$, тобто $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f_k| = +\infty$. Використовуючи (16) і (17), неважко довести наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай функція α додатна, неперервна, зростає до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ і $\alpha(2x) = O(a(x))$ при $x \to +\infty$, а β додатна, неперервна на $[0,+\infty)$ і $\beta(2x) \asymp \beta(x)$ при $x \to +\infty$. і Припустимо, що*

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\alpha(\ln x)}{x^2\beta(x)} dx < +\infty. \qquad (18)$$

Тоді, якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (13), то аналітична в одиничному *крузі функція f і її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належать чи не належать до $\alpha\beta$-класу збіжності (визначеного умовою (7)) одночасно.*

Доведення. Оскільки $\alpha(2x) \le K_1 a(x)$ для всіх $x \ge 0$, то

$$\begin{aligned}&\alpha\left(\ln^+ \mu\left(\tfrac{1+r}{2}, f\right) + \ln \tfrac{2}{1-r}\right) \le \\ &\le \alpha\left(2\max\left\{\ln^+ \mu\left(\tfrac{1+r}{2}, f\right), \ln \tfrac{2}{1-r}\right\}\right) \le \\ &\le K_1\alpha\left(\max\left\{\ln^+ \mu\left(\tfrac{1+r}{2}, f\right), \ln \tfrac{2}{1-r}\right\}\right) = \\ &= K_1 \max\left\{\alpha\left(\ln^+ \mu\left(\tfrac{1+r}{2}, f\right)\right), \alpha\left(\ln \tfrac{2}{1-r}\right)\right\} \le \\ &\le K_1\left(\alpha\left(\ln^+ \mu\left(\tfrac{1+r}{2}, f\right)\right) + \alpha\left(\ln \tfrac{2}{1-r}\right)\right).\end{aligned}$$

Тому з (17), (18) і умови $\beta(2x) \asymp \beta(x)$, $x \to +\infty$, маємо

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr \le \int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ M(r,f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr \le \\ &\le K_1 \int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu\left(\frac{1+r}{2}, f\right)}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr + K_2 \int_0^1 \frac{\alpha(\ln \frac{1}{1-r})}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr = \\ &= 2K_1 \int_{1/2}^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,f))}{\beta(\frac{1}{2(1-r)})}dr + K_2 \int_1^\infty \frac{\alpha(\ln x)}{x^2\beta(x)}dx \le \\ &\le K_3 \int_{1/2}^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,f))}{\beta(\frac{1}{2(1-r)})}dr + K_4,\end{aligned}$$

тобто інтеграли $\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr$ і $\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ M(r,f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr$ збіжні чи розбіжні одночасно. Таке ж твердження правильне щодо інтегралів $\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,D_l^1 f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr$ і $\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ M(r,D_l^1 f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr$, а з огляду на (16) і щодо інтегралів $\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr$ і $\int_0^1 \frac{\alpha(\ln^+ \mu(r,D_l^1 f))}{\beta(\frac{1}{1-r})}dr$. Теорему 5 доведено.

Якщо виберемо $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = x^{\varrho-1}$, то отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 2. *Якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (13), то аналітична в одиничному крузі функція f належить до класу збіжності (визначеного умовою (6)) тоді і тільки тоді, коли її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належить до цього ж класу.*

Для дослідження належності функцій f і $D_l^1 f$ до Φ-класу збіжності, визначеного умовою (8), використаємо один результат з [8]. Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [8] функція Ψ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що і обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до 0 на $(-\infty, 0)$. Припустимо, що ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \quad (19)$$

де (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, має нульову абсцису абсолютної збіжності, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\}$ - його максимальний член. Тоді правильна наступна лема [8].

Лема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$. Для того щоб $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, необхідно і досить, щоб $\ln |f_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$.*

Використовуючи цю лему, тепер доведемо наступну теорему.

Теорема 6. *Нехай функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що $\Phi'(\sigma) \ge \frac{2}{|\sigma|}$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ і*

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\sigma) \ln \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma/2))}{\Phi^2(\sigma)} d\sigma < +\infty. \quad (20)$$

Тоді, якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (13), то аналітична в одиничному крузі функція f та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належать чи не належать до Φ-класу збіжності (визначеного умовою (8)) одночасно.

Доведення. З огляду на (16) і нерівність

Коші досить довести, що якщо

$$\int_{r_0}^{1} \frac{\Phi'(\ln r)\ln^+ \mu(r,f)}{r\Phi^2(\ln r)}dr < +\infty, \tag{21}$$

то виконується умова (8). Але з (21) випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $r \in [r^*(\varepsilon), 1)$

$$\varepsilon > \ln^+ \mu(r,f) \int_{r}^{1} \frac{\Phi'(\ln t)}{t\Phi^2(\ln t)}dt = \frac{\ln^+ \mu(r,f)}{\Phi(\ln r)},$$

тобто можемо вважати, що $\ln \mu(r,f) \le \Phi(\ln r)$ для всіх $r \in [r_0, 1)$. Якщо в ряді (1) зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд Діріхле (19) з $\lambda_n = n$, причому $r = e^\sigma$ і $\mu(\sigma, F) = \mu(r,f)$. Тому за лемою 1 $\ln |f_n| \le -n\Psi(\varphi(n))$ для всіх $n \ge n_0$ і

$$M(r,f) \le \sum_{n<\Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2))} |f_n|r^n +$$

$$+ \sum_{n\ge\Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2))} |f_n|r^n \le$$

$$\le \mu(r,f)\Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2)+$$

$$+ \sum_{n\ge\Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2))} \exp\{-n\Psi(\varphi(n)) + n\ln r\} \le$$

$$\le \mu(r,f)\Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2)+$$

$$+ \sum_{n\ge\Phi'(\Psi((\ln r)/2))} \exp\{-n\Psi(\varphi(n))+$$

$$+2n\Psi(\varphi(n))\} \le \mu(r,f)\Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2)+$$

$$+ \sum_{n\ge\Phi'(\Psi((\ln r)/2))} \exp\{n\Psi(\varphi(n))\} \tag{22}$$

для всіх досить близьких до 1 значень $r < 1$. Але з умови $\Phi'(\sigma) \ge \frac{2}{|\sigma|}$, $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, випливає, що $\varphi(x) \le -\frac{2}{x}$, $x \ge x_0$, і, оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = (x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, то $x\Psi(\varphi(x)) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt + x_0\Psi(\varphi(x_0)) \le -2\ln x + \mathrm{const}$, звідки випливає, що ряд $\sum_{n\ge n_0} \exp\{n\Psi(\varphi(n))\}$ збіжний, а з (22) отримуємо

$$\ln M(r,f) \le \ln \mu(r,f) + \ln \Phi'(\Psi^{-1}((\ln r)/2)+$$

$$+o(1), \quad r \uparrow 1.$$

Звідси і з умови (20) випливає (8). Теорему 6 доведено.

5. Зауваження та доповнення. Універсальність умови (13) полягає у тому, що її можна використовувати у доведенні теорем про належність похідної Гельфонда-Леонтьєва аналітичної в одиничному крузі фукції до різних класів збіжності. Для кожного конкретного вибору класу збіжності цю умову можна послабити. Наприклад, умову (13) не задовольняє послідовність $l_k = 1/k!$, а у цьому випадку похідна Гельфонда-Леонтьєва є звичайною похідною і, використовуючи інтегральну формулу Коші, неважко показати, що аналітична в одиничному крузі функція f належить до визначеного умовою (6) класу збіжності тоді і тільки тоді, коли її похідна f' належить до цього ж класу. Це твердження є правильним і для інших похідних Гельфонда-Леонтьєва, на що вказує наступне узагальнення наслідку 2.

Теорема 7. *Якщо послідовність (l_k) задовольняє умови а) $l_1 \le l_0$, б) $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2} \nearrow 1$ при $k \to \infty$ і в) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k-1}}{l_k}\right)^{\varrho+1} < +\infty$, то аналітична в одиничному крузі функція f належить до класу збіжності (визначеного умовою (6)) тоді і тільки тоді, коли її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^1 f$ належить до цього ж класу.*

Доведення. З умов а) і б) випливає, що $1 \le \frac{l_0}{l_1} \le \dots \le \frac{l_{k-1}}{l_k} \le \frac{l_k}{l_{k+1}} \le \dots$, тобто виконується перша з умов (13). Тому, як вище, з належності $D_l^1 f$ до класу збіжності випливає належність f до цього ж класу.

З іншого боку, нехай $\hat{f}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k z^k$ – мажоранта Ньютона аналітичної в одиничному крузі функції (1). Тоді з огляду на умову $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f_k| = +\infty$ маємо $|f_k| \le \hat{f}_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, $\hat{f}_k/\hat{f}_{k+1} \nearrow 1$ $(k \to \infty)$ і $\mu(r,f) = \mu(r,\hat{f})$. Але [3, 7] правильним є таке твердження: для того, щоб $\int\limits_0^1 (1 - r)^{\varrho-1} \ln^+ \mu(r,\hat{f})dr < +\infty$, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln \hat{f}_k}{k}\right)^{\varrho+1} < \infty. \qquad (23)$$

Отже, з (6) випливає (23). Далі, як вище,

$$r\mu(r, D_l^1 f) = \max\left\{\frac{l_k}{l_{k+1}}|f_{k+1}|r^{k+1} : k \geq 0\right\} \leq$$

$$\leq \hat{\mu}(r) = \max\left\{\frac{l_k}{l_{k+1}}\hat{f}_{k+1}r^{k+1} : k \geq 0\right\},$$

тобто треба довести, що $\int\limits_0^1 (1 - r)^{\varrho-1}\ln^+ \hat{\mu}(r)dr < +\infty$. Але з умови б) випливає, що $\left(\frac{l_{k-1}}{l_k}\hat{f}_k\right) / \left(\frac{l_k}{l_{k+1}}\hat{f}_{k+1}\right) \nearrow 1$ при $k \to \infty$, і отже залишилось показати, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{l_{k-1}}{l_k}\hat{f}_k\right)\right)^{\varrho+1} < \infty. \qquad (24)$$

Використовуючи нерівність $(a+b)^{\varrho+1} \leq 2^{\varrho+1}(a^{\varrho+1}+b^{\varrho+1})$, неважко показати, що (24) випливає (23) та умови б). Теорему 7 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб.- 1957. - Т.23, N 3. - С.477-500.

2. *Valiron G.* General theory of integral functions. - Toulouse. - 1923. - 382 p.

3. *Мулява О.М.* Класи збіжності в теорії рядів Діріхле // Доповіді НАН України, сер. А. - 1999. - N.3. - С.33-39.

4. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. матем. журн. - 1999. - Т. 51, N.11. - С.1485-1494.

5. *Mulyava O.M., Sheremeta M.M.* On a convergence class for Dirichlet series // Bull. Soc. Sci. Lettr. Lodz. - 2000. - V.50. - P.23-30.

6. *Filevych P.V., Sheremeta M.M.* On a convergence class for entire functions // Bull. Soc. Sci. Lettr. Lodz. - 2003. - V.53. - P.5-16.

7. *Галь Ю.М., Шеремета М.Н.* Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Доклады АН УССР, сер. А. - N 7. - С.11-14.

8. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39, N 1. – С. 206-223.