УДК 517.982

©2009р. О. В. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГРА ҐРЮНГЕЙДЖА ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ K_hC-ФУНКЦІЙ НА ГОРИЗОНТАЛЯХ

Встановлюється, що для довільної K_hC-функції, що визначена на добутку берівського простору та W-простору і набуває значень в метризовному просторі множина її точок розриву на кожній горизонталі є множиною першої категорії. Крім того, встановлюється аналогічний результат для функцій, що визначені на добутку α-сприятливого простору і w-простору.

It is obtained that the discontinuity point set of any K_hC-function defined on the product of a Baire space and a W-space and ranged in a metrizabble space is meager on each horizontal. Besides, we prove the same result for function defined on the product of an α-favorable space and a w-space.

Вступ

В роботі [1] доведено, що для берівського простору X, компактного W-простору Y і метризовного простору Z для кожної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to Z$ множина $D_b(f) = \{x \in X : (x, b) \in D(f)\}$ є множиною першої категорії для кожного $b \in Y$. Аналогічний результат встановлюється і для α-сприятливого простору X і компактного w-простору Y.

В даній роботі, замість класичної гри Ґрюнгейджа $\mathrm{Gr}(X, a)$, яка породжує класи W-просторів і w-просторів, ми розглядаємо її слабший аналог $\mathrm{Gr}_E(X, a)$. Крім того, ми розглядаємо гібрид гри Шоке і слабкої гри Ґрюнгейджа $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$, β-несприятливість якої гарантує, що множина $D_b(f)$ першої категорії для довільної $K_h^E C$-функції $f : X \times Y \to Z$.

1. Гра Ґрюнгейджа та гра Шоке

Якщо Γ деяка нескінченна гра двох гравців α та β, то називатимемо її *α-сприятливою* /*β-несприятливою*/, якщо гравець α має /β не має/ виграшної стратегії у цій грі.

Нехай X – топологічний простір, $a \in X$, $E \subseteq X$ причому $a \in \overline{E}$. *Слабкою грою Ґрюнгейджа* називається гра $\mathrm{Gr}_E(X, a)$ двох гравців α і β, в якій α вибирає відкриті множини $U_n \ni a$, а β – точки $a_n \in U_n$. Гравці α і β ходять по черзі (починає α) так, щоб $U_{n+1} \subseteq U_n$ для кожного n. Гравець α виграє, якщо послідовність (a_n) збіжна. Простір X називається *W_E-простором* /*w_E-простором*/, якщо для кожного $a \in X$ гра $\mathrm{Gr}_E(X, a)$ є α-сприятливою /β-несприятливою/.

Зауважимо, що в класичній грі Ґрюнгейджа $\mathrm{Gr}(X, a)$ (див. [2]) умова виграшу α полягає у збіжності a_n саме до a і $E = X$. Простір X називається *W-простором* /*w-простором*/, якщо для кожного $a \in X$ гра $\mathrm{Gr}(X, a)$ є α-сприятливою /β-несприятливою/. Нескладно зрозуміти, що α-сприятливість гри $\mathrm{Gr}_X(X, a)$ рівносильна α-сприятливості $\mathrm{Gr}(X, a)$, адже гравець β може вибирати точки a_n так, що $a_{2n} = a$, і тоді зі збіжності (a_n) випливатиме, що $a_n \to a$. Таким чином, W-простори – це в точності W_X-простори.

У *грі Шоке* $\mathrm{Ch}(X)$ гравці α та β по черзі (починає α) вибирають відкриті непорожні підмножини U_n та V_n простору X, так, щоб $U_1 = X$ і $U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq U_n$ для кожного n. Якщо гра $\mathrm{Ch}(X)$ α-сприятлива /β-несприятлива/, то простір X називається *α-сприятливим* (або *простором Шоке*) /чи, відповідно *β-несприятливим*/. Як відомо, β-несприятливі простори – це в точності берівські простори [3].

Нехай X і Y – топологічні простори, $E \subseteq Y$, $b \in Y$ причому $b \in \overline{E}$. Розглянемо гібрид ігор Шоке та Ґрюнгейджа – гру $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$. В цій грі гравець α грає множинами $U_n \times W_n \subseteq X \times Y$, а гравець β – множинами $V_n \times b_n \subseteq X \times E$, де непорожні множини U_n, V_n і W_n відкриті у відповідних просторах. Гравці по черзі (починає α) роблять свої ходи за наступними правилами: $U_1 = X$, $U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq U_n$, $W_{n+1} \subseteq W_n$ і $b, b_n \in W_n$. Гравець α виграє, якщо (b_n) збіжна і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$. Інакше виграє β.

Наступні твердження доводяться за допомогою стандартних міркувань з паралельними партіями.

Твердження 1. *Нехай X та Y топологічні простори. Тоді якщо ігри $\mathrm{Ch}(X)$ і $\mathrm{Gr}_E(Y, b)$ α-сприятливі, то гра $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$ також α-сприятлива.*

Доведення. Нехай σ_X і σ_Y виграшні стратегії для гравця α відповідно в іграх $\mathrm{Ch}(X)$ та і $\mathrm{Gr}_E(Y, b)$. Тоді виграшна стратегія σ для гравця α у грі $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$ визначається наступним чином:

$$\sigma((V_k \times \{b_k\})_{k<n}) = \sigma_X((V_k)_{k<n}) \times \sigma_Y((\{b_k\})_{k<n}),$$

де $(V_k \times \{b_k\})_{k<n}$ – попередні ходи гравця β у грі $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$. □

Твердження 2. *Нехай X та Y топологічні простори. Тоді якщо гра $\mathrm{Ch}(X)$ α-сприятлива /β-несприятлива/, а гра $\mathrm{Gr}_E(Y, b)$ β-несприятлива /α-сприятлива/, то гра $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$ є β-несприятливою.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок, коли гра $\mathrm{Ch}(X)$ α-сприятлива і гра $\mathrm{Gr}_E(Y, b)$ β-несприятлива (інший випадок доводиться цілком аналогічно).

Припустимо, що гра $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$ є β-сприятливою і σ – виграшна стратегія для гравця β у цій грі. Розглянемо паралельні партії $\big((U_n, V_n)\big)_{n=1}^{\infty}$,

$$\big((W_n, b_n)\big)_{n=1}^{\infty} \text{ і } \big((U_n \times W_n, V_n \times \{b_n\})\big)_{n=1}^{\infty}$$

відповідно в іграх $\mathrm{Ch}(X)$, $\mathrm{Gr}_E(Y, b)$ і $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$. Причому вважатимемо, що в другій партії гравець α грає за своєю виграшною стратегією σ_Y, а в третій партії гравець β грає за своєю виграшною стратегією σ. Тоді в першій партії гравець β гратиме за деякою стратегією σ_X, що породжується стратегіями σ_Y і σ, причому σ_X – виграшна, адже такими є σ_Y і σ. □

2. Гра Ґрюнгейджа просторах Корсона і Валдівіа

Топологічний простір називатимемо *простором Корсона* /*простором Валдівіа*/, якщо він гомеоморфний до деякого підпростору $X \subseteq \mathbb{R}^T$, для якого множина $\Sigma(X) = \{x \in X : |\mathrm{supp} x| \le \aleph_0\}$ рівна X /щільна в X/, де $\mathrm{supp} x = \{t \in T : x(t) \neq 0\}$ – *носій* функції x. Простір Валдівіа чи Корсона називатимемо *секвенціально повним*, якщо відповідний простір X можна вибирати секвенціально замкненим в $\mathbb{R}^T$. Ясно, що зліченно компактні простори Корсона чи Валдівіа автоматично є секвенціально повними.

Твердження 3. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^T$, $E = \Sigma(X)$ і $a \in X \cap \overline{E}$. Тоді, якщо X секвенціально замкнений в $\mathbb{R}^T$, або $a \in E$, то гра $\mathrm{Gr}_E(X, a)$ є α-сприятливою.*

Доведення. Визначимо стратегію σ для гравця α у грі $\mathrm{Gr}_E(X, a)$. Вважатимемо, що у цій грі α грає множинами U_n, а β – точками a_n. Якщо $a \in E$, то покладемо $a_0 = a$. Оскільки $a_n \in E$, то $|\,\mathrm{supp} a_n| \le \aleph_0$. Занумеруємо

$$\mathrm{supp} a_n = \big\{t_{nk} : k \in \mathbb{N}\big\}.$$

Стратегія σ визначається наступним чином: $U_1 = X$ і

$$U_n = \big\{x \in U_{n-1} : |x(t_{jk}) - a(t_{jk})| < \tfrac{1}{n} \text{ при } j, k < n\big\}$$

для $n > 1$.

Покажемо, що стратегія σ виграшна для α. Нехай в партії (U_n, a_n) гравець α грає згідно зі своєю стратегією σ. Покладемо

$$S = \bigcup_n \mathrm{supp} a_n.$$

Оскільки $a_n \in U_n$, то

$$|a_n(t_{jk}) - a(t_{jk})| < \tfrac{1}{n} \text{ при } j,k < n.$$

Отже, $a_n(t) \to a(t)$ при $t \in S$ і $a_n(t) \to 0$ при $t \in T \setminus S$. Тобто $a_n \to a\chi_S$ в $\mathbb{R}^T$ Тепер, якщо $a \in E$, то $\mathrm{supp} a = \mathrm{supp} a_0 \subseteq S$. І тому $a_n \to a$. Якщо ж тепер X секвенціально замкнений в $\mathbb{R}^T$, то елемент $a\chi_S$ належить до X, як границя елементів $a_n \in X$. Таким чином, так чи інакше, послідовність (a_n) збіжна в X. □

Наслідок 4. *Кожний простір Корсона є W-простором.*

Наслідок 5. *Нехай X – секвенціально повний простір Валдівіа. Тоді існує така всюди щільна в X множина E, для якої X є W_E-простором.*

3. Неперервність $K_h^E C$-функцій на горизонталях

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною*, якщо для довільної точки $x \in X$ і довільних околів U точки x і V точки $f(x)$ існує відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$, така, що $f(U_1) \subseteq V$. Нехай функція $f : X \times Y \to Z$ і $E \subseteq Y$. Для точок $x \in X$ і $y \in Y$ покладаємо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Функція f називається *KC-функцією* /*$\overline{K}C$-функцією*/, якщо для довільного $x \in X$ і довільного $y \in Y$ /довільного y з деякої всюди щільної підмножини $B \subseteq Y$/ функція $f^x : Y \to Z$ неперервна а функція $f_y : X \to Z$ квазінеперервна. Казатимемо, що f є *$K_h^E C$-функцією*, якщо для довільних точок $x \in X$ і $y \in Y$ і довільних околів U точки x, V точки y і W точки $f(x,y)$ існує відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$ і точка $y_1 \in V \cap E$ такі, що $f_{y_1}(U_1) \subseteq W$. $K_h^X C$-функції називаються просто *$K_h C$-функціями*. Ясно, що кожна KC-функція є $\overline{K}C$-функцією. Крім того, кожна $\overline{K}C$-функція є $K_h^E C$-функцією для деякої всюди щільної підмножини E в Y. Зокрема, кожна $\overline{K}C$-функція є $K_h C$-функцією.

Теорема 6. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метризовний, $b \in Y$, E – щільна підмножина Y, причому гра $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$ є β-несприятливою. Тоді для довільної $K_h^E C$-функції $f : X \times Y \to Z$ множина*

$$D_b(f) = \{x \in X : (x,b) \in D(f)\}$$

є множиною першої категорії.

Доведення. Припустимо, що $D_b(f)$ – другої категорії. Нехай

$$D_b^\varepsilon(f) = \{x \in X : \omega_f(x,b) \ge 7\varepsilon\}.$$

Оскільки $D_b(f) = \bigcup\limits_{\varepsilon>0} D_b^\varepsilon(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_b^{\frac{1}{n}}(f)$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що множина $D_b^\varepsilon(f)$ десь щільна. Оскільки, крім того, множина $D_b^\varepsilon(f)$ замкнена, то $G = \mathrm{int} D_b^\varepsilon(f)$ відкрита і непорожня підмножина X.

Побудуємо деяку стратегію σ для гравця β у грі $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$. Будемо вважати, що у грі $\mathrm{ChGr}_E(X \times Y, b)$ гравець α ходить множинами $U_n \times W_n$, а β – $V_n \times \{y_n\}$. Нам необхідно визначити ходи β, як функцію від попередніх ходів α, тобто

$$V_n \times \{y_n\} = \sigma\big((U_k \times W_k)_{k=1}^n\big).$$

Візьмемо довільну точку $a \in G$ і покладемо $z_1 = f(a,b)$. Оскільки f є $K_h^E C$-функцією, то існує відкрита непорожня множина $V_1 \subseteq G \subseteq X = U_1$ і точка $y_1 \in E \cap W_1$ такі, що

$$|f(x,y_1) - z_1|_Z < \varepsilon \text{ при } x \in V_1.$$

Візьмемо тепер $n > 1$ і припустимо, що V_k і y_k, а також $z_k \in Z$ уже визначені при $k < n$, як функції від попередніх ходів α, причому так, що для довільного $k < n$ виконуються умови

$$|f(x,y_k) - z_k|_Z < \varepsilon \text{ при } x \in V_k, \tag{1}$$

$$|z_k - z_{k-1}|_Z > 3\varepsilon \text{ якщо } k > 1. \tag{2}$$

Визначимо V_n, y_n і z_n, зі збереженням умов (1) і (2). Для цього візьмемо деяку точку $a_n \in U_n$. Оскільки $U_n \subseteq V_1 \subseteq G \subseteq$

$D_b^\varepsilon(f)$, то $\omega_f(a_n,b)\geq 7\varepsilon>6\varepsilon$. Тому існують точки $p_{n1},p_{n2}\in U_n\times W_n$, такі, що

$$|f(p_{n1})-f(p_{n2})|_Z>6\varepsilon.$$

Тоді для деякого $i=1,2$ виконується нерівність

$$|f(p_{ni})-z_{n-1}|_Z>3\varepsilon.$$

Покладемо $z_n=f(p_{ni})$. Тоді (2) виконується з $k=n$. Далі, за рахунок того, що f є K_h^EC-функцією виберемо точку $y_n\in W_n$ і відкриту непорожню множину $V_n\subseteq U_n$, так, щоб виконувалась властивість (1) з $k=n$.

Таким чином, стратегія σ для гравця β повністю визначена, причому так, що додатково виконуються властивості (1) і (2) для довільних номерів $k\in\mathbb{N}$. З (1) і (2) очевидним чином випливає, що для довільного номера $n>1$ виконується нерівність

$$|f(x,y_n)-f(x,y_{n-1})|_Z>\varepsilon \text{ при } x\in V_n. \quad (3)$$

Оскільки стратегія σ не може бути виграшною, то в деякій партії β грає згідно зі стратегією σ, але програє. Тоді існують точки $u\in X$ і $v\in Y$ такі, що

$$u\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n \quad \text{і} \quad v=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

Позначимо $w=f(u,v)$ і $w_n=f(u,y_n)$. Оскільки f неперервна відносно другої змінної, то

$$w=\lim_{n\to\infty}w_n.$$

Але, з іншого боку, $u\in V_n$ для кожного n. Тому з властивості (3) одержуємо, що

$$|w_n-w_{n+1}|_Z>\varepsilon \text{ для кожного } n.$$

Перейшовши тут до границі по n матимемо, що $0=|w-w|_Z\geq\varepsilon$, а це не можливо.

Таким чином, наше початкове припущення не вірне і множина $D_b(f)$ першої категорії. □

Наслідок 7. *Нехай X – берівський простір, Y – W-простір, Z – метризовний простір і $b\in Y$. Тоді для довільної K_hC-функції $f:X\times Y\to Z$ множина $D_b(f)$ є множиною першої категорії.*

Наслідок 8. *Нехай X – α-сприятливий простір, Y – w-простір, Z – метризовний простір і $b\in Y$. Тоді для довільної K_hC-функції $f:X\times Y\to Z$ множина $D_b(f)$ є множиною першої категорії.*

Наслідок 9. *Нехай X – берівський простір, Y – простір Корсона, Z – метризовний простір і $b\in Y$. Тоді для довільної K_hC-функції $f:X\times Y\to Z$ множина $D_b(f)$ є множиною першої категорії.*

Врахувавши, що KC-функція буде K_h^EC-функцією для довільної всюди щільної підмножини E, одержуємо ще один наслідок з теореми 6.

Наслідок 10. *Нехай X – берівський простір, Y – секвенціально повний простір Валдівіа, Z – метризовний простір і $b\in Y$. Тоді для довільної KC-функції $f:X\times Y\to Z$ множина $D_b(f)$ є множиною першої категорії.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mirmostofaee A. K.* Point of joint continuity of separately continuous mappings // (to appear)

2. *Gruenhage G.* Covering properties on $X^2\setminus\Delta$, W-sets and compact subsets of Σ-products.// Topology Appl. - 1984. - **17**. - P.287-304.

3. *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. - 1984. - **87,** N4. - P.409-504.