УДК 515.12

©2009 р. Н.І. Мазуренко

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника

ГІПЕРПРОСТОРИ РІМАНОВОГО МНОГОВИДУ, ПОВ'ЯЗАНІ З ВИМІРОМ ГАУСДОРФА

Описано топологію систем $\{HD_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ і $\{HD^c_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$, де $HD_{>\gamma}(X)$ і $HD^c_{>\gamma}(X)$ - гіперпростори компактів і підконтинуумів відповідно, ріманового зв'язного n-вимірного компактного многовиду, вимір Гаусдорфа яких $>\gamma$; Γ - деяка зліченна впорядкована підмножина в $[0,n)$, $n\in\mathbb{N}$.

We describe the topology of systems $\{HD_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ and $\{HD^c_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ where $HD_{>\gamma}(X)$ and $HD^c_{>\gamma}(X)$ are hyperspaces of compacta and subcontinua respectively of the Riemannian connected n-dimensional compact manifold, the Hausdorff dimension of which is $>\gamma$; Γ is some countable ordered subset in $[0,n)$, $n\in\mathbb{N}$.

1. Вступ

Різними авторами (див. [6], [7], [10]) розглядалися гіперпростори компактів та підконтинуумів заданого виміру Лебега. У [7], наприклад, описано топологію системи гіперпросторів компактів і підконтинуумів заданого виміру Лебега у гільбертовому кубі. У [10] цей результат поширено на випадок гіперпростору зліченного нескінченного добутку невироджених континуумів Пеано, а в [6] на випадок гіперпростору континуума Пеано, кожна відкрита підмножина якого містить множини довільного виміру Лебега.

У [11], [1] одержано відповідні результати для гіперпросторів компактів і підконтинуумів заданого виміру Гаусдорфа у скінченновимірному кубі. Нашою метою є поширити останні результати на випадок гіперпростору ріманового зв'язного многовиду.

Статтю організовано наступним чином. У розділі 2 наведено необхідні означення і факти з загальної топології та теорії поглинаючих систем. Розділ 3 присвячено побудові модельної поглинаючої системи у гільбертовому кубі. У 4-му розділі розглядаються системи гіперпросторів компактів та континуумів відповідно, заданого виміру Гаусдорфа у n-вимірному зв'язному компактному рімановому многовиді у випадку, коли значення виміру Гаусдорфа пробігає зліченну підмножину в $[0,n)$, що належить означеному у другому розділі класу зліченних множин $\mathcal{C}$. Основний результат статті, який полягає у описі топології таких систем, висвітлює теорема 2 розділу 5.

2. Позначення і попередні відомості

Типову метрику позначаємо через d. Через $\operatorname{diam}(A)$ позначаємо діаметр підмножини A у метричному просторі. Для довільного покриття $\mathcal{U}$ метричного простору означимо $\operatorname{mesh}(\mathcal{U})$ як $\sup\{\operatorname{diam}(U)\mid U\in\mathcal{U}\}$. Для $x\in X$ і $\varepsilon>0$ множина $O_\varepsilon(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$ є *відкритою* ε*-кулею* з центром в x. Якщо не зазначено інше, то всі простори, які ми розглядаємо є сепарабельними, метризовними, а всі відображення - неперервними.

Як звичайно, через $\mathbb{I}$ позначаємо інтервал $[0,1]$, $\mathbb{I}^k$ - k-вимірний куб. Далі $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ - простори всіх натуральних, раціональних і дійсних чисел відповідно. Через $\aleph_0$ позначаємо потужність множини $\mathbb{N}$.

Конус $con(K)$ над компактом K - це фактор-простір, отриманий за допомогою ототожнення підмножини $K\times\{0\}$ множини $K\times\mathbb{I}$ і одноточкової множини. Позначаємо $[x,t]$ образ у конусі $con(K)$ точки (x,t) множини $K\times\mathbb{I}$ і ω – вершину конуса $con(K)$.

Позначимо через $\mathcal{C}$ клас всіх зліченних лінійно впорядкованих множин Γ, що задовольняють одну з наступних умов:

1) Γ – цілком впорядкована множина;

2) похідна скінченного порядку множини Γ – порожня множина;

3) Γ – порядково ізоморфна множині раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

Через Q позначаємо гільбертів куб, $Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1,1]_i$. Клас абсолютних околових ретрактів позначаємо через ANR. Замкнена підмножина A простору $X \in ANR$ називається Z-*множиною* в X якщо для кожного неперервного відображення $\varepsilon\colon X \to (0,\infty)$ існує відображення $f\colon X \to X \backslash A$ яке є ε-близьким до тотожнього в сенсі, що $d(x, f(x)) < \varepsilon(x)$, для кожного $x \in X$. Вкладення $g\colon Y \to X$ називається Z-*вкладенням* якщо його образ $g(Y)$ є Z-множиною в X. Через s позначаємо *псевдовнутрішність* гільбертового куба Q, $s = \prod_{i=1}^{\infty}(-1,1)_i$, а через $B(Q)$ - його *псевдомежу*, $B(Q) = Q \backslash s$.

2.1. Гіперпростори. Нехай X - метричний простір. *Гіперпростором* простору X є простір $\exp X$, що складається з усіх непорожніх компактних підмножин простору X і який ми розглядаємо з топологією В'єторіса. База цієї топології складається з множин

$$\langle V_1, ..., V_n \rangle = \left\{ \begin{array}{c} A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i, A \cap V_i \neq \varnothing \\ \text{для кожного } i \end{array} \right\},$$

де множини $V_1, ..., V_n$ пробігають топологію простору X. Топологія В'єторіса породжується метрикою Гаусдорфа d_H,

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Через $\exp_c(X)$ позначимо підпростір простору $\exp(X)$, який складається з усіх підконтинуумів простору X. Для $n \in \mathbb{N}$, позначимо через $\exp_n(X)$ підпростір простору $\exp(X)$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$. Нехай $\exp_\omega(X) = \cup\{\exp_n(X) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Нехай X – континуум Пеано. Позначимо через $\mathcal{A}(X)$ підпростір простору $\exp_c(X)$, елементами якого є підконтинууми простору X, котрі є скінченним об'єднанням дуг (можливо вироджених). Зауважимо, що підконтинуум континууму $Y \in \mathcal{A}(X)$ не завжди належить $\mathcal{A}(X)$.

2.2. Вимір Гаусдорфа. Нехай X - повний сепарабельний метричний простір, F - компактна непорожня підмножина в X і s - довільне невід'ємне дійсне число. Для $\varepsilon > 0$ означимо

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(F) = \inf_{\mathcal{B}} \sum_{B \in \mathcal{B}} (\mathrm{diam} B)^s,$$

де інфінум береться по всіх покриттях $\mathcal{B}$ множини F, для яких $\mathrm{mesh}(\mathcal{B}) < \varepsilon$.

Нехай $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(F)$. Існує єдине дійсне число s_0, *вимір Гаусдорфа* множини F, таке, що $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ для $0 \leq s < s_0$ і $\mathcal{H}^s(F) = 0$ для $s_0 < s < \infty$. Позначаємо цей факт як $\dim_H(F) = s_0$. Детальніше дивитись, наприклад [9], [8].

Твердження 1 (див. [11]).. *Нехай X - повний сепарабельний метричний простір. Для кожного $\alpha \geq 0$ множина $HD_{\leq\alpha}(X) = \{A \in \exp(X) \mid \dim_H(A) \leq \alpha\}$ є G_δ-підмножиною в* $\exp(X)$.

Нехай X - повний сепарабельний метричний простір. Позначимо для довільного $\alpha \in \mathbb{R}_+$ через $HD_{>\alpha}(X)$ (відповідно, $HD^c_{>\alpha}(X)$)- множину всіх непорожніх компактів (континуумів) в X, вимір Гаусдорфа яких $> \alpha$. Тобто $HD_{>\alpha}(X) = \{A \in \exp(X) \mid \dim_H(A) > \alpha\}$ (відповідно $HD^c_{>\alpha}(X) = \{A \in \exp_c(X) \mid \dim_H(A) > \alpha\}$).

2.3. Поглинаючі системи. Нагадаємо коротко деякі означення з теорії поглинаючих систем; детальніше дивитися також [12], [10], [3], [4].

Нехай Γ - впорядкована множина і $\mathcal{M}_\gamma$ - клас метричних просторів для $\gamma \in \Gamma$. Позначимо $\mathcal{M}_\Gamma = \{M_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. $\mathcal{M}_\Gamma$-*системою* у просторі X називається набір підмножин $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ простору X, що зберігає порядок індексів і такий, що $\mathcal{A}_\gamma \in \mathcal{M}_\gamma$ для кожного γ.

$\mathcal{M}_\Gamma$-система $\mathfrak{X} = \{\mathcal{X}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в $X \in ANR$ називається *сильно* $\mathcal{M}_\Gamma$*-універсальною* в X якщо для кожної $\mathcal{M}_\Gamma$-системи $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в Q, кожне відображення $f\colon Q \to X$, що звужується до Z-вкладення на деякій компактній підмножині K в Q можна наблизити Z-вкладенням $g\colon Q \to X$ так, що $g \mid K = f \mid K$ і для кожного $\gamma \in \Gamma$ виконується рівність $g^{-1}(\mathcal{X}_\gamma)\backslash K = \mathcal{A}_\gamma\backslash K$.

$\mathcal{M}_\Gamma$-система $\mathfrak{X}$ називається $\mathcal{M}_\Gamma$-*поглинаючою* в X якщо множина $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{X}_\gamma$ міститься в σ-компактній σ-Z-множині простору X і $\mathfrak{X}$ є сильно $\mathcal{M}_\Gamma$-універсальною в X.

Через $\mathcal{F}_\sigma$ позначаємо клас σ-компактних просторів.

Твердження 2 ([12], с.347). *Псевдомежа $B(Q)$ гільбертового куба Q є $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючою множиною в Q.*

Ми розглядаємо спеціальний випадок, коли система $\mathfrak{X}$ є спадною (тобто множина Γ впорядкована відношенням $\geq$), і всі класи $\mathcal{M}_\gamma$ співпадають з класом $\mathcal{F}_\sigma$. У цій ситуації вживаємо термін $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаюча система.

3. Деякі зліченні $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючі системи в $Q^{\aleph_0}$

Нехай Γ – довільна зліченна впорядкована множина. Означимо дві послідовності підмножин в Q^Γ наступним чином:

для довільного $\gamma \in \Gamma$ нехай

$$Y_\gamma = \prod_{\gamma'<\gamma} Q_{\gamma'} \times \prod_{\gamma'\geq\gamma} s_{\gamma'}$$

і

$$X_\gamma = Q^\Gamma\backslash Y_\gamma = \bigcup_{\gamma'\geq\gamma}\left(\prod_{\gamma''\neq\gamma'} Q_{\gamma''} \times B(Q)_{\gamma'}\right).$$

Послідовність $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ є зростаючою G_δ-послідовністю в Q^Γ і відповідно $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ - спадною $\mathcal{F}_\sigma$-послідовністю в Q^Γ. Позначимо $X_\Gamma = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Очевидно, $X_\Gamma = \{x \in Q^\Gamma \mid$ нескінченна кількість x_i належить до $B(Q)\}$.

Твердження 3. *Послідовність $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ є сильно $\mathcal{F}_\sigma$-універсальною в Q^Γ.*

Доведення. Нехай $\delta\colon \Gamma \to \mathbb{N}$ – бієкція. Для кожного $\gamma \in \Gamma$, нехай ρ_γ - метрика, що породжує топологію на Q, обмежена числом $2^{-\delta(\gamma)}$. Означимо для довільних $x, y \in Q^\Gamma$

$$d(x, y) = \sup\{\rho_\gamma(x_\gamma, y_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}.$$

Легко перевірити, що означена таким чином функція $d : Q^\Gamma \times Q^\Gamma \to [0, \infty)$ є метрикою. Зауважимо, що d - неперервна, оскільки ми розглядаємо Q^Γ з топологією добутку і функції ρ_γ є неперервними на $Q_\gamma \times Q_\gamma$. Тому метрика d породжує топологію простору Q^Γ (див., напр., [12], с.478).

Розглянемо відображення $f : Q \to Q^\Gamma$, що є Z-вкладенням на деякому компакті $K \subseteq Q$ і спадну послідовність $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ σ-компактних підмножин в Q. Можемо припустити, що f є Z-вкладенням (див. [12], с.328). Запишемо $Q\backslash K$ як об'єднання послідовності $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ компактів, де $F_i \subseteq int(F_{i+1})$ для кожного i і $F_0 = \varnothing$. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\varepsilon_i = \min\{\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{1}{2}d(f[K], f[F_i])\}$ для кожного i. Для довільного $\gamma \in \Gamma$ розглянемо відповідну компоненту $f_\gamma : Q \to Q$ відображення f. Побудуємо послідовність $\alpha_i : Q \to Q$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ неперервних відображень таку, що для кожного i

(1) $\hat{\rho}_\gamma(\alpha_i, \alpha_{i-1}) < \varepsilon_i, \alpha_i \mid F_{i-1} = \alpha_{i-1} \mid F_{i-1}$;

(2) $\alpha_i \mid Q\backslash F_{i+1} = f_\gamma \mid Q\backslash F_{i+1}$ і $\alpha_i \mid F_i$ є Z-вкладенням;

(3) $\alpha_i^{-1}[B(Q)] = \mathcal{A}_\gamma \cap F_i$.

Нехай $\alpha_0 = f_\gamma$. Припустимо, що α_i побудоване. Оскільки $B(Q)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючою множиною в Q (див. твердження 2), існує Z-вкладення $\beta :\ F_{i+1} \to Q$, близьке до $\alpha_i \mid F_{i+1}$ таке, що $\beta \mid F_i = \alpha_i \mid F_i$ і $\beta^{-1}[B(Q)] = \mathcal{A}_\gamma \cap F_{i+1}$. Оскільки $Q \in AR$, можемо продовжити β до відображення $\alpha_{i+1} : Q \to Q$ такого, що $\alpha_{i+1} \mid \overline{Q\backslash F_{i+2}} = f_\gamma \mid \overline{Q\backslash F_{i+2}}$ і α_{i+1} є достатньо близьким до α_i.

Послідовність відображень $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, очевидно, є фундаментальною, а отже збіжною (оскільки Q - компакт), тому відображення

$$g_\gamma = \lim_{i\to\infty} \alpha_i$$

є неперервним. Побудоване таким чином відображення g_γ задовольняє наступні властивості:

(4) $\hat{\rho}_\gamma(g_\gamma, f_\gamma) < \varepsilon$;

(5) якщо $x \in F_{i+1}\setminus F_i$ то $\rho_\gamma(g_\gamma(x), f_\gamma(x)) < d(f[K], f[F_{i+1}])$;

(6) $g_\gamma \mid K = f_\gamma \mid K$, $g_\gamma \mid F_i$ є Z-вкладенням для кожного i;

(7) $g_\gamma^{-1}[B(Q)]\setminus K = \mathcal{A}_\gamma\setminus K$.

Означимо $g = (g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} : Q \to Q^\Gamma$. Зауважимо, що g - ін'єктивне, а отже є вкладенням. Множина $g[Q]$ міститься в σZ-множині

$$f[K] \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{\gamma\neq\gamma'} Q_\gamma \times g_{\gamma'}[F_i] \right)$$

і тому є Z-множиною. Відображення f і g ε-близькі і $f \mid K = g \mid K$.

Нехай $x \in Q\setminus K$. Якщо $x \in \mathcal{A}_\gamma$ для деякого γ, то, за побудовою, $g_{\gamma'}(x) \in B(Q)$ для $\gamma' \leq \gamma$, тобто $(g(x))_\gamma \in B(Q)$, а звідси випливає, що $g(x) \in X_\gamma$. З іншого боку, якщо $g(x) \in X_\gamma$ для деякого $\gamma \in \Gamma$, то $g_{\gamma'} \in B(Q)$ для деякого $\gamma' \geq \gamma$, а тому $x \in \mathcal{A}_{\gamma'} \subseteq \mathcal{A}_\gamma$. $\square$

Розглянемо псевдомежу $B(Q)$ гільбертового куба Q. Вона є $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючою множиною в Q за твердженням 2. Оскільки топологічний клас просторів $\mathcal{F}_\sigma$ замкнений відносно скінченних перетинів, то, використавши твердження 3, отримуємо

Наслідок 1. *Послідовність $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ є $\mathcal{F}_\sigma$- поглинаючою в Q^Γ. Крім того, X_Γ є $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-поглинаючою множиною в Q^Γ.*

4. Поглинаючі системи ріманового зв'язного многовиду, пов'язані з виміром Гаусдорфа

Нехай Γ довільна зліченна множина класу $\mathcal{C}$. Розглянемо системи гіперпросторів компактів і континуумів, пов'язаних з виміром Гаусдорфа

$$\{HD_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}, \ \{HD^c_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$$

в гіперпросторі (компактів і континуумів відповідно) простору X.

Метою цього розділу є доведення наступної теореми

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, X – n-вимірний компактний зв'язний рімановий многовид і Γ – довільна зліченна впорядкована множина з класу $\mathcal{C}$.*

(1) Для $\Gamma \subset [0,n)$, система $\{HD_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ є $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючою в $\exp(X)$;

(2) Для $n \geq 2$ і $\Gamma \subset [1,n)$, система $\{HD^c_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ є $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючою в $\exp_c(X)$.

Використовуючи основні факти з теорії поглинаючих систем, для доведення цієї теореми нам потрібно перевірити наступні умови:

(I) множина $HD_{>\gamma}(X)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-множиною в просторі $\exp(X)$ для кожного $\gamma \in [0,n)$ і, відповідно, множина $HD^c_{>\gamma}(X)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-множиною в просторі $\exp_c(X)$ для кожного $\gamma \in [1,n)$;

(II) множина $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} HD_{>\gamma}(X)$ міститься в деякій σ-компактній σZ-множині простору $\exp(X)$ і, відповідно, множина $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} HD^c_{>\gamma}(X)$ міститься у деякій σ-компактній σZ-множині простору $\exp_c(X)$;

(III) системи $\{HD_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ та $\{HD^c_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ є сильно $\mathcal{F}_\sigma$-універсальними в просторах $\exp(X)$ та $\exp_c(X)$ відповідно.

Доведення теореми 1. Перевіримо виконання умов (I)-(III).

Умова (I), для множини $HD_{>\gamma}(X)$ випливає з твердження 1. Оскільки $HD^c_{>\gamma}(X) = \exp_c(X) \cap HD_{>\gamma}(X)$, то множина $HD^c_{>\gamma}(X)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-множиною в просторі $\exp_c(X)$.

Умова (II). Досить переконатися, що множини $HD_{>0}(X)$ та $HD^c_{>1}(X)$ є σZ-множинами в просторах $\exp(X)$ та $\exp_c(X)$ відповідно. З умови (I) випливає, що множини $HD_{>0}(X)$ та $HD^c_{>1}(X)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-множинами в просторах $\exp(X)$ та $\exp_c(X)$ відповідно. На підставі властивостей виміру Гаусдорфа (див. [9], [8]) отримуємо включення $HD_{>0}(X) \subseteq \exp(X)\setminus\exp_\omega(X)$ та $HD^c_{>1}(X) \subseteq \exp_c(X)\setminus\mathcal{A}(X)$. Множина $\exp(X)\setminus\exp_\omega(X)$ гомотопійно нехтувана в $\exp(X)$ (див. [3]), а множина $\exp_c(X)\setminus\mathcal{A}(X)$ гомотопійно нехтувана в $\exp_c(X)$ (див. [6]) тому, можемо стверджувати, що множини $HD_{>0}(X)$ і $HD^c_{>1}(X)$ є σZ-множинами в просторах $\exp(X)$ та $\exp_c(X)$ відповідно.

Для доведення умови (III) нам будуть потрібні деякі технічні результати, які ми розглядаємо далі.

4.1. Допоміжні побудови.

Лема 1. *Якщо $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma \subset [0,n)$ – зліченна цілком впорядкована множина, $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – спадна послідовність σ-компактних підмножин в Q і V – δ-окіл нуля в $\mathbb{R}^n$ для деякого фіксованого $\delta > 2\sqrt{n}$, то існує неперервне відображення $\xi : Q \to \exp(V)$ для якого виконуються наступні умови:*

(1) $\xi^{-1}(HD_{>\gamma}(V)) = \mathcal{A}_\gamma$ для кожного $\gamma \in \Gamma$;

(2) якщо x, x' довільні дві точки в Q і F, F' довільні скінченні підмножини у V такі, що $\xi(x) \cup F = \xi(x') \cup F'$, тоді $x = x'$;

(3) для кожного $x \in Q$, $\xi(x)$ – нескінченна множина.

Доведення. Розглянемо послідовність компактних підмножин $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ у V, яка збігається до точки $y_0 = (1,1,...,1)$, означену наступним чином:

$$\begin{aligned}
&B_1 = \tfrac{1}{2}\mathbb{I}^n;\\
&B_2 = \tfrac{1}{2^2}\mathbb{I}^n + \tfrac{1}{2}y_0;\\
&\dots\\
&B_k = \tfrac{1}{2^k}\mathbb{I}^n + \left(\tfrac{1}{2} + ... + \tfrac{1}{2^{k-1}}\right) y_0,\\
&\dots
\end{aligned}$$

Легко бачити, що B_i – це зменшені копії куба $\mathbb{I}^n$, розташовані по його діагоналі.

Для довільного $i \in \mathbb{N}$ через β_i позначимо гомеоморфізм, що є відображенням подібності, для якого $\beta_i(\mathbb{I}^n) = B_i$. Зазначимо, що відображення подібності не змінює виміру Гаусдорфа множини.

Для кожного $i \in \mathbb{N}$ нехай α_i деяке вкладення відрізка $[-1,1]$ в B_i. Для кожного $x \in Q$, $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ нехай $\hat{x} \in Q$ - точка, означена наступним чином:

$$\hat{x} = (\underbrace{x_1}, \underbrace{x_1, x_2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3}, \underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4}, \ldots).$$

Означимо відображення $\mu\colon Q \to \exp(V)$ за допомогою формули

$$\mu(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\hat{x}_i) \cup \{y_0\}.$$

Очевидно, що для кожного $x \in Q$, множина $\mu(x)$ є компактною підмножиною у V. З іншого боку, множина $\mu(x)$ є зліченною підмножиною простору V, отже, $\dim_H(\mu(x)) = 0$.

Нехай $\Gamma \subset [0,n)$ довільна зліченна цілком впорядкована множина, $i\colon \Gamma \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – бієкція і позначимо $N_\gamma = \{i(\gamma,j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ для кожного $\gamma \in \Gamma$. Тоді $i(\gamma,p)$ p-ий елемент множини N_γ. Нехай $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ спадна послідовність σ-компактних підмножин в Q. Для кожного $\gamma \in \Gamma$ запишемо $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A^p_\gamma$, де A^p_γ компактні підмножини в Q.

Оскільки множина Γ цілком впорядкована, можемо стверджувати, що для кожного $\gamma \in \Gamma$, існує елемент $\gamma' \in \Gamma \cup \{n\}$ який безпосередньо слідує за γ в $\Gamma \cup \{n\}$. Для кожного $\gamma \in (0,n]$ існує множина $C \in \exp(\mathbb{I}^n) \subset \exp(V)$ така, що $\dim_H(C) = \gamma$. Для $\gamma \in \Gamma$

та $p \in \mathbb{N}$, нехай множина $C_{i(\gamma,p)} \in \exp(\mathbb{I}^n)$ така, що $\dim_H(C_{i(\gamma,p)}) = \gamma'$, де γ' слідує за γ в $\Gamma \cup \{n\}$.

Множина $\overline{V}$ – континуум Пеано. Тому $\exp(\overline{V}) \setminus \exp_\omega(\overline{V})$ гомотопійно нехтувана у просторі $\exp(\overline{V})$, тобто множина $\exp_\omega(\overline{V})$ гомотопійно щільна у просторі $\exp(\overline{V})$. Оскільки правильною є рівність $\exp_\omega(V) = \exp_\omega(\overline{V}) \cap \exp(V)$ і множина $\exp(V)$ відкрита у просторі $\exp(\overline{V})$, то можемо стверджувати, що множина $\exp_\omega(V)$ гомотопійно щільна у просторі $\exp(V)$ або, що те саме, множина $\exp(V) \setminus \exp_\omega(V)$ гомотопійно нехтувана в $\exp(V)$ (детальніше див., наприклад, [10], [3]). Тому, використовуючи означення гомотопійної нехтуваності, ми можемо побудувати неперервне відображення $\eta_i : \mathbb{I} \to \exp(V)$ таке, що $\eta_i(0) = C_i$ і $\eta_i((0,1]) \subseteq \exp_\omega(V)$.

Легко бачити, що формула

$$\varphi(x) = \{y_0\} \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{p=1}^{\infty} \beta_{i(\gamma,p)}(\eta_{i(\gamma,p)}(d(x, A_\gamma^p)))$$

означує неперервне відображення простору Q в $\exp(V)$.

Тепер означимо відображення $\xi : Q \to \exp(V)$ наступною формулою:

$$\xi(x) = \varphi(x) \cup [\mu(x) + y_0].$$

Якщо $x \in \mathcal{A}_\gamma$, нехай p такий номер, що A_γ^p містить x. В такому випадку $d(x, A_\gamma^p) = 0$, і $\varphi(x) \supset C_{i(\gamma,p)}$, де $\dim_H(C_{i(\gamma,p)}) = \gamma'$. Оскільки $\xi(x) \supset \varphi(x)$, то

$$\dim_H(\xi(x)) \geq \dim_H(C_{i(m,p)}) = \gamma'$$

Оскільки, за побудовою, $\gamma' > \gamma$, то для $x \in \mathcal{A}_\gamma$, $\xi(x) \in HD_{>\gamma}(V)$. Якщо $x \notin \mathcal{A}_\gamma$, то $x \notin \mathcal{A}_{\gamma_1}$ для кожного $\gamma_1 \geq \gamma$, тобто $d(x, A_{\gamma_1}^p) > 0$ для $\gamma_1 \geq \gamma$ і $p \geq 1$. Таким чином, множина $\eta_{i(\gamma_1,p)}(d(x, A_{\gamma_1}^p))$ є скінченною, якщо $\gamma_1 \geq \gamma$; оскільки $\dim_H(\eta_{i(\gamma_1,p)}(d(x, A_{\gamma_1}^p))) \leq \gamma$ для означених вище γ_1 і p, множина $\varphi(x)$ є об'єднанням зліченної кількості множин, вимір Гаусдорфа яких не перервищує γ, тому $\dim_H(\varphi(x)) \leq \gamma$ (за властивістю виміру Гаусдорфа, див. [8], [9]). Оскільки, $\dim_H(\mu(x)) = 0$, то, очевидно, $\dim_H(\xi(x)) \leq \gamma$. Це означає, що для $x \notin \mathcal{A}_\gamma$, $\xi(x) \notin HD_{>\gamma}(V)$. Таким чином, $\xi^{-1}(HD_{>\gamma}(V)) = \mathcal{A}_\gamma$.

Тепер доведемо умову (2). Зауважимо спочатку, що відображення $\mu(x)$ є ін'єктивним. Нехай, для деяких скінченних підмножин F, F' простору V і деяких елементів x, x' в Q виконується рівність $\xi(x) \cup F = \xi(x') \cup F'$. Оскільки F і F' скінченні множини, ми можемо знайти $\varepsilon > 0$ таке, що

$$O_\varepsilon(2y_0) \cap (\xi(x) \cup F) = O_\varepsilon(2y_0) \cap (\mu(x) + y_0)$$

і, відповідно,

$$O_\varepsilon(2y_0) \cap (\xi(x') \cup F') = O_\varepsilon(2y_0) \cap (\mu(x') + y_0).$$

Оскільки координати точки x зустрічаються нескінченну кількість разів в координатах точки $\hat{x}$, що також є правильним для точки x', легко бачити, що $x = x'$.

Виконання умови (3) очевидне. $\square$

Лема 2. *Якщо $n \geq 2$, $\Gamma \subset [1, n)$ – зліченна цілком впорядкована множина, $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – спадна послідовність σ-компактних підмножин простору Q, V – δ-окіл нуля в $\mathbb{R}^n$ для деякого фіксованого $\delta > 2\sqrt{n}$, континуум $D \in \mathcal{A}(V)$ такий, що $\mathbf{0} \in D$, то існує неперервне відображення $\xi : Q \to \exp_c(V)$ яке задовольняє наступні умови:*

(1) $\xi^{-1}(HD^c_{>\gamma}(V) = \mathcal{A}_\gamma$ для кожного $\gamma \in \Gamma$;

(2) для кожного $x \in Q$, $x \neq \mathbf{0}$ і кожного континууму D' для якого $\mathbf{0} \in D' \subset D$, $D' \cup \xi(x) \notin \mathcal{A}(V)$;

(3) якщо x, x' довільні дві точки простору Q і L, L' два підконтинууми простору V для яких $L \cup L' \subset D$ і $\xi(x) \cup L = \xi(x') \cup L'$, то $x = x'$.

Доведення. Для кожного $x \in Q$, $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ нехай $\hat{x} \in Q$ – точка, означена наступним чином:

$$\hat{x} = (\underbrace{x_1}, \underbrace{x_1, x_2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3}, \underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4}, \ldots).$$

Означимо $R : Q \to \exp_c(V)$ за допомогою формули:

$$R(x) = [0,1]\times\{0\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}\times\begin{cases}\left[0,\frac{\hat{x}_n}{2^n}\right], \hat{x}_n \geq 0;\\ \left[\frac{\hat{x}_n}{2^n},0\right], \hat{x}_n \leq 0.\end{cases}$$

Для всіх $x,y \in V$ через $\overline{xy}$ позначимо відрізок у V, що з'єднує x і y. Крім того, для $x,y\in V$ і $r\in[0,\infty)$ нехай

$$l(x,y,r) = \{p\in\overline{xy} \mid d(p,\{x,y\})\leq r\}.$$

Нехай $\Gamma\subset[1,n)$ довільна зліченна цілком впорядкована множина, $i\colon\Gamma\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ – бієкція і позначимо $N_\gamma = \{i(\gamma,j)\mid j\in\mathbb{N}\}$ для кожного $\gamma\in\Gamma$. Тоді $i(\gamma,p)$ p-ий елемент множини N_γ. Зафіксуємо спадну послідовність σ-компактних підмножин $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в Q. Для кожного $\gamma\in\Gamma$ запишемо $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_\gamma^p$, де A_γ^p компактні підмножини в Q.

Оскільки множина Γ цілком впорядкована, можемо стверджувати, що для кожного $\gamma\in\Gamma$, існує елемент $\gamma'\in\Gamma\cup\{n\}$ який безпосередньо слідує за γ в $\Gamma\cup\{n\}$. Не важко показати (див., наприклад, [1]), що для кожного $\gamma\in(1,n]$ існує множина $C\in\exp_c(\mathbb{I}^n)\subset\exp_c(V)$ така, що $\dim_H(C)=\gamma$ і $\{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)\}\subset C$. Для $\gamma\in\Gamma$ та $p\in\mathbb{N}$, нехай множина $C_{i(\gamma,p)}\in\exp_c(\mathbb{I}^n)$ така, що $\dim_H(C_{i(\gamma,p)}) = \gamma'$, де γ' слідує за γ в $\Gamma\cup\{n\}$.

З міркувань, аналогічних до наведених в доведенні леми 1, маємо, що множина $\exp(V)\backslash\exp_\omega(V)$ є гомотопійно нехтуваною у просторі $\exp(V)$, тому ми можемо побудувати неперервне відображення $\varphi_i : \mathbb{I}\to\exp(V)$ таке, що $\varphi_i(0)=C_i$, $\varphi_i((0,1])\subseteq\exp_\omega(V)$, $d_H(\varphi_i(0),\varphi_i(t))\leq t$ і $\{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)\}\subset\varphi_i(t)$ для кожного $t\in\mathbb{I}$.

Для всіх $\gamma\in\Gamma$, $p\in\mathbb{N}$ і $x\in Q$ нехай

$$T_{i(\gamma,p)}(x) = \begin{cases}\varphi_{i(\gamma,p)}(d(x,A_\gamma^p)), \text{ якщо } d(x,A_\gamma^p)=0;\\ \bigcup\limits_{a,b\in\varphi_{i(\gamma,p)}(d(x,A_\gamma^p))} l(a,b,d(x,A_\gamma^p)),\\ \qquad\qquad \text{якщо } d(x,A_\gamma^p)>0.\end{cases}$$

Розглянемо послідовність компактних підмножин $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ простору $\mathbb{R}^n$, що збігається до точки $(1,0,...,0)$, означену наступним чином:

$$\begin{aligned}&B_1 = \tfrac{1}{2}\mathbb{I}^n;\\ &B_2 = \tfrac{1}{2^2}\mathbb{I}^n + \tfrac{1}{2}y_0;\\ &\ldots\\ &B_k = \tfrac{1}{2^k}\mathbb{I}^n + \left(1-\tfrac{1}{2^{k-1}}\right)y_0;\\ &\ldots\end{aligned}$$

де $y_0 = (1,0,...,0)$.

Нехай $\beta_i:\mathbb{I}^n\to B_i$ – гомеоморфізм, що є відображенням подібності. Нехай $D\in\mathcal{A}(V)$ – довільний підконтинуум у V, що є скінченним об'єднанням дуг, заданий умовою леми. В такому разі, ми можемо знайти відображення подібності $\nu\colon V\to V$, що є комбінацією стиску і повороту відносно початку координат, для якого $\nu((2,0,\ldots,0))\in V\backslash D$. Зауважимо, що таке відображення не змінює виміру Гаусдорфа множини. Тепер означимо відображення $\xi : Q\to\exp_c(V)$ наступним чином:

$$\xi(x) = \nu\left(\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\bigcup_{p=1}^{\infty}\beta_{i(\gamma,p)}\cdot T_{i(\gamma,p)}(x)\right]\cup\right.$$
$$\left.\cup[R(x)\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{(n-2)}+y_0]\right).$$

Нам потрібно спочатку перевірити, що $\xi(x)\in\exp_c(V)$. Очевидно, що множина $R(x)$ є зв'язною і точка

$$(1,0,...,0)\in R(x)\times\underbrace{\{0\}\times\ldots\times\{0\}}_{(n-2)}+y_0.$$

Якщо $i\to\infty$, то послідовність $\{\beta_i(T_i(x))\}_{i=0}^\infty$ збігається до точки $(1,0,...,0)$ (за побудовою). Крім того, за побудовою для кожного $i\in\mathbb{N}$, точки $(0,0,...,0)$ і $(1,0,...,0)$ належать до множини $T_i(x)$. Якщо $d(x,A_i)=0$, то за побудовою, множина $T_i(x)=C_i$ є зв'язною. Отже, якщо для $d(x,A_i)>0$ множина $T_i(x)$ є зв'язною, то, очевидно, що множина $\bigcup\limits_i\beta_i(T_i(x))$ є зв'язною і множина $\xi(x)$ є зв'язною. Таким чином, нам достатньо показати, що для

$d(x, A_i) > 0$, множина $T_i(x)$ є зв'язною. Припустимо, що множина

$$P = \bigcup_{a,b\in\varphi_{i(\gamma,p)}(d(x,A^p_\gamma))} l(a, b, d(x, A^p_\gamma))$$

незв'язна. Тоді можемо записати її як $P = U \cup V$, де U і V - диз'юнктні, непорожні, відкриті підмножини в P. Позначимо $F = U \cap \varphi_{i(\gamma,p)}(d(x, A^p_\gamma))$ і $G = V \cap \varphi_{i(\gamma,p)}(d(x, A^p_\gamma))$. Тоді обидві множини F і G непорожні. Оскільки, за побудовою відображення φ_i, $d_H(C_{i(\gamma,p)}, F \cup G) \le d(x, A^p_\gamma)$, звідси випливає, що

$$C_{i(\gamma,p)} \subseteq \overline{O_{d(x,A^p_\gamma)}(F)} \cup \overline{O_{d(x,A^p_\gamma)}(G)}.$$

Із зв'язності $C_{i(\gamma,p)}$ і того факту, що обидві множини F і G непорожні випливає, що

$$\overline{O_{d(x,A^p_\gamma)}(F)} \cap \overline{O_{d(x,A^p_\gamma)}(G)} \ne \varnothing.$$

Отже, існують $a \in F$ і $b \in G$ такі, що $d(a, b) \le 2d(x, A^p_\gamma)$. Таким чином точка $\frac{1}{2}(a + b)$ належить одночасно множинам U і V. Ми отримали протиріччя.

Якщо $x \in \mathcal{A}_\gamma$, нехай p такий номер, що A^p_γ містить x. У цьому випадку $d(x, A^p_\gamma) = 0$, і $\xi(x) \supset T_{i(\gamma,p)}(x)$, де $\dim_H(T_{i(\gamma,p)}(x)) = \gamma'$ і $\gamma' \ge \gamma$. Це означає, що для $x \in \mathcal{A}_\gamma$, $\xi(x) \in HD^c_{>\gamma}(V)$. Якщо $x \notin \mathcal{A}_\gamma$, то $x \notin \mathcal{A}_{\gamma_1}$ для кожного $\gamma_1 \ge \gamma$, тоді $d(x, A^p_{\gamma_1}) > 0$ для $\gamma_1 \ge \gamma$ і $p \ge 1$. Отже, множина $T_{i(\gamma_1,p)}(x)$ за побудовою є скінченним об'єднанням одновимірних множин, тому $\dim_H(T_{i(\gamma_1,p)}(x)) = 1$ для $\gamma_1 \ge \gamma$. Це означає, що множина $\xi(x)$ є об'єднанням зліченної кількості одновимірних множин і зліченної кількості множин, вимір Гаусдорфа яких не перевищує γ, а тому $\xi(x) \notin HD^c_{>\gamma}(V)$. Тому, $\xi^{-1}(HD^c_{>\gamma}(V)) = \mathcal{A}_\gamma$.

Для доведення умови (2) зауважимо, що множина $R(x) \notin \mathcal{A}(V)$ для всіх $x \in Q$, $x \ne \mathbf{0}$ і $\xi(x)$, за означенням, містить копію $R(x)$.

Нам залишилось довести умову (3). Зауважимо спочатку, що $R(x)$ є ін'єктивним відображенням. Нехай для деяких $x, x' \in Q$ і $L, L' \in \mathcal{A}(V)$, де $L \cup L' \subset D$ виконується рівність $\xi(x) \cup L = \xi(x') \cup L'$. Оскільки інтервал $\left[0, \frac{\hat{x}_n}{2^n}\right]$ має довжину максимум $\frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, то за побудовою відображення ν, існує окіл U точки $\nu((2, 0, ..., 0))$ такий що $U \subset V\beta(L \cup L')$. Це означає, що

$$U\cap(\xi(x)\cup L) = U\cap\xi(x) = U\cap(\xi(x')\cup L') = U\cap\xi(x').$$

Тоді, з побудови відображення ξ випливає, що існує $\varepsilon \in (0, 1)$ для якого

$$R(x)\cap([\varepsilon, 1]\times[-\varepsilon, \varepsilon]) = R(x')\cap([\varepsilon, 1]\times[-\varepsilon, \varepsilon]).$$

Оскільки координати точки x зустрічаються нескінченне число разів в координатах точки $\hat{x}$ (на визначених позиціях), і те ж є правильним для точки x', то звідси легко випливає рівність $x = x'$. $\square$

Зауваження 1. *Останні дві леми ми довели для випадку зліченної цілком впорядкованої множини* Γ. *Легко поширити ці доведення на випадки інших зліченних множин з класу* $\mathcal{C}$. *Для цього досить внести такі зміни:*

(a) *Якщо* Γ *- зліченна множина, скінченна похідна якої є порожньою множиною, то позначимо через* $P \subseteq [0, n)$ *множину тих* x *з інтервалу* $[0, n)$ *для яких в* Γ *існує послідовність* $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ *така, що* $x = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k$ *і* $x < \gamma_k$ *для кожного* $k \in \mathbb{N}$. *Нехай* $\Gamma_1 = \Gamma \backslash P$ *і* $\Gamma_2 = \Gamma \cup P \cup \{n\}$. *Оскільки скінченна похідна множини* Γ *дорівнює* $\varnothing$, *то* $\Gamma_1 \ne \varnothing$. *Очевидно,* $\Gamma_1 \subseteq \Gamma \subset \Gamma_2$ *і для кожного* $\gamma \in \Gamma_1$ *у множині* Γ_2 *існує елемент* γ', *який слідує за* γ *в* Γ_2. *Для* $\gamma \in \Gamma_1$ *і* $p \in N_\gamma$, *нехай* $C_{i(\gamma,p)} \in \exp(V)$ *(або* $\exp_c(V)$ *відповідно) така множина, що* $\dim_H(C_{i(\gamma,p)}) = \gamma'$, *де* γ' *слідує за* γ *в* Γ_2. *Тоді у лемі 1:*

$$\varphi(x) = \{y_0\} \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma_1} \bigcup_{p=1}^{\infty} \beta_{i(\gamma,p)}(\eta_{i(\gamma,p)}(d(x, A^p_\gamma)));$$

у лемі 2:

$$\xi(x) = \nu\left(\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1} \bigcup_{p=1}^{\infty} \beta_{i(\gamma,p)} \cdot T_{i(\gamma,p)}(x)\right] \cup \right.$$

$$\left. \cup[R(x) \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{(n-2)} + y_0]\right).$$

(b) *Якщо* Γ *зліченна множина, порядково ізоморфна множині раціональних чисел* $\mathbb{Q}$ *, то для* $\gamma \in \Gamma$ *і* $p \in \mathbb{N}$ *, нехай* $C_{i(\gamma,p)} \in \exp(V)$ *(або* $\exp_c(V)$ *відповідно) така множина, що* $\dim_H(C_{i(\gamma,p)}) = \gamma$ *.*

4.2. Доведення сильної універсальності. Перевіримо тепер виконання умови (III).

{*Випадок послідовності* $\{HD_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$ }. Нехай $\varepsilon > 0$. Виберемо спадну послідовність σ-компактних підмножин $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ простору Q і для кожного $\gamma \in \Gamma$ запишемо $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A^p_\gamma$, де множини A^p_γ – компактні підмножини простору Q. Нехай $f : Q \to \exp(X)$ довільне відображення, що є Z-вкладенням на деякій компактній підмножині K простору Q. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що відображення f є Z-вкладенням оскільки простір $\exp(X)$ гомеоморфний до простору Q. Таким чином, ми можемо припустити , що $f[Q\backslash K] \cap f[K] = \varnothing$.

Оскільки $X \in ANR$, існує зліченний, локально скінченний симпліціальний комплекс N і відображення $\pi : Q\backslash K \to N$, $\mu : N \to \exp(X)$ такі, що $f \mid Q\backslash K = \mu \circ \pi$. Так само, ми можемо припустити, що відображення π є сюр'єктивним (детальніше див. [3], с.12).

Виберемо достатньо малу триангуляцію комплекса N таку, що для кожного симплекса $\sigma \in N$

(1) $\operatorname{diam}_{d_H}(\mu(\sigma)) < \frac{1}{12}\varepsilon_\sigma$,

де $\varepsilon_\sigma = \min\{\varepsilon, \frac{1}{3}\inf\{d_H(\mu(y), f[K]) \mid y \in \overline{St}(\sigma)\}\}$.

Для кожного $\eta > 0$, множина

$$\{y \in N \mid d_H(\mu(y), f[K]) \geq \eta\}$$

є компактом (див. [6],с.122). Це означає, що ми можемо побудувати послідовність $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ скінченних підкомплексів комплекса N таку, що $N = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ і, крім того, виконуються наступні умови:

(2) для кожного симплекса σ комплекса N_k , $\overline{St}(\sigma) \subset Int(N_{k+1})$;

(3) $\operatorname{Sup}\{d_H(\mu(y), f[K]) \mid y \in N_{k+1}\} < \frac{1}{3}\inf\{d_H(\mu(y), f[K]) \mid y \in N_k\}$.

Нехай $N_k = \varnothing$ для $k \leq 0$. Для кожної вершини $v \in N^{(0)}$ виберемо скінченну множину $F_v \subset X$ таку, що

(4) $d_H(\mu(v), F_v) < \frac{1}{12}\varepsilon_v$.

Зафіксуємо для кожної вершини $v \in N^{(0)}$, довільну точку $a_v \in F_v$.

Для кожної вершини $v \in N^{(0)}$ нехай k – єдине ціле число для якого виконується умова $v \in N^{(0)}_k \backslash N^{(0)}_{k-1}$. Для кожної вершини $v \in N^{(0)}$, можемо знайти непорожню відкриту кулю V_v в X з центром у точці a_v таку, що

(5) $\operatorname{diam} V_v < \frac{1}{12}\varepsilon_v$;

(6) V_v гомеоморфна до V , де V – область в $\mathbb{R}^n$, визначена в умовах леми 1;

(7) якщо $v \in N_k\backslash N_{k-1}$ і $v \neq v' \in N^{(0)}_{k+2}\backslash N^{(0)}_{k-2}$, то $V_v \cap V_{v'} = \varnothing$.

Щодо умови (6) зауважимо, що за теоремою Неша (див. [2], [5]), існує ізометричне вкладення многовида X в $\mathbb{R}^k$ для достатньо великого k . Тому можемо вважати, що X – підмноговид в $\mathbb{R}^k$. У такому разі X локально виглядає як графік деякої диференційовної функції $h \colon U \to \mathbb{R}^{k-n}$, де U – область в $\mathbb{R}^n$. Відображення $h_1 \colon U \to U \times h[U]$, що діє за формулою $h_1(x) = (x, h(x))$, біліпшицево відображає U на $h_1[U]$, причому остання множина відкрита в X . Тому, для точки a_v існує окіл $V_v = h_1[U]$, для деякої області U в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, область U може бути вибрана такою, для якої існує гомеоморфізм $h_2 \colon U \to V$, що є відображенням подібності. Позначимо через $h_v \colon V_v \to V$ – гомеоморфізм, який є композицією h_2 та $h_1^{-1} \mid V_v$. Тоді h_v біліпшицево відображає V_v на V . Нехай $\xi_v = (\exp h_v)^{-1} \circ \xi : Q \to \exp(V_v)$ – відображення, де ξ відображення, що задовольняє умови леми 1. Множина V_v зв'язна і локально лінійно зв'язна, тому $\exp(V_v) \in AR$. Крім того множина $\exp(V_v) \setminus \exp_\omega(V_v)$ є гомотопійно нехтуваною у просторі $\exp(V_v)$, тому ми можемо продовжити відображення ξ_v до відображення $\overline{\xi}_v : con(Q) \to \exp(V_v)$ такого, що $\overline{\xi}_v(con(Q)\setminus Q) \subset \exp_\omega(V_v)$ і $\overline{\xi}_v(\omega) = \{a_v\}$.

Нехай $\sigma = \langle v_0, v_1 \rangle$ – 1-симплекс в N. З (1) і (4) випливає, що

$$d_H(F_{v_0}, F_{v_1}) \leq d_H(\mu(v_0), F_{v_0}) + d_H(\mu(v_0), \mu(v_1)) + +d_H(F_{v_1}, \mu(v_1)) < < \frac{1}{12}\varepsilon_{v_0} + \frac{1}{12}\varepsilon_\sigma + \frac{1}{12}\varepsilon_{v_1} \leq \frac{1}{4}\varepsilon_\sigma.$$

Отже, для кожної точки $y \in F_{v_0}$ існує точка $z \in F_{v_1}$ така, що $d(y,z) < \frac{1}{4}\varepsilon_\sigma$ і навпаки. Тоді, існує скінченна сім'я K_σ дуг в X діаметр яких $< \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$, які з'єднують точки множини F_{v_0} з точками множини F_{v_1}, і такі, що $F_{v_0} \cup F_{v_1} \subset \cup K_\sigma$. Для $A \in K_\sigma$ нехай $\alpha_A : \mathbb{I} \to A$ гомеоморфізм такий, що $\alpha_A(0) = A \cap F_{v_0}$ і $\alpha_A(1) = A \cap F_{v_1}$. Тоді відображення $\alpha_\sigma : \mathbb{I} \to \exp_\omega(X)$, означене як

$$\alpha_\sigma(t) = \cup\{\alpha_A(t) \mid A \in K_\sigma\}$$

є шляхом, діаметр якого $< \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$, який з'єднує множини F_{v_0} і F_{v_1}. Означимо тепер неперервне відображення Φ простору $N \times Q$ в $\exp(X)$. Якщо v вершина комплекса N, позначимо

$$\Phi(v,x) = F_v \cup \overline{\xi}_v[x,1].$$

Якщо $\sigma = \langle v_0, v_1 \rangle$ є 1-симплексом комплексу N і якщо $z = (1-t)v_0 + tv_1$, нехай

$$\Phi(z,x) = = \begin{cases} \overline{\xi}_{v_0}[x,1] \cup F_{v_0} \cup \alpha_\sigma(4t), & \text{якщо } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ \overline{\xi}_{v_0}[x,1] \cup F_{v_0} \cup F_{v_1} \cup \overline{\xi}_{v_1}[x, 4t-1], & \text{якщо } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \overline{\xi}_{v_0}[x, 3-4t] \cup F_{v_0} \cup F_{v_1} \cup \overline{\xi}_{v_1}[x,1], & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ \alpha_\sigma(4t-3) \cup F_{v_1} \cup \overline{\xi}_{v_1}[x,1], & \text{якщо } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Нехай $r : N \to \exp_\omega(N^{(1)})$ – неперервне відображення таке, що $r(x) = \{x\}$ якщо $x \in N^{(1)}$ і $r(\tau) \subset \exp_\omega(\tau^{(1)})$ для кожного симплекса τ комплекса N. Позначимо для точки z в N,

$$\Phi(z,x) = \cup\{\Phi(y,x) \mid y \in r(z)\}.$$

Тепер означимо $g : Q \to \exp(X)$ наступним чином:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in K; \\ \Phi(\pi(x), x), & \text{якщо } x \in Q\setminus K. \end{cases}$$

Ми стверджуємо, що g – шукане відображення, тобто, g наближує f і задовольняє властивості, встановлені в означенні сильної $\mathcal{F}_\sigma$-універсальності.

Доведення цього факту розбивається на такі кроки:

КРОК 1: Відображення g коректно визначене, неперервне і задовольняє рівність $g \mid K = f \mid K$. Крім того, для кожного $x \in Q$,

$$d_H(f(x), g(x)) \leq \min\{\varepsilon, \frac{1}{3} d_H(f(x), f[K])\}.$$

(a) Нехай $x \in Q$. Якщо $x \in Q\setminus K$, то множина $g(x)$ є компактною і непорожньою, як скінченне об'єднання компактних непорожніх множин. Якщо $x \in K$, то $g(x) = f(x)$, яка також є компактною та непорожньою. Отже, для кожного $x \in Q$, $g(x) \in \exp(X)$.

(b) Оскільки $g \mid K = f \mid K$ за побудовою, достатньо показати, що для $x \in Q\setminus K$ виконується нерівність

$$d_H(f(x), g(x)) \leq \min\{\varepsilon, \frac{1}{3} d_H(f(x), f[K])\}.$$

Спочатку покажемо, що для кожних $(z,x) \in N \times Q$,

$$(8)\quad d_H(\mu(z), \Phi(z,x)) < \min\{\varepsilon, \tfrac{1}{3} d_H(\mu(z), f[K])\}.$$

Для того, щоб зробити це, використаємо умову (5). Очевидно, що

$$d_H(F_v, \Phi(v,x)) < \frac{1}{12}\varepsilon_v$$

для кожної вершини v. Якщо $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ є 1-симплексом комплексу N і якщо $y \in \sigma$, за означенням відображення Φ маємо:

$$d_H(F_{v_0}, \Phi(y,x)) < \max\{\frac{1}{12}\varepsilon_{v_0}, \mathrm{diam}_d(\alpha_\sigma)+$$

$$+\frac{1}{12}\varepsilon_{v_1}\} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma + \frac{1}{12}\varepsilon_{v_1} \leq \frac{7}{12}\varepsilon_\sigma.$$

Нехай $z \in N$ і τ – симплекс який містить точку z. Якщо $y \in r(z) \subset \tau^{(1)}$ і якщо σ є 1-симплексом що містить y, існує вершина v симплекса σ така, що

$$d_H(F_v, \Phi(y,x)) < \frac{7}{12}\varepsilon_\sigma,$$

звідси

$$d_H(\mu(z), \Phi(y,x)) \leq d_H(\mu(z), \mu(v))+$$

$$+d_H(\mu(v), F_v) + d_H(F_v, \Phi(y,x)) <$$

$$< \frac{1}{12}\varepsilon_\tau + \frac{1}{12}\varepsilon_v + \frac{7}{12}\varepsilon_\sigma \leq \varepsilon_\tau <$$

$$< \min\{\varepsilon, \frac{1}{3}d_H(\mu(z), f[K])\}.$$

Оскільки $\Phi(z,x)$ є об'єднанням $\Phi(y,x)$ для y в $r(z)$, то означення метрики Гаусдорфа доводить нерівність (8). Оскільки $f|Q\backslash K = \mu\circ\pi$, то використовуючи (8) отримуємо

(9) $d_H(f(x), g(x)) \leq \min\{\varepsilon, \frac{1}{3}d_H(f(x), f[K])\}$.

(c) Неперервність відображення g випливає з неперервності використаних при його побудові відображень і з нерівності (9).

КРОК 2: Відображення g ін'єктивне.

Зауважимо спочатку, що з факту, доведеного кроком 1 і з того, що відображення f є вкладенням, випливає, що

(10) $g[Q\backslash K] \cap g[K] = \varnothing$.

Зафіксуємо тепер $x, x' \in Q$. Якщо обидві точки x і x' належать до K, то, оскільки $g \mid K = f \mid K$ і оскільки відображення f є вкладенням, очевидно, що з рівності $g(x) = g(x')$ випливає рівність $x = x'$. Якщо $x \notin K$ і $x' \in K$, то з (10) випливає, що $g(x) \neq g(x')$. Тобто, не зменшуючи загальності, можемо припустити, що $x, x' \in Q\backslash K$.

Нехай $g(x) = g(x')$. Нам необхідно показати, що $x = x'$. Нехай $z = \pi(x)$, $z' = \pi(x')$ і k, k' – єдині цілі числа такі, що $z \in N_k\backslash N_{k-1}$ і $z' \in N_{k'}\backslash N_{k'-1}$. Спочатку доведемо, що $|k-k'| \leq 1$. Насправді, припустимо протилежне, тобто припустимо, що $k < k'-1$. Використавши (8), маємо

$$d_H(g(x), f[K]) = d_H(\Phi(z,x), f[K]) \geq$$

$$\geq d_H(\mu(z), f[K]) - d_H(\mu(z), \Phi(z,x)) >$$

$$> \frac{2}{3}d_H(\mu(z), f[K]).$$

Використавши (3) і (8), маємо

$$d_H(g(x'), f[K]) = d_H(\Phi(z',x'), f[K]) \leq$$

$$\leq d_H(\Phi(z',x'), \mu(z')) + d_H(\mu(z'), f[K]) <$$

$$< \frac{4}{3}d_H(\mu(z'), f[K]) < \frac{4}{9}d_H(\mu(z), f[K]) <$$

$$< \frac{2}{3}d_H(g(x), f[K]),$$

що суперечить рівності $g(x) = g(x')$.

Тепер можемо припустити, що $k' = k$ або $k' = k+1$. Нехай τ і τ' – найменші симплекси, що містять z і z' відповідно. Оскільки $k \leq k' \leq k+1$ і $z \in N_k\backslash N_{k-1}$, $z' \in N_{k'}\backslash N_{k'-1}$, то умова (2) гарантує нам, що $\tau\cup\tau' \subset N_{k+2}\backslash N_{k-2}$. Нехай $y \in r(z)$ і v_1 – вершина симплекса τ така, що $\Phi(y,x)$ містить $\Phi(v_1, x) \supset \overline{\xi}_{v_1}[x,1]$. Оскільки $\tau\cup\tau' \subset N_{k+2}\backslash N_{k-2}$, то умова (7) гарантує нам, що $\overline{\xi}_v(con(Q)) \cap V_{v_1} = \varnothing$ для кожної вершини v симплекса $\tau\cup\tau'$ і $v \neq v_1$. У такому випадку, множина $g(x) \cap V_{v_1}$ є об'єднанням множини $\overline{\xi}_{v_1}[x,1]$ і деякої скінченної множини. Оскільки множина $\overline{\xi}_{v_1}[x,1]$ є нескінченною (за побудовою відображення ξ), то $g(x') \cap V_{v_1} = g(x) \cap V_{v_1}$ є нескінченною. Але множина $\overline{\xi}_{v_1}[x',t]$ є скінченною для кожного $t < 1$. Тому, ми можемо стверджувати, що $g(x')$ містить $\overline{\xi}_{v_1}[x',1]$ і, відповідно, множина $g(x') \cap V_{v_1}$ є об'єднанням множини $\overline{\xi}_{v_1}[x',1]$ і деякої скінченної множини. Маємо $\overline{\xi}_{v_1}[x,1] \cup F = \overline{\xi}_{v_1}[x',1] \cup F'$ для деяких скінченних множин F і F'. Оскільки

$\overline{\xi}_{v_1}[x,1]=\xi_{v_1}(x)$ і $\xi_{v_1}=(\exp h_{v_1})^{-1}\circ\xi$, де відображення $(\exp h_{v_1})^{-1}$ є гомеоморфізмом, то

$$\xi(x)\cup\exp h_{v_1}(F)=\xi(x')\cup\exp h_{v_1}(F').$$

За умовою (2) леми 1 ми отримуємо рівність $x=x'$.

КРОК 3: Для кожного $\gamma\in\Gamma$ виконується рівність

$$g^{-1}[HD_{>\gamma}(X)]\backslash K=\mathcal{A}_\gamma\backslash K.$$

Зауважимо спочатку, що оскільки відображення h_v і h_v^{-1} є ліпшицевими, ми можемо стверджувати, що $\dim_H(\xi_v(x))=\dim_H(\xi(x))$.

Виберемо $x\in Q\backslash K$. Нехай $z=\pi(x)$. Якщо $x\notin\mathcal{A}_\gamma$, $\dim_H(\overline{\xi}_v[x,t])\le\gamma$ для кожної вершини v комплекса N і $t\in[0,1]$. Множини F_v і $\alpha_\sigma(t)$ є скінченними для кожного $t\in[0,1]$ і тому ці множини є 0-множинами. За означенням відображення Φ, $\Phi(y,x)$ є множиною, вимір якої $\le\gamma$ для кожного $y\in N^{(1)}$. Оскільки множина $g(x)$ є скінченним об'єднанням таких множин, то $\dim_H(g(x))\le\gamma$.

Якщо $x\in\mathcal{A}_\gamma$, нехай $y\in r(z)$. За побудовою відображення Φ, існує вершина v комплекса N така, що $g(x)\supset\Phi(y,x)\supset\overline{\xi}_v[x,1]$. Тобто,

$$\dim_H(g(x))\ge\dim_H(\overline{\xi}_v[x,1])>\gamma$$

(тут ми використовуємо лему 1).

КРОК 4: Відображення g є Z-вкладенням.

Використавши умову (3) леми 1, легко бачити, що для кожного $x\in Q\backslash K$ множина $g(x)$ є нескінченною. Це означає, що множина

$$g(Q\backslash K)\subset\exp(X)\backslash\exp_\omega(X),$$

тобто множина $g(Q\backslash K)$ є гомотопійно нехтуваною. Оскільки множина $g[K]$ є Z-множиною, то такою є і множина $g(Q)$.

{*Випадок послідовності* $\{HD^c_{>\gamma}(X)\}_{\gamma\in\Gamma}$}. Для доведення теореми у цьому випадку означимо спочатку деякі відображення.

Для двох довільних точок простору X a і b, через $\breve{ab}$ позначимо дугу найменшого діаметра в X, яка з'єднує точки a і b. Крім того, для $a,b\in X$ і $r\in[0,\infty)$ нехай

$$l(a,b,r)=\left[\overline{O_r(a)}\cap\breve{ab}\right]\cup\left[\breve{ab}\cap\overline{O_r(b)}\right].$$

Тепер для $a,b\in X$ і $r\in(0,\infty)$ ми означимо неперервне відображення $\breve{l}^r_{ab}:\mathbb{I}\to\exp(X)$ наступним чином:

$$\breve{l}^r_{ab}(t)=l(a,b,t'),$$

де t' є образом точки t під дією гомеоморфізму $\mathbb{I}\to[0,r]$.

Означимо для деякого $r\in(0,\infty)$ відображення $L^r:\exp_\omega(X)\times\mathbb{I}\to\exp(X)$ наступним чином:

$$L^r(A,t)=\bigcup_{a,b\in A}\breve{l}^r_{ab}(t).$$

Очевидно, відображення L^r є неперервним.

Далі, доведення теореми є аналогічним до доведення попереднього випадку з такими змінами:

(a) Для кожної вершини $v\in N^{(0)}$, нехай множина $\breve{F}_v\in\exp_c(X)$ така, що

$$\breve{F}_v=L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_v,1).$$

За аналогічними аргументами до тих, що наведено в доведенні леми 2, ми можемо стверджувати, що множина $\breve{F}_v$ є зв'язною.

(b) Нехай $h_v:V_v\to V$ – гомеоморфізм такий, що $h_v(a_v)=(0,0,...,0)$ і V – область в $\mathbb{R}^n$, визначена в умовах леми 2.

(c) Відображення $\breve{\alpha}_\sigma:\mathbb{I}\to\exp_c(X)$ ми означуємо наступним чином:

$$\breve{\alpha}_\sigma(t)=\begin{cases}L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_{v_0},1)\cup\alpha_\sigma([0,4t]), & \text{якщо } 0\le t\le\frac14;\\ L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_{v_0},1)\cup\alpha_\sigma([0,1])\cup L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_{v_1},4t-1), & \text{якщо } \frac14\le t\le\frac12;\\ L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_{v_0},3-4t)\cup\alpha_\sigma([0,1])\cup L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_{v_1},1), & \text{якщо } \frac12\le t\le\frac34;\\ \alpha_\sigma([4t-3,1])\cup L^{\frac{1}{12}\varepsilon_\sigma}(F_{v_1},1), & \text{якщо } \frac34\le t\le 1.\end{cases}$$

Неважко перевірити, що шлях $\breve{\alpha}_\sigma$ задовольняє наступні умови: $\breve{\alpha}_\sigma(0) = \breve{F}_{v_0}$, $\breve{\alpha}_\sigma(\frac{1}{2}) = \breve{F}_{v_0} \cup \alpha_\sigma([0,1]) \cup \breve{F}_{v_1}$, $\breve{\alpha}_\sigma(1) = \breve{F}_{v_1}$, $\breve{\alpha}_\sigma(t) \subset \breve{\alpha}_\sigma(t')$ якщо $0 \le t \le t' \le \frac{1}{2}$ і $\breve{\alpha}_\sigma(t) \supset \breve{\alpha}_\sigma(t')$ якщо $\frac{1}{2} \le t \le t'$. Вибір $\breve{\alpha}_\sigma$ гарантує, що для кожного компакта K в $\mathbb{I}$ ми можемо знайти скінченну підмножину K' множини K таку, що містить тільки дві точки і для якої $\cup\breve{\alpha}_\sigma(K) = \cup\breve{\alpha}_\sigma(K')$. Означимо $\breve{\alpha} : N^{(1)} \to \exp_c(X)$ наступним чином: $\breve{\alpha}(y) = \breve{\alpha}_\sigma(t)$, де $y = (1-t)v_0 + tv_1$ для довільного 1-симплекса $\langle v_0, v_1\rangle$.

(d) Для кожного $v \in N_k^{(0)} \backslash N_{k-1}^{(0)}$, нехай $D_v = \cup\{\breve{\alpha}_\sigma(\frac{1}{2}) \mid \sigma \in N_{k+2}^{(1)}\}$ і $\xi_v = (\exp h_v)^{-1} \circ \xi\colon Q \to \exp_c(V_v)$, де ξ – відображення, що задовольняє умови леми 2 і $D_v = D$ в умові леми.

Для відображення $\overline{\xi}_v\colon con(Q) \to \exp(V_v)$ ми додатково припускаємо, що для кожного $t \in \mathbb{I}$, $d_H(\overline{\xi}_v(x,t), \overline{\xi}_v(x,1)) \le (1-t)$.

Означимо $\breve{\xi}_v\colon con(Q) \to \exp_c(V_v)$ наступним чином: $\breve{\xi}_v(\omega) = \{a_v\}$, для $[x,t] \in con(Q)\backslash Q$ нехай $\breve{\xi}_v([x,t]) = L^{(1-t)}(\overline{\xi}_v([x,t]) \cup \{a_v\}, 1)$ і $\breve{\xi}_v([x,1]) = \overline{\xi}_v([x,1])$.

(e) Якщо $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ є 1-симплексом комплекса N і $z = (1-t)v_0 + tv_1$, нехай

$$\Phi(z,x) = \begin{cases} \breve{\xi}_{v_0}[x,1] \cup \breve{\alpha}_\sigma(2t), \\ \qquad \text{якщо } 0 \le t \le \frac{1}{4}; \\ \breve{\xi}_{v_0}[x,1] \cup \breve{\alpha}_\sigma(\frac{1}{2}) \cup \breve{\xi}_{v_1}[x, 4t-1], \\ \qquad \text{якщо} \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2}; \\ \breve{\xi}_{v_0}[x, 3-4t] \cup \breve{\alpha}_\sigma(\frac{1}{2}) \cup \breve{\xi}_{v_1}[x,1], \\ \qquad \text{якщо} \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4}; \\ \breve{\alpha}_\sigma(2t-1) \cup \breve{\xi}_{v_1}[x,1], \\ \qquad \text{якщо } \frac{3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Нехай $r : N \to C(N^{(1)})$ деяке неперервне відображення таке, що $r(x) = \{x\}$ якщо $x \in N^{(1)}$ і $r(\tau) \subset C(\tau^{(1)})$ для кожного симплекса τ комплекса N. З попередніх міркувань випливає, що існує скінченна підмножина K_z в $r(z)$ така, що

$$\cup\{\breve{\alpha}(y) | y \in r(z)\} = \cup\{\breve{\alpha}(y) | y \in K_z\}$$

(ми вибираємо K_z найменшої можливої потужності). Позначимо для z в N

$$\Phi(z,x) = \cup\{\Phi(y,x) | y \in K_z\}.$$

Легко перевірити, що континуум $\breve{\alpha}_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{I}$ є скінченним об'єднанням дуг простору X, тому множина $\cup\{\breve{\alpha}(y) | y \in K_z\}$ є такою ж для кожного $z \in N$.

Накінець, ми зауважимо тільки, що оскільки кожен континуум в $g(Q\backslash K)$ містить вільні дуги, легко бачити, що $g(Q\backslash K)$ є гомотопійно нехтуваною і тому відображення g є Z-відображенням. $\square$

5. Висновки

За теоремою Веста-Кертіса-Шорі (див. [12]) гіперпростір $\exp(X)$ n-вимірного компактного зв'язного многовиду гомеоморфний гільбертовому кубу Q. Застосувавши тепер теорему єдиності поглинаючих систем у гільбертовому кубі (див. [12], [10]) до наслідку 1 та теореми 1, отримуємо наступну теорему:

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, X - n-вимірний компактний зв'язний рімановий многовид і Γ - довільна зліченна впорядкована множина з класу $\mathcal{C}$.*

(1) Якщо $\Gamma \subset [0,n)$, то існує гомеоморфізм $\alpha\colon \exp(X) \to Q^\Gamma$ такий, що для кожного $\gamma \in \Gamma$

$$\alpha[HD_{>\gamma}(X)] = \bigcup_{\gamma' \ge \gamma} \left(\prod_{\gamma'' \ne \gamma'} Q_{\gamma''} \times B(Q)_{\gamma'} \right).$$

(2) Якщо $n \ge 2$ і $\Gamma \subset [1,n)$, то існує гомеоморфізм $\beta\colon \exp_c(X) \to Q^\Gamma$ такий, що для кожного $\gamma \in \Gamma$

$$\beta[HD^c_{>\gamma}(X)] = \bigcup_{\gamma' \ge \gamma} \left(\prod_{\gamma'' \ne \gamma'} Q_{\gamma''} \times B(Q)_{\gamma'} \right).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мазуренко Н.* Топологія гіперпросторів континуумів заданого виміру Гаусдорфа в скінченновимірному кубі // Наук. Вісник Чернівецького унів. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 60 – 65.

2. *Нэш Дж.* Проблема вложений для Римановых многообразий // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. XXVI, вып. 4(160). – С. 173 – 216.

3. *Banakh T., Radul T., Zarichnyi M.* Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds. - Lviv: VNTL Publishers, 1996. - Volume 1. - 231 p.

4. *Bessaga C., Pełczyński A.* Selected topics in infinite-dimensional topology. - Warszawa, 2001. - 352 p.

5. *Brendon Glen E.* Topology and Geometry. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 557 p.

6. *Cauty R.* Suites $\mathcal{F}_\sigma$ -absorbantes en theorie de la dimension // Fund. Math. – 1999. – Vol. 159, № 1942. – P. 115 – 126.

7. *Dijkstra J.J., van Mill J. and Mogilski J.* The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of $(l_f^2)^\omega$ // Pacific J. Math. - 152(1992). - P. 255 - 273.

8. *Edgar Gerald A.* Measure, Topology and Fractal Geometry. - New York: Springer-Verlag, 1995. - 221 p.

9. *Falconer K. J.* The Geometry of Fractal Sets. - Cambridge University Press, 1985. - 162 p.

10. *Gladdines H.* Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds and applications. - Amsterdam: Vrije Universiteit, 1994. - 117 p.

11. *Mazurenko N.* Absorbing sets related to Hausdorff dimension // Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech-Math. – 2003. – Vol.61. – P.121-128.

12. *van Mill J.* The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces. - Amsterdam: Elsevier, 2001. - Volume 64. - 630 p.