УДК 517.926

©2009 р. Д.О.Мігуца

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ З ОДНОЗНАЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ВІДНОСНО НЕГОЛОВНИХ ОСЕЙ ІНЕРЦІЇ

Досліджуються рівняння руху твердого тіла з однозначними інтегралами використовуючи метод малого параметру.

The equations of the motions of a solid with the simple integrals are researched, using the method of the small parameter.

У даній роботі розглянемо застосування методу малого параметру до дослідження руху твердого тіла по відношенню до неголовних осей інерції тіла.

Для проведення дослідження даного руху введемо нерухому систему координат $Ox_1y_1z_1$, з початком в нерухомій точці O, і рухому систему координат $Oxyz$ з початком в тій же точці O, яка незмінно зв'язана з твердим тілом і має вісі, що не направлені по головних вісях інерції твердого тіла. Нерухому систему координат розташуємо так, щоб вісь Ox_1 була направлена по вертикалі вниз. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 – напрямні косинуси осі Ox_1 відносно рухомих осей. Оскільки рухомі осі Ox, Oy, Oz не направлені по головних вісях інерції твердого тіла, то вектор кінетичного моменту $\overrightarrow{G}$ тіла і вектор кутової швидкості $\overrightarrow{\omega}$ обертання твердого тіла навколо нерухомої точки будуть визначатися за формулами:

$$\overrightarrow{G} = G_x\overrightarrow{i} + G_y\overrightarrow{j} + G_z\overrightarrow{k}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{\omega} = \omega_x\overrightarrow{i} + \omega_y\overrightarrow{j} + \omega_z\overrightarrow{k}, \qquad (2)$$

де

$$G_x = Ap - Fq - Er, G_y = -Fp + Bq - Dr,$$

$$G_z = -Ep - Dq + Cr, \qquad (3)$$

$$\omega_x = p, \ \ \omega_y = q, \ \ \omega_z = r, \qquad (4)$$

де A, B, C – центральні моменти інерції тіла; F, E, D – відцентрові моменти інерції тіла; $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ – одиничні орти осей рухомої системи координат; p, q, r – проекції вектора кутової швидкості обертання тіла.

Нехай центр мас рухомого тіла розташований в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, де x_0, y_0, z_0 – координати центра мас тіла в рухомій системі координат. Оскільки сила тяжіння $\overrightarrow{P}$ направлена по вертикалі вниз, то вона визначається таким співвідношенням:

$$\overrightarrow{P} = Mg(\gamma_1\overrightarrow{i} + \gamma_2\overrightarrow{j} + \gamma_3\overrightarrow{k}), \qquad (5)$$

де M – маса тіла, а g – прискорення земного тяжіння.

Момент $\overrightarrow{L}$ сили $\overrightarrow{P}$ визначається за формулою:

$$L = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ Mg\gamma_1 & Mg\gamma_2 & Mg\gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= Mg\overrightarrow{i}(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2) + Mg\overrightarrow{j}(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_2) +$$
$$+ Mg\overrightarrow{k}(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1). \qquad (6)$$

Для одержання динамічних рівнянь руху твердого тіла навколо нерухомої точки застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту системи, тобто

$$d\overrightarrow{G}/dt = \overrightarrow{L}, \qquad (7)$$

де $d\overrightarrow{G}/dt$ – абсолютна похідна від вектора кінетичного моменту в нерухомій системі координат. В рухомій системі координат рівняння (7) набуває вигляду

$$d\widetilde{\overrightarrow{G}}/dt + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{G} = \overrightarrow{L}, \qquad (8)$$

де $d\widetilde{\overrightarrow{G}}/dt$ – локальна похідна.

Якщо підставити (1), (2) і (6) у рівняння (8) з врахуванням співвідношень (3), (4) і спроектувати одержане рівняння на осі Ox, Oy і Oz, то рівняння руху твердого тіла навколо нерухомої точки в неголовних осях інерції приймуть вигляд [4, 5]:

$$\begin{gathered}
Adp/dt-Fdq/dt-Edr/dt+(C-B)qr+Fpr- \\
-Epq+D(r^2-q^2)=Mg(y_0\gamma_3-z_0\gamma_2), \\
-Fdp/dt+Bdq/dt-Ddr/dt+(A-C)pr- \\
-Fqr+Dpq+E(p^2-r^2)=Mg(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3), \\
-Edp/dt-Ddq/dt+Cdr/dt+(B-A)qp- \\
-Dpr+Erq+F(r^2-q^2)=Mg(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1).
\end{gathered} \tag{9}$$

Система рівнянь (9) складає першу групу основних динамічних рівнянь руху тіла навколо нерухомої точки. В одержану систему диференціальних рівнянь входять шість невідомих функцій γ_1, γ_2, γ_3, p, q, r, які залежать від змінної t. Для визначеності приведеної задачі необхідно отримати ще три рівняння, в які би входили шукані функції. Для їх складання орт $\overrightarrow{\xi}_0$ направимо вздовж нерухомої осі Ox_1, тоді

$$\overrightarrow{\xi}_0=\overrightarrow{i}\gamma_1+\overrightarrow{j}\gamma_2+\overrightarrow{k}\gamma_3. \tag{10}$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{\xi}_0$ нерухомий, то абсолютна похідна від нього дорівнює нулю. Використовуючи означення локальної похідної, одержимо

$$d\overrightarrow{\xi}_0/dt+\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{\xi}_0=0. \tag{11}$$

Якщо врахувати для $\overrightarrow{\xi}_0$ розклад (10), то рівняння (11) в проекціях на осі рухомої системи координат $Oxyz$ приймуть вигляд:

$$\begin{gathered}
d\gamma_1/dt=r\gamma_2-\gamma_3q, d\gamma_2/dt=p\gamma_3-\gamma_1r, \\
d\gamma_3/dt=q\gamma_1-\gamma_2p.
\end{gathered} \tag{12}$$

Таким чином, визначення положення тіла, що має нерухому точку, зводиться до інтегрування шести диференціальних рівнянь (9) і (12) по відношенню до шести невідомих функцій γ_1, γ_2, γ_3, p, q, r. Дослідження систем диференціальних рівнянь (9) і (12) проведемо за допомогою методу малого параметру. Метод малого параметру вперше виник у зв'язку з задачею трьох тіл в небесній механіці. Відомо, що розв'язання задачі про рух двох тіл, що притягуються за законом Ньютона, не представляє великих труднощів. Справа ускладнюється, якщо є три тіла, які притягуються між собою за законом Ньютона. У цьому випадку задача немає повного розв'язання.

Але у випадку сонячної системи задача спрощується завдяки тому, шо маси планет набагато менші маси Сонця. Природно виникає питання, чи не можна для врахування впливу однієї планети на іншу інтеграли руху планет розкласти за степенями малого параметру, яким є відношення маси збурюючої планети до маси Сонця. Причому, очевидно, що при значенні параметра рівного нулю, одержимо розв'язок відповідної задачі про рух двох тіл.

Математична теорія такого методу була розроблена Пуанкаре. Вона базується на формулюванні двох теорем [1, 2].

Розглянемо систему рівнянь, у праві частини яких входить малий параметр α:

$$dy_i/dt=f_i(y_1,y_2,\ldots,y_n,t,\alpha), i=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

Якщо в системі рівнянь (13) покласти $\alpha=0$, то отримаємо систему вигляду

$$dz_i/dt=f_i(z_1,z_2,\ldots,z_n,t,0), i=1,2,\ldots,n, \tag{14}$$

яку називають системою спрощених рівнянь до системи рівнянь (13). У даному випадку справедливі наступні дві теореми [1, 2].

Теорема 1. *Якщо праві частини рівнянь (13) голоморфні в області $\alpha=0$ і спрощена система рівнянь (14) має розв'язок $z_i(t)$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$, голоморфний вздовж деякого шляху C на площині комплексної змінної t, то і система (13) має при достатньо малому значенні параметра α розв'язок*

$$y_i(t)=y_i(t,\alpha), i=1,2,\ldots,n, \tag{15}$$

де $y_i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$ голоморфні вздовж того ж шляху C.

Теорема 2. *Розв'язки (15) системи рівнянь (13) можуть бути розкладені в ряди за степенями α*

$$y_i = y_i^{(0)}(t) + \alpha y_i^{(1)}(t) + \dots + \alpha k y_i^{(k)}(t) + \dots,$$

$$i = 1,2,\dots,n, \qquad (16)$$

які збігаються при достатньо малому значенні параметра α. Перші члени розкладу представляють собою розв'язки відповідної спрощеної системи (14), тобто

$$y_i^{(0)}(t) = z_i(t), \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (17)$$

Інші члени розкладу (16) визначаються із систем, одержаних від прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях параметра α зліва і справа.

До систем рівнянь з малим параметром приводять багато механічних систем, що працюють в коливально-обертальному режимі. Зручним апаратом дослідження розв'язків таких систем є асимптотичні методи нелінійної механіки. Дослідженню результатів, пов'язаних з асимптотичним інтегруванням систем рівнянь, присвячені праці Боголюбова М.М., Митропольського Ю.О. [1], а також робота Митропольського Ю.О. і Самойленка А.М. [2].

Для застосування методу малого параметру до знаходження розв'язків систем рівнянь (9) і (12) використаємо відповідні спрощення, які полягають в наступному: у системі рівнянь (9) покладемо два відцентрових момента інерції рівними нулю, тобто $F=E=0$. При цьому припущенні система рівнянь (9) прийме вигляд

$$Adp/dt + (C-B)qr + D(r^2-q^2) =$$
$$= Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2),$$
$$Bdq/dt - Ddr/dt + (A-C)pr + Dpq =$$
$$= Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), \qquad (18)$$
$$-Ddq/dt + Cdr/dt + (B-A)qp - Dpr =$$
$$= Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1).$$

У подальшому для дослідження системи рівнянь (18) будемо вимагати виконання таких умов

$$D \ll A, D \ll 1. \qquad (19)$$

Систему рівнянь (18) розв'яжемо по відношенню до похідних dp/dt, dq/dt, dr/dt. Для цього друге рівняння системи (18) домножимо на C, а третє – на D і почленно додамо. Після виконання даної дії одержимо:

$$(BC-D^2)dq/dt + [C(A-C)-D^2]pr+$$
$$+D(C+B-A)pq = MgC(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)+$$
$$+MgD(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1). \qquad (20)$$

Аналогічно друге рівняння системи (18) домножимо на D, а третє – на B і знову почленно додамо, тоді отримаємо таке рівняння:

$$(BC-D^2)dr/dt + [B(B-A)+D2]pq-$$
$$-D(C+B-A)pr = MgD(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)+$$
$$+MgB(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1). \qquad (21)$$

Враховуючи перше рівняння системи (18) і рівняння (20) та (21) одержимо таку систему диференціальних рівнянь:

$$Adp/dt + (C-B)qr + D(r_2-q_2) = Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2),$$
$$(BC-D^2)dq/dt + [C(A-C)-D2]pr+$$
$$+D(C+B-A)pq = MgC(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)+$$
$$+MgD(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), \qquad (22)$$
$$(BC-D^2)dr/dt + [B(B-A)+D^2]pq-$$
$$-D(C+B-A)pr = MgD(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)+$$
$$+MgB(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1).$$

Із системи рівнянь (22) знайдемо dp/dt, dq/dt, dr/dt:

$$dp/dt + ((C-B)/A)qr + (D/A)(r^2-q^2) =$$
$$= (Mg/A)(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2),$$
$$dq/dt + [(C(A-C)-D^2)/(BC-D^2)]pr+$$
$$+(D(C+B-A)/(BC-D^2))pq =$$
$$= (MgC/(BC-D^2))(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)+$$

$$+(MgD/(BC-D^2))(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1), \quad (23)$$

$$dr/dt+[(B(B-A)+D^2)/(BC-D^2)]pq-$$

$$-(D(C+B-A)/(BC-D^2))pr=$$

$$=(MgD/(BC-D^2))(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3)+$$

$$+(MgB/(BC-D^2))(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1).$$

Якщо врахувати умову (19) і те, що D достатньо мала величина по відношенню до центральних моментів A, B, C, то можна вважати, що буде виконуватися й така умова

$$D \ll BC. \quad (24)$$

З врахуванням вище приведених умов система рівнянь (23) набуде вигляду [3]:

$$dp/dt+((C-B)/A)qr=(Mg/A)(y_0\gamma_3-z_0\gamma_2),$$

$$dq/dt+((A-C)/B)pr=(Mg/B)(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3), \quad (25)$$

$$dr/dt+((B-A)/C)pq=(Mg/C)(x_0\gamma_2-y_0\gamma_1).$$

Розглянемо випадок, коли $A=B\neq C$ та будемо вважати, що центр мас тіла розташований у площині Oxy і покладемо $y_0=0$. Тоді система (25) прийме такий вигляд:

$$dp/dt+((C-A)/A)qr=-(Mg/A)z_0\gamma_2,$$

$$dq/dt+((A-C)/A)pr=(Mg/A)(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3), \quad (26)$$

$$dr/dt=(Mg/C)x_0\gamma_2.$$

У системі рівнянь (26) введемо позначення:

$$(C-A)/A=m, Mg/C=n. \quad (27)$$

Одиницю виміру маси виберемо так, щоб $(Mg/A)=1$, тоді враховуючи дане припущення і позначення (27) для дослідження руху твердого тіла за допомогою методу малого параметру отримаємо такі системи диференціальних рівнянь:

$$dp/dt-mqr=-z_0\gamma_2,$$

$$dq/dt+mpr=(z_0\gamma_1-x_0\gamma_3), \quad (28)$$

$$dr/dt=nx_0\gamma_2,$$

$$d\gamma_1/dt=r\gamma_2-\gamma_3 q, d\gamma_2/dt=p\gamma_3-\gamma_1 r,$$

$$d\gamma_3/dt=q\gamma_1-\gamma_2 p. \quad (29)$$

Для застосування методу малого параметру до дослідження систем диференціальних рівнянь (28), (29) будемо вважати величини p, r, γ_2 малими, пропорційними малому параметру α. Для цього введемо такі співвідношення:

$$p=\alpha p_1, q=q_1, r=\alpha r_1, \gamma_1=\gamma_1^{(1)},$$

$$\gamma_2=\alpha\gamma_2^{1)}, \gamma_3=\gamma_3^{(1)}. \quad (30)$$

Підставляючи (30) у системи рівнянь (28), (29) і скорочуючи на α, отримаємо наступні системи рівнянь:

$$dp_1/dt-mq_1r_1=-z_0\gamma_2^{(1)},$$

$$dq_1/dt=z_0\gamma_1^{(1)}-x_0\gamma_3^{(1)}-m\alpha^2p_1r_1, \quad (31)$$

$$dr_1/dt=nx_0\gamma_2^{(1)},$$

$$d\gamma_1^{(1)}/dt=r_1\alpha^2\gamma_2^{(1)}-\gamma_3^{(1)}q_1,$$

$$d\gamma_2^{(1)}/dt=p_1\gamma_3^{(1)}-\gamma_1^{(1)}r_1, \quad (32)$$

$$d\gamma_3^{(1)}/dt=q_1\gamma_1^{(1)}-\alpha^2\gamma_2^{(1)}p_1.$$

Якщо покласти у системах (31), (32) значення параметра α рівним нулю, тобто $\alpha=0$, то дані системи запишуться так:

$$dp_1/dt-mq_1r_1=-z_0\gamma_2^{(1)},$$

$$dq_1/dt=z_0\gamma_1^{(1)}-x_0\gamma_3^{(1)}, \quad (33)$$

$$dr_1/dt=nx_0\gamma_2^{(1)},$$

$$d\gamma_1^{(1)}/dt=-\gamma_3^{(1)}q_1,$$

$$d\gamma_2^{(1)}/dt=p_1\gamma_3^{(1)}-\gamma_1^{(1)}r_1, \quad (34)$$

$$d\gamma_3^{(1)}/dt=q_1\gamma_1^{(1)}.$$

Із систем (33) і (34) запишемо наступні дві системи відносно шуканих функцій p_1, q_1, r_1, $\gamma_1^{(1)}$, $\gamma_2^{(1)}$, $\gamma_3^{(1)}$:

$$dp_1/dt-mq_1r_1=-z_0\gamma_2^{(1)},$$

$$dr_1/dt=nx_0\gamma_2^{(1)},$$

$$d\gamma_2^{(1)}/dt=p_1\gamma_3^{(1)}-\gamma_1^{(1)}r_1, \quad (35)$$

$$dq_1/dt=z_0\gamma_1^{(1)}-x_0\gamma_3^{(1)},$$

$$d\gamma_1^{(1)}/dt=-\gamma_3^{(1)}q_1, \quad (36)$$

$$d\gamma_3^{(1)}/dt = q_1\gamma_1^{(1)}.$$

Система диференціальних рівнянь (35) має частковий розв'язок

$$p_1 = 0, r_1 = 0, \gamma_2^{(1)} = 0. \tag{37}$$

Розв'язок системи рівнянь (36) відшукуємо у вигляді

$$q_1 = Q_1/t, \gamma_1^{(1)} = \Gamma_1/t^2, \gamma_3^{(1)} = \Gamma_3/t^2, \tag{38}$$

де Q_1, Γ_1, Γ_3 – сталі величини.

Підставляючи (38) у систему рівнянь (36), після скорочення на t у відповідних степенях отримаємо таку систему трьох однорідних алгебраїчних рівнянь по відношенню до невідомих сталих Q_1, Γ_1, Γ_3:

$$\begin{aligned} -Q_1 &= z_0\Gamma_1 - x_0\Gamma_3, \\ -2\Gamma_1 &= -Q_1\Gamma_3, \\ -2\Gamma_3 &= \Gamma_1 * Q_1. \end{aligned} \tag{39}$$

Перемножуючи відповідно ліві та праві частини двох останніх рівнянь системи (39) і скорочуючи на $\Gamma_1\Gamma_3$ одержимо рівняння для знаходження невідомої Q_1, тобто

$$Q_1^2 = -4. \tag{40}$$

З рівняння (40) отримаємо, що

а) $Q_1^{(1)} = 2i$; б) $Q_1^{(2)} = -2i$. (41)

де i – уявна одиниця, тобто $i = \sqrt{-1}$.

Враховуючи (41) із системи рівнянь (39) будемо мати:

а) $\Gamma_3^{(1)} = -2/(z_0 + ix_0)$, $\Gamma_1^{(1)} = -2i/(z_0 + ix_0)$. (42)

б) $\Gamma_3^{(2)} = -2/(z_0 - ix_0)$, $\Gamma_1^{(2)} = 2i/(z_0 - ix_0)$. (43)

Для випадку а) частковий розв'язок систем (35) і (36) має вигляд

$$\begin{gathered} p_1 = 0, q_1 = 2i/t, r_1 = 0, \\ \gamma_1^{(1)} = -2i/(t^2(z_0 + ix_0)), \\ \gamma_2^{(1)} = 0, \gamma_3^{(1)} = -2/(t^2(z_0 + ix_0)). \end{gathered} \tag{44}$$

Розкладемо по параметру α^2 інтеграли систем (31), (32), тобто [1, 3]

$$\begin{gathered} p_1 = \alpha^2 p_2 + \alpha^4 p_3 + \ldots, \\ q_1 = 2i/t + \alpha^2 q_2 + \alpha^4 q_3 + \ldots, \\ r_1 = \alpha^2 r_2 + \alpha^4 r_3 + \ldots, \\ \gamma_1^{(1)} = -2i/(t^2(z_0+ix_0)) + \alpha^2\gamma_1^{(2)} + \alpha^4\gamma_1^{(3)} + \ldots, \\ \gamma_2^{(1)} = \alpha^2\gamma_2^{(2)} + \alpha^4\gamma_2^{(3)} + \ldots, \\ \gamma_3^{(1)} = -2/(t^2(z_0+ix_0)) + \alpha^2\gamma_3^{(2)} + \alpha^4\gamma_3^{(3)} + \ldots. \end{gathered} \tag{45}$$

Підставляючи вирази (45) у системи рівнянь (31), (32) і прирівнюючи коефіцієнти зліва і справа при α^2 одержимо наступні дві системи рівнянь по відношенню до невідомих функцій p_2, q_2, r_2, $\gamma_1^{(2)}$, $\gamma_2^{(2)}$, $\gamma_3^{(2)}$:

$$\begin{gathered} dp_2/dt - m(2i/t)r_2 = -z_0\gamma_2^{(2)}, \\ dq_2/dt = z_0\gamma_1^{(2)} - x_0\gamma_3^{(2)}, \\ dr_2/dt = nx_0\gamma_2^{(2)}, \end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered} d\gamma_1^{(2)}/dt = -(2i/t)\gamma_3^{(2)} + 2/(t^2(z_0 + ix_0))q_2, \\ d\gamma_2^{(2)}/dt = -2/(t^2(z_0+ix_0))p_2 + 2i/(t^2(z_0+ix_0))r_2, \\ d\gamma_3^{(2)}/dt = (2i/t)\gamma_1^{(2)} - 2i/(t^2(z_0 + ix_0))q_2. \end{gathered} \tag{47}$$

Розглянемо такі дві системи рівнянь, які отримуються із систем диференціальних рівнянь (46), (47)

$$\begin{gathered} dp_2/dt - m(2i/t)r_2 + z_0\gamma_2^{(2)} = 0, \\ dr_2/dt - nx_0\gamma_2^{(2)} = 0, \\ d\gamma_2^{(2)}/dt + 2/(t^2(z_0 + ix_0))p_2 - \\ -2i/(t^2(z_0 + ix_0))r_2 = 0. \end{gathered} \tag{48}$$

$$\begin{gathered} dq_2/dt - z_0\gamma_1^{(2)} + x_0\gamma_3^{(2)} = 0, \\ d\gamma_1^{(2)}/dt + (2i/t)\gamma_3^{(2)} - 2/(t^2(z_0 + ix_0))q_2 = 0, \\ d\gamma_3^{(2)}/dt - (2i/t)\gamma_1^{(2)} + 2i/(t^2(z_0 + ix_0))q_2 = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

У системі (48) виконаємо наступну заміну:

$$\gamma_2^{(2)} = G/t, \tag{50}$$

де G – нова змінна. Знайдемо $d\gamma_2^{(2)}/dt$, враховуючи заміну (50):

$$d\gamma_2^{(2)}/dt = (dG/dt)/t - G/t^2. \tag{51}$$

Підставимо (50) і (51) у систему (48). Одержимо наступну систему

$$dp_2/dt - m(2i/t)r_2 + (Gz_0)/t = 0,$$
$$dr_2/dt - (Gnx_0)/t = 0, \qquad (52)$$
$$dG/dt - G/t + 2/(t^2(z_0+ix_0))p_2 -$$
$$-2i/(t^2(z_0+ix_0))r_2 = 0.$$

Розв'язок системи (52) відшукуємо у вигляді [3]:

$$p_2 = Pt^s, r_2 = Rt^s, G = Ht^s, \qquad (53)$$

де P, R, H – сталі, причому для них повинна виконуватися умова

$$P^2 + R^2 + H^2 \neq 0, \qquad (54)$$

тобто вони не повинні бути рівними нулю.

Знайдемо похідні по t від p_2, r_2, G:

$$dp_2/dt = sPt^{s-1}, dr_2/dt = sRt^{s-1},$$
$$dG/dt = sHt^{s-1}. \qquad (55)$$

Підставляємо (53), (55) у систему рівнянь (52) і скорочуючи на t^{s-1}, одержимо наступну лінійну однорідну алгебраїчну систему по відношенню до невідомих P, R, H:

$$sP - 2imR + Hz_0 = 0,$$
$$sR - nx_0H = 0, \qquad (56)$$
$$H(s-1) + (2/(z_0+ix_0))P - (2i/(z_0+ix_0))R = 0.$$

Шукаємо нетривіальний розв'язок. Система (56) буде мати такий розв'язок в тому випадку, коли визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих P, R, H, буде рівним нулю, тобто [3]

$$\begin{vmatrix} s & -2im & z_0 \\ 0 & s & -nx_0 \\ 2/(z_0+ix_0) & -2i/(z_0+ix_0) & s-1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (57)$$

Рівняння (57) називається характеристичним рівнянням системи (56). Обчислюючи визначник, отримаємо таке рівняння:

$$s^3 - s^2 - 2s(z_0+inx_0)/(z_0+ix_0) +$$
$$+4imnx_0/(z_0+ix_0) = 0. \qquad (58)$$

Враховуючи позначення (27), отримаємо співвідношення $mn = n-1$. Підставляючи дане співвідношення у рівняння (58), отримаємо характеристичне рівняння вигляду:

$$s^3 - s^2 - 2s(z_0+inx_0)/(z_0+ix_0) +$$
$$+4i(n-1)x_0/(z_0+ix_0) = 0. \qquad (59)$$

Простою підстановкою можна перевірити що коренем цього рівняння є $s=2$. Знаючи один із коренів рівняння (59) розкладемо ліву частину даного рівняння на множники, отримаємо:

$$(s-2)(s^2 + s - 2(n-1)x_0^2/(z_0^2+x_0^2) -$$
$$-2i(n-1)x_0z_0/(x_0^2+z_0^2)) = 0. \qquad (60)$$

Рівняння (60) отримується домноженням чисельника і знаменника другого і третього даданку у другій дужці, розкладу на множники, на вираз $z_0 - ix_0$, який є спряженим виразом до виразу $z_0 + ix_0$.

Якщо серед коренів рівняння (60) є уявні (комплексні), що може бути тільки за рахунок другої дужки у рівнянні, то p_2, r_2, $\gamma_2^{(2)}$ будуть мати критичну трансцендентну точку $t=0$. Тому для відсутності такої точки необхідно щоб виконувалася така рівність:

$$s^2 + s - 2(n-1)x_0^2/(z_0^2+x_0^2) -$$
$$-2i(n-1)x_0z_0/(x_0^2+z_0^2) = 0. \qquad (61)$$

Рівність (61) буде справедливою в тому випадку, якщо буде виконуватися наступна рівність

$$(n-1)x_0z_0 = 0. \qquad (62)$$

Умова (62) буде виконуватися у таких трьох випадках:

а) $n-1=0$; б) $x_0=0$; в) $z_0=0$. (63)

Для випадку $n-1=0$ маємо, що $m=0$, тоді будемо мати $A=B=C$, тобто тіло приймає форму сфери. Випадок $x_0=0$ зводиться до випадку Лагранжа. При виконанні третього випадку рівняння (61) прийме вигляд:

$$s^2 + s - 2(n-1) = 0. \qquad (64)$$

Із рівняння (64) знайдемо:

$$n = 1 + s(s+1)/2. \quad (65)$$

Якщо параметр s буде цілим, то $s(s+1)$ буде парним виразом, звідки випливає, що n ціле.

Для випадку в) ($z_0 = 0$) системи диференціальних рівнянь (28) і (29) запишуться наступним чином:

$$dp/dt - mqr = 0,$$

$$dq/dt + mpr = -x_0\gamma_3, \quad (66)$$

$$dr/dt = nx_0\gamma_2,$$

$$d\gamma_1/dt = r\gamma_2 - \gamma_3 q, d\gamma_2/dt = p\gamma_3 - \gamma_1 r,$$

$$d\gamma_3/dt = q\gamma_1 - \gamma_2 p. \quad (67)$$

У системах рівнянь (66), (67) вводимо малий параметр α, згідно формул:

$$p = \alpha p_1, q = \alpha q_1, \gamma_3 = \alpha\gamma_3^{(1)}. \quad (68)$$

В даному випадку отримаємо такі дві системи диференціальних рівнянь:

$$dp_1/dt - mq_1 r = 0,$$

$$dq_1/dt + mp_1 r = -x_0\gamma_3^{(1)}, \quad (69)$$

$$dr/dt = nx_0\gamma_2,$$

$$d\gamma_1/dt = r\gamma_2 - \alpha^2\gamma_3^{(1)}q_1,$$

$$d\gamma_2/dt = \alpha^2 p_1\gamma_3^{(1)} - \gamma_1 r, \quad (70)$$

$$d\gamma_3^{(1)}/dt = q_1\gamma_1 - \gamma_2 p_1.$$

Системи рівнянь (69) і (70) запишемо у вигляді таких двох систем:

$$dr/dt = nx_0\gamma_2,$$

$$d\gamma_1/dt = r\gamma_2 - \alpha^2\gamma_3^{(1)}q_1, \quad (71)$$

$$d\gamma_2/dt = \alpha^2 p_1\gamma_3^{(1)} - \gamma_1 r,$$

$$dp_1/dt - mq_1 r = 0,$$

$$dq_1/dt + mp_1 r = -x_0\gamma_3^{(1)}, \quad (72)$$

$$d\gamma_3^{(1)}/dt = q_1\gamma_1 - \gamma_2 p_1.$$

У системі (71) покладемо $\alpha = 0$. Тоді спрощена до (71) система прийме вигляд

$$dr/dt = nx_0\gamma_2,$$

$$d\gamma_1/dt = r\gamma_2, \quad (73)$$

$$d\gamma_2/dt = -\gamma_1 r.$$

Система диференціальних рівнянь (72) має такий частинний розв'язок

$$p_1 = 0, q_1 = 0, \gamma_3^{(1)} = 0. \quad (74)$$

Розв'язок спрощеної системи (73) відшукуємо у вигляді

$$r = R/t, \gamma_1 = \Gamma_1/t^2, \gamma_2 = \Gamma_2/t^2, \quad (75)$$

де R, Γ_1, Γ_2 – сталі величини, які підлягають визначенню.

Знайдемо похідні по змінній t від функцій r, γ_1, γ_2, які визначаються згідно формул (75), тобто

$$dr/dt = -R/t^2, d\gamma_1/dt = -2\Gamma_1/t^3,$$

$$d\gamma_2/dt = -2\Gamma_2/t^3. \quad (76)$$

Підставляючи (75) і (76) у систему рівнянь (73) після проведення відповідних перетворень отримаємо наступну систему рівнянь для знаходження сталих R, Γ_1, Γ_2:

$$-R = nx_0\Gamma_1, -2\Gamma_1 = R\Gamma_2, -2\Gamma_1 = R\Gamma_2. \quad (77)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (77) отримаємо такі значення для сталих R, Γ_1, Γ_2:

$$R = 2i, \Gamma_1 = -2/(nx_0), \Gamma_2 = -2i/(nx_0). \quad (78)$$

Враховуючи (78), розв'язки (75) приймуть вигляд:

$$r = 2i/t, \gamma_1 = -2/(t^2 nx_0), \gamma_2 = -2i/(t^2 nx_0). \quad (79)$$

Таким чином, при $\alpha = 0$ системи рівнянь (72) і (73) мають такий розв'язок

$$p_1 = 0, q_1 = 0, r = 2i/t, \gamma_3^{(1)} = 0,$$

$$\gamma_1 = -2/(t^2 nx_0), \gamma_2 = -2i/(t^2 nx_0). \quad (80)$$

Переходимо до визначення других членів розкладу перших інтегралів систем (71) і (72) в ряд по степеням малого параметру α^2. Даний розклад має вигляд [3]:

$$p_1 = \alpha^2 p_2 + \alpha^4 p_3 + \ldots,$$
$$q_1 = \alpha^2 q_2 + \alpha^4 q_3 + \ldots,$$
$$r = 2i/t + \alpha^2 r_2 + \alpha^4 r_3 + \ldots, \qquad (81)$$
$$\gamma_1 = -2/(t^2 n x_0) + \alpha^2 \gamma_1^{(2)} + \alpha^4 \gamma_1^{(3)} + \ldots,$$
$$\gamma_2 = -2i/(t^2 n x_0) + \alpha^2 \gamma_2^{(2)} + \alpha^4 \gamma_2^{(3)} + \ldots,$$
$$\gamma_3^{(1)} = \alpha^2 \gamma_3^{(2)} + \alpha^4 \gamma_3^{(3)} + \ldots.$$

Підставляючи (81) у системи (71), (72) і прирівнюючи зліва та справа коефіцієнти при α^2, отримаємо такі системи диференціальних рівнянь:

$$dp_2/dt - mq_2(2i/t) = 0,$$
$$dq_2/dt + mp_2(2i/t) = -x_0\gamma_3^{(2)}, \qquad (82)$$
$$d\gamma_3^{(2)}/dt = -(2/(t^2 n x_0))q_2 - (2i/(t^2 n x_0))p_2.$$

Аналогічно можна отримати систему рівнянь по відношенню до шуканих функцій r_2, $\gamma_1^{(2)}$, $\gamma_2^{(2)}$.

У системі рівнянь (82) виконаємо наступну заміну змінних

$$\gamma_3^{(2)} = G/t, \qquad (83)$$

де G – нова змінна.

З врахуванням (83) і похідною від $\gamma_3^{(2)}$ по змінній t система рівнянь (82) прийме вигляд:

$$dp_2/dt - mq_2(2i/t) = 0,$$
$$dq_2/dt + mp_1(2i/t) + (x_0 G)/t = 0, \qquad (84)$$
$$dG/dt + (2/(tnx_0))q_2 - (2i/(tnx_0))p_2 - (G/t) = 0.$$

Частинні інтеграли системи рівнянь (84) відшукуємо у вигляді

$$p_2 = Pt^s, q_2 = Qt^s, G = Ht^s, \qquad (85)$$

де P, Q, H – сталі.

Підставляючи (85) та похідні від p_2, q_2, G по змінній t у систему рівнянь (84) отримаємо однорідну алгебраїчну систему по відношенню до величин P, Q, H. Для того щоб дана система мала розв'язок відмінний від тривіального ($P = 0$, $Q = 0$, $H = 0$) будемо вимагати щоб визначник складений із коефіцієнтів при P, Q, H був рівним нулю. Таким чином отримаємо характеристичне рівняння вигляду:

$$\begin{vmatrix} s & -2im & z_0 \\ 2im & s & x_0 \\ -(2i/nx_0) & (2/nx_0) & s-1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (86)$$

або

$$(s-2)(s^2 + s - (2m-1)2m) = 0. \qquad (87)$$

Коренями характеристичного рівняння (87) є:

$$s_1 = 2, s_2 = -2m, s_3 = 2m - 1. \qquad (88)$$

Враховуючи s_2, s_3 і співвідношення $1/n = 1 - m$ можна знайти межі зміни величини s і які значення дана величина може приймати. Із співвідношення $1/n = 1 - m$ будемо мати:

а) $1/n = 1 + s/2$; б) $1/n = (1-s)/2$. (89)

Оскільки $n > 0$, що випливає із другого співвідношення (27), для s отримаємо такі обмеження 1^0) $-1 < s < 1$, 2^0) $-2 < s \leq 0$. Оскільки s може приймати тільки цілі значення, то воно може приймати тільки два значення: $s = 0$, $s = -1$. Враховуючи значення s отримаємо такі часткові інтеграли:

$$p_2 = P, q_2 = Q, \gamma_3^{(2)} = H/t, \qquad (90)$$

$$p_2 = Pt^{-1}, q_2 = Qt^{-1}, \gamma_3^{(2)} = Ht^{-2}. \qquad (91)$$

Сталі P, Q, H визначаються із такої системи рівнянь

$$sP - 2imQ = 0,$$
$$2imP + sQ + nx_0 = 0, \qquad (92)$$
$$-(2i/nx_0)P + (2/nx_0)Q + (s-1)H = 0.$$

У систему (92) необхідно по черзі підставляти ті значення s, які визначені згідно обмежень.

Таким чином дослідження рівнянь руху твердого тіла по відношенню до неголовних осей інерції проведено з врахуванням накладених умов у вигляді (19), (24), позначень

(27), а також при $F = E = 0$, $A = B$ і $y_0 = 0$. При виконанні даних умов результати досліджень співпадають з результатами роботи [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.

2. *Боголюбов Н.Н., Самойленко А.М.* Асимптотическое исследование слабо нелинейных колебательных систем. – Киев, 1976. – 74. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 76.5).

3. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твёрдого тела около неподвижной точки. – М: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1953. – 287 с.

4. *Мігуца Д.О.* Дослідження руху гіростата відносно неголовних осей інерції за допомогою змінних Колосова // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – с. 59-62.

5. *Мігуца Д.О.* Дослідження руху твердого тіла в неголовних осях інерції методом малого параметру // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. Вип.5. – с. 225 – 234.