УДК 519.21, 519.217, 519.718

©2009 р. І.В. Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ХАРАКТЕРИСТИЧНИЙ ПОКАЗНИК РОЗВ'ЯЗКУ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В СКАЛЯРНОМУ ВИПАДКУ

В даній роботі розроблений метод відшукання характеристичного показника Ляпунова (ХПЛ) для детермінованого диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (1) використовуючи умови асимптотичної стійкості деякого збуреного рівняння (4).

In the present paper we introduce a new method for finding of the Liapunov characteristic for a determinate differential-difference equation of neutral type (1) using the conditions of assymptotic stability of some perturbed equation (4).

Розглянемо функцію, що задовольняє детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДДРР)[1]

$$dDy_t = Ly_t dt \tag{1}$$

та початкову умову

$$y_0 = \varphi, \tag{2}$$

де для $\forall \psi \in C([-h,0])$ визначені різницеві оператори

$$D\psi := \sum_{i=0}^{n} \delta_i \psi(-\tau_i);\ L\psi := \sum_{i=0}^{n} l_i \psi(-\tau_i), \tag{3}$$

$\varphi \in C([-h,0])$, $\delta_0 = 1, \sum\limits_{1}^{n} |\delta_i| < 1$, τ_i задовольняють співвідношення

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n = h.$$

Поряд з рівнянням (1) на імовірнісному базисі [2] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im \equiv \{F_t := \sigma(w(s), s \le t), t \ge 0\}$ - натуральна фільтрація вінерового процесу, $F := \lim\limits_{t\to\infty} F_t$, задано випадковий процес $x(t)$, який задовольняє стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НСДРР)

$$dDx_t = Lx_t dt + \varepsilon x(t) dw(t). \tag{4}$$

та початкову умову

$$x_0 = \varphi. \tag{5}$$

Тут випадковий процес $x(t) = x(t,\omega) : R_+ \times \Omega \longrightarrow R^1$; $x_t \equiv \{x(t+s), -h \le s \le 0 \in C([-h,0])$; $\varphi \in C([-h,0])$; $w(t) = w(t,\omega)$ - одновимірний випадковий вінеровий процес, що узгоджений з $\Im$.

Для задачі (1), (2) має місце терема існування та єдиності розв'язку [1].

Для задачі (4), (5) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності в середньому квадратичному другого моменту розв'язку [3].

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [4] як розв'язок (1), що задовольняє початкову умову

$$X(t) := \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, -h \le t < 0, \\ 1, t = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Зауважимо, що вірне твердження [1], [4] щодо зображення функції Коші $X(t)$ за допомогою характеристичного квазіполінома:

Лема 1. Функція Коші $X(t)$ допускає представлення

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Rez=\mu} e^{zt} V^{-1}(z) dz\,, \tag{7}$$

де $\mu > -\rho$, $V(z)$ – характеристичний квазіполіном рівняння (1), який задається співвідношенням [4]

$$V(z) := z\left\{\sum_{i=0}^{n} \delta_i e^{z\tau_i}\right\} - \sum_{i=0}^{n} l_i e^{z\tau_i}. \tag{8}$$

Наведемо тведження, які будуть необхідні для полальшого розгляду проблеми.

Лема 2. [5] Розв'язок НДДРР (1), (2) задовольняє стохастичне інтегральне рівняння

$$y(t)=x(t)-\varepsilon\int\limits_0^t X(t-s)x(s)dw(s). \qquad (9)$$

де $x(t)$ - розв'язок задачі (4), (5).

Задача даної роботи полягає у знаходженні характеристичного показника Ляпунова [6] для рівняння (1), який визначається наступним чином

$$k(0)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{ln\left|y(t)\right|^2}{t}, \qquad (10)$$

Визначимо характеристичний показник рівняння (4) наступним чином

$$k(\varepsilon)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{lnE\left|x(t)\right|^2}{t}, \qquad (11)$$

Теорема 1. [7] Характеристичний показник $k(\varepsilon)$ задачі (4), (5) визначається з умови

$$B_{k(\varepsilon)}=1,$$

де

$$B_{k(\varepsilon)}:=\frac{\varepsilon^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left|V_{k(\varepsilon)}(is)\right|^{-2}ds \qquad (12)$$

характеристичний квазіполіном рівняння (4) визначається рівністю

$$V_{k(\varepsilon)}(z):=z\sum_{i=0}^n\delta_ie^{-\tau_i(z+k(\varepsilon))}-$$

$$-\sum_{i=0}^n(\delta_i-k(\varepsilon)l_i)e^{-\tau_i(z+k(\varepsilon))}.$$

Теорема 2. Характеристичний показник $k(0)$ рівняння (1) визначається з умови

$$r(0)=\lim_{\varepsilon\to0}r(\varepsilon). \qquad (13)$$

Доведення. Обчислим $r(\varepsilon)$, використовуючи представлення (9):

$$r(\varepsilon)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{lnE\left|x(t)\right|^2}{t}=$$

$$=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{ln\left(y^2(t)+\varepsilon^2\int\limits_0^t X^2(t-s)Ex^2(s)ds\right)}{t}.$$

Припустимо, що розв'язок $X(t)$ експоненціальностійкий, $x(t)$ експоненційно стійкий в середньому квадратичному. Тоді, використовуючи властивості ХПЛ [6], неважко переконатися в справедливості оцінки

$$r(0)\le r(\varepsilon)\le\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{ln\left(y^2(t)+\varepsilon^2K\right)}{t},$$

де $0<K<\infty$. За припущенням вираз $y^2(t)+\varepsilon^2K$ рівномірно обмежений по t, тому справедливе твердження теореми 2.

Нехай припущення про асимптотичну стійкість $X(t)$ або $x(t)$ не виконується. Визначимо функцію $y^{(p)}(t)$ та випадковий процес $x^{(p)}(t)$ наступним чином:

$$y(t):=e^{pt}y^{(p)}(t);$$

$$x(t):=e^{pt}x^{(p)}(t),$$

де $p>0$ – досить велике число.

Неважко переконатися [3], що $y^{(p)}(t)$ буде задовольняти НДДРР

$$dD_py_t^{(p)}=L_py_t^{(p)}dt, \qquad (14)$$

а випадковий процес $x^{(p)}(t)$ – НСДРР

$$dD_px_t^{(p)}=L_px_t^{(p)}dt+\varepsilon x^{(p)}(t)dw(t), \qquad (15)$$

де різницеві оператори D_p, L_p задаються співвідношеннями

$$D_p\psi:=\sum_{i=0}^n\delta_ie^{-p\tau_i}\psi(-\tau_i);$$

$$L_p\psi:=\sum_{i=0}^n(l_i-p\delta_i)e^{-p\tau_i}\psi(-\tau_i).$$

Знайдемо таке $p>0$, що $k^{(p)}(0)<0$ та $k^{(p)}(\varepsilon)<0$. Тоді буде мати місце рівність

$$r^{(p)}(0)=\lim_{\varepsilon\to0}r^{(p)}(\varepsilon), \qquad (16)$$

де $r^{(p)}(0)$ – ХПЛ функції $y^{(p)}(t)$, $r^{(p)}(\varepsilon)$ – ХПЛ випадкового процесу $x^{(p)}(t)$:

$$k^{(p)}(0)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{ln\left|y^{(p)}(t)\right|^2}{t},$$

$$k^{(p)}(\varepsilon) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{lnE\left|x^{(p)}(t)\right|^2}{t}.$$

Але

$$k(0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{ln\left|y(t)\right|^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{ln\left|e^{pt}y^{(p)}(t)\right|^2}{t} =$$

$$= 2p + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{ln\left|y^{(p)}(t)\right|^2}{t} = 2p + k^{(p)}(0),$$

$$k(\varepsilon) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{lnE\left|x(t)\right|^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{lnE\left|e^{pt}x^{(p)}(t)\right|^2}{t} =$$

$$= 2p + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{lnE\left|x^{(p)}(t)\right|^2}{t} = 2p + k^{(p)}(\varepsilon).$$

На основі (16) та двох останніх рівностей, отримуємо твердження теореми.

Теорема 2 доведена.

Проаналізувавши твердження теореми 2, стає зрозумілим факт, що при

$$r(0) > 0$$

розв'язок рівняння (1) нестійкий, при умові

$$r(0) < 0$$

розв'язок рівняння (1) асимптотично стійкий.

Тобто дана теорема дозволяє відповідати на питання про асимптотичну поведінку рівняння (1). Для відпвіді на питання про асимптотику розв'язку рівняння (1) розроблено багато методів, основними з яких можна вважати:

1. Другий метод Ляпунова [4], [8] ;
2. Амплідудно-фазовий метод [8];
3. Метод D-розбиття [8];
4. Необхідні та достатні умови стійкості, виражені через умови на характеристичний квазіполіном (8) [1];
5. Метод Меймана і Чоботарьова [8];
6. Теореми Разуміхіна [4].

Поряд з даними відомими методами в даній роботі здійснено перехід від пошуку ХПЛ рівняння (1), використовуюси характеристичний квазіполіном

$$V(z) = z\left\{\sum_{i=0}^{n} \delta_i e^{z\tau_i}\right\} - \sum_{i=0}^{n} l_i e^{z\tau_i}.$$

на комплексній площинині $\mathbf{C}$ чи пошуку додатновизначеного функціонала Ляпунова-Красовського $V(x_t)$ [4], [8] до відшукання характеристичного показника рівняння (4) на прямій $\mathbf{R}$ з наперед заданою точністю ε_0. Це в деякій мірі полегшує відшукання ХПЛ, оскільки ХПЛ рівняння (4) легко обчислюється [7] з допомогою теореми 1.

Зауваження 1. У якості збуреного рівняння (1) можна використати наступне

$$d\left\{Dx_t\right\} = \left\{Lx_t\right\}dt + x(t)dw(\varepsilon t). \qquad (17)$$

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради д. ф.-м. наук, професору Ясинському В.К.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения.* - М.: Мир, 1967. - 548 с.
2. *Jacod J., Shiryaev A.N.* (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer - CityplaceVerlang, StateBerlin.
3. *Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.* - Киев:Наук.думка,1987. - 328 с.
4. *Хейл Дж. Теория функционально - дифференциальных уравнений.* - М.: Мир, 1984. - 421 с.
5. *Царков Є.Ф., Малик І.В.* Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доповіді НАН України. - 2008. № 7.- С. 52-57.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. - 472 с.
7. *Малик І.В.* Асимптотична поведінка в середньому квадратичному розв'язків систем стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу // Доповіді НАН України. - 2009, № 10.- С. 29-33.
8. *Эльсгольц Л.Э., Норкин О.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* - М.:Наука,1971. - 269 с.