УДК 519.217; 519.718; 519.837

©2009 р. Т.О. Лукашів

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСТАТНІ УМОВИ СТАБІЛІЗОВНОСТІ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ЗОВНІШНІМИ МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Одержано достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями.

Received sufficient conditions for the existence of permissible control for linear stochastic systems with random structure of the external Markov switching.

Вступ. В роботі [7] встановлено, що для визначення оптимального керування лінійної стохастичної динамічної системи випадкової структури з лінійною умовою стрибка фазової траєкторії та із зовнішніми марковськими перемиканнями і з квадратичним функціоналом якості, потрібно знайти додатно визначений розв'язок матричних рівнянь.

Необхідні і достатні умови розв'язності цих рівнянь сформулювати в загальному випадку навряд чи видасться можливим. Тому ставиться задача про побудову такого керування, яке б забезпечувало стабілізацію системи і скінченність функціонала якості.

У випадку лінійних стохастичних систем випадкової структури без наявності зовнішніх марковських перемикань вказана задача розв'язана І.Я. Кацом [3].

В даній роботі, користуючись методикою І.Я. Каца [3] дослідження систем випадкової структури і методикою Є.Ф. Царкова [5] врахування зовнішніх марковських перемикань, встановлено достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних динамічних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями.

1. Постановка задачі. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P, F \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\})$ – ймовірнісний базис [2]; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – чисто розривний марковський процес [1] із значеннями в метричному просторі Y з перехідною ймовірністю $P(s, y, t)$; $(\eta_k, k \geq 0)$ – ланцюг Маркова [1] із значеннями в метричному просторі H з перехідною ймовірністю на k -ому кроці $P_k(h, G)$.

На $(\Omega, \mathcal{F}, P, F)$ розглянемо керовну стохастичну лінійну систему, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням (СДР)

$$dx(t) = [A(\xi(t))x(t) + B(\xi(t))u(t)]dt+$$
$$+\sigma(\xi(t))x(t)dw(t), t \geq t_0 \geq 0, \qquad (1)$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi\left(t_k-\right), x(t_k-), \eta_k), \quad (2)$$

$t_k \in S \equiv \{t_n \Uparrow, n \in \mathbb{N}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$,
і з початковими умовами

$$\xi(t_0) \equiv y_0 \in Y, x(t) \equiv x_0 \in D([0,\infty), \mathrm{R}^m),$$
$$\eta_{k_0} \equiv h \in \mathrm{H}, \qquad (3)$$

$D([0, \infty), R^m)$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [12].

Тут $x(t) \equiv x(t) \in R^m$, $u \in R^r$; $A(y)$, $B(y)$, $\sigma(y)$ – відомі матриці-функції розмірності $m \times m$, задані на множині $Y \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ можливих значень марковського ланцюга $\xi(t)$; $w(t)$ – стандартний одновимірний вінерів процес [2].

Відмітимо, що випадкова зміна структури динамічної системи для спрощення дослідження викликається шляхом введення в число незалежних змінних $m \times$

m-вимірних коефіцієнтів $A(\xi(t)), B(\xi(t))$, скалярного чисто розривного марковського процесу $\xi(t) \in R^1$, умовна ймовірність якого допускає розклад [1]

$$P\{\xi(t+\Delta t) \in [\beta, \beta+\Delta\beta]/\xi(t) = \alpha \neq \beta\} =$$
$$= p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t+\Delta t/\xi(t) = \alpha\} =$$
$$= 1 - p(t,\alpha)\Delta t + o(\Delta t), \qquad (4)$$

де $P\{\circ/\circ\}$ – умовна ймовірність, $o(\Delta t)$ – нескінченно мала величина відносно Δt, а $p(t,\alpha,\beta)$ і $p(t,\alpha)$ є заданими функціями.

Цікавим є випадок, коли умова стрибка фазового вектора в момент часу τ із стану $\xi(\tau-0) = \alpha$ в стан $\xi(\tau) = \beta \neq \alpha$ є лінійною [3] і визначається рівністю

$$x(\tau) = K(\alpha,\beta)x(\tau-) + \sum_{s=1}^{N} \xi_s Q_s x(\tau-), \qquad (5)$$

де $\xi_s \equiv \xi_s(\omega)$ – незалежні випадкові величини, для яких $M\xi_s = 0, M\xi_s^2 = 1$; $K(\alpha,\beta), Q_s$ – задані $(m \times m)$-матриці.

Якість перехідного процесу будемо оцінювати квадратичним функціоналом [7]

$$I_{u_k}(y_0, x_0, \eta_{k_0}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{\infty} E\{x^T[t]C_k(\xi(t),\eta_k)x[t]+$$
$$+u^T[t]D_k(\xi(t),\eta_k)u[t]/y_0, x_0, \eta_{k_0}\}dt, \qquad (6)$$

де $C_k(y,h) \geq 0, D_k(y,h) > 0$ – симетричні матриці розмірності $(m\times m)$ і $(r\times r)$ відповідно; символом $u[t]$ позначена керуюча дія $u[t] = u(t, x[t], \xi(t), h)$, яка реалізується в системі (1) – (3) $u = u(t,x,y,h)$, а через $x[t]$ позначено той рух системи (1) – (3), який породжений керуванням $u[t]$.

Означення 1. Керування $u_k(y,x,h)$ для системи (1)-(3) з умовою стрибка (5) називається допустимим, якщо воно забезпечує експоненціальну стійкість в середньому квадратичному розв'язку системи при будь-яких початкових даних (3).

Зауваження 1. Зазвичай в означення допустимого керування включається ще вимога збіжності інтеграла (6). Однак в силу лінійності і однорідності системи (1) – (3), а також умов стрибка (5), вимога експоненціальної стійкості в середньому квадратичному системи автоматично забезпечує збіжність інтеграла (6).

2. Достатні умови існування допустимого керування для лінійної системи. Обговоримо достатні умови існування допустимого керування лінійної системи, коли $\xi(t)$ – однорідний чисто розривний марковський процес, умовна ймовірність переходу якого допускає розклад (4), перехідна щільність якого $p(\alpha,\beta)$ не залежить від часу.

Відомо [7], що якщо коефіцієнти $A(y), B(y)$ рівняння (1) неперервні в області $Y \equiv [\zeta_1, \zeta_2]$, то оптимальна функція Ляпунова $v_k^0(x,\alpha) = x^T G_k(\alpha)x$ визначається з рівняння

$$G_k(\alpha)A_k(\alpha) + A_k^T(\alpha)G_k(\alpha) - G_k(\alpha)B_k(\alpha)D_k^{-1}(\alpha)\times$$
$$\times B_k^T(\alpha)G_k(\alpha) + \sigma_k^T(\alpha)G_k(\alpha)\sigma_k(\alpha) + C_k(\alpha) +$$
$$+ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} [K^T(\alpha,\beta)G_k(\beta)K(\alpha,\beta) + \sum_{s=1}^{N} {Q_s}^T(G_k(\beta)Q_s -$$
$$-G_k(\alpha))]p_k(\alpha,\beta)d\beta = 0, k = 0,1,2,\ldots, \qquad (7)$$

причому оптимальне керування має вигляд $u_k^0(x) = -D_k^{-1}B_k^T G_k x$.

Припустимо, що структура системи (1)-(3) залишається незмінною $\xi(t) \equiv \gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$, стрибки фазового вектора відсутні і зовнішніх марковських перемикань не відбувається. Рівняння (1) перетворюється в звичайне диференціальне рівняння Іто ($\gamma = const$)

$$dx(t) = [A(\gamma)x(t) + B(\gamma)u(t)]dt +$$
$$+\sigma(\gamma)x(t)dw(t) \qquad (8)$$

яка одержується з (1) "заморожуванням" структури.

Нехай для системи (8), (3) існує допустиме лінійне керування. Тоді з (7) одержуємо рівняння

$$G_k A_k(\gamma) + A_k^T(\gamma)G_k - G_k B_k(\gamma)D_k^{-1}(\gamma)\times$$

$$\times B_k^T(\gamma)G_k+\sigma_k^T(\gamma)G_k\sigma_k(\gamma)+C_k(\gamma)=0,$$
$$k=0,1,2,\ldots, \qquad (9)$$

яке має єдиний додатно визначений розв'язок $G_k(\gamma)>0$ при будь-яких $C_k(\gamma)\geq 0$, $D_k(\gamma)>0$.

Рівняння (9) відрізняється від рівняння (7) відсутністю інтегрального доданку в силу незмінності структури системи.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) – (3) з умовою стрибка (5) виконуються наступні припущення:*

1) при будь-якому фіксованому $\gamma\in[\zeta_1,\zeta_2]$ для системи (8), (3) існує лінійне допустиме керування;

2) матриці $A_k(\gamma),B_k(\gamma),\sigma_k(\gamma),dA_k(\gamma)/d\gamma$, $dB_k(\gamma)/d\gamma,d\sigma_k(\gamma)/d\gamma$ обмежені за нормою числом N на множині $\gamma\in[\zeta_1,\zeta_2]$ для кожного $k=0,1,2,...$, тобто

$$\|A_k(\gamma)\|\leq N,\|B_k(\gamma)\|\leq N,\ldots,$$
$$\|d\sigma_k(\gamma)/d\gamma\|\leq N, \qquad (10)$$

де $\|A\|=(SpAA^T)^{\frac{1}{2}}$;

3) матриці $K(\alpha,\beta),Q_s(\alpha,\beta)$, які визначають умову стрибка (5), задовольняють рівності

$$K(\alpha,\beta)=E+(\beta-\alpha)\tilde{K},Q_s(\alpha,\beta)=\sqrt{\beta-\alpha}\tilde{Q}_s, \qquad (11)$$

де $\tilde{K}$, $\tilde{Q}_s$ – відомі матриці, які не залежать від α і β;

4) для щільності ймовірності переходу $p(\alpha,\beta)$ в (4) виконується нерівність

$$p_k(\alpha,\beta)|\beta-\alpha|<L,\{\alpha,\beta\}\subset[\zeta_1,\zeta_2]. \qquad (12)$$

Тоді можна вказати таку сталу $Q>0$, що при виконанні нерівності $NL<Q$ для системи (1)-(3) з умовою стрибка (5) існує допустиме керування $u_k(y,x,h)$.

Доведення. Розглянемо СДР (8), одержане "заморожуванням" структури. З першої умови теореми випливає, що рівняння (9) має єдиний додатно визначений розв'язок $G_k(\gamma)>0$, і, відповідно, для кожного фіксованого $\gamma\in[\zeta_1,\zeta_2]$ існують оптимальне керування $u_k^0(\gamma,x_0,h)=-D_k^{-1}(\gamma)B_k^T(\gamma)G_k(\gamma)x$ і оптимальна функція Ляпунова $v_k^0(\gamma,x_0,h)=x^TG_k(\gamma)x$, які забезпечують експоненціальну стійкість в середньому квадратичному системи (8), (3) і мінімізують функціонал (6), причому $\min I_{u_k^0}(\gamma,x_0,h)=v_k^0(\gamma,x_0,h)$.

Щоб визначити залежність побудованої функції $v_k(\gamma,x,h)$ від γ, продиференціюємо (9) (поки що формально) по γ. Позначаючи ${dG_k(\gamma)}/{d\gamma}=H_k(\gamma)$, $\tilde{A}_k(\gamma)=A_k(\gamma)-B_k(\gamma)D_k^{-1}(\gamma)B_k^T(\gamma)G_k(\gamma)$, одержимо

$$H_k\tilde{A}_k(\gamma)+\tilde{A}_k^T(\gamma)H_k+\sigma_k^T(\gamma)H_k\sigma_k(\gamma)=-R_k(\gamma). \qquad (13)$$

Тут $m\times m$ -матриця $R_k(\gamma)$ означає сукупність всіх членів, які не містять H_k, явний вигляд якої виписувати немає змісту, оскільки він в доведенні не використовується.

Покажемо, що рівняння (13) має єдиний розв'язок $H_k(\gamma)$ для довільної матриці $R_k(\gamma)$. Дійсно, система

$$dx(t)=\tilde{A}_k(\gamma)x(t)+\sigma_k(\gamma)x(t)dw(t) \qquad (14)$$

експоненціально стійка в середньому квадратичному, оскільки вона одержана стабілізацією системи (8) за допомогою оптимального керування $u_k^0(\gamma,x,h)$. Тому на розв'язку $x(t)$ цієї системи інтеграл

$$\int\limits_0^\infty E\{x^T[t]R_k(\gamma)x[t]/y_0=\gamma,x_0,\eta_{k_0}\}dt=$$
$$=v_k^0(\gamma,x_0,h)$$

збіжний і є квадратичною формою, причому $(Qv_k^0)(y,x,h)=-x^TR_kx$, де $(Qv_k^0)(y,x,h)$ – слабкий інфінітезимальний оператор в силу системи (8) [6]. Позначаючи матрицю цієї форми через $H(\gamma)$, можна переконатися, що вона задовольняє рівняння (13). Якщо існує інший розв'язок $\tilde{H}(\gamma)\neq H(\gamma)$, то для квадратичної форми $v(\gamma,x,h)=x^T\bar{H}(\gamma)x$, де $\bar{H}=H(\gamma)-\tilde{H}(\gamma)$, одержимо, що $(Qv)(y,x,h)=0$. Звідси випливає тотожність $E\{v(\gamma,x,h)|\gamma,x_0,h\}\equiv E\{v_k^0(\gamma,x,h)|\gamma,x_0,h\}=x_0^T\bar{H}(\gamma)x_0$. В силу довільності $x_0\in R^m$, приходимо до висновку, що $\bar{H}(\gamma)=0$.

Отже, рівняння (13), як і рівняння (9), має єдиний розв'язок при кожному $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$. Умови 1) і 2) теореми виконуються на замкнутому інтервалі, а матриці $G_k(\gamma), H(\gamma) = dG_k(\gamma)/d\gamma$ неперервно залежать від γ, тому можна підібрати змінну $\vartheta > 0$ так, щоб виконувались оцінки

$$\|G_k(\gamma)\| \le N\vartheta, \quad \|H(\gamma)\| \le N\vartheta. \qquad (15)$$

Тепер для "розмороженої" системи (1) – (3) з умовою стрибка (5) візьмемо керування $u_k^0(y, x_0, h) = -D_k^{-1}(y)B_k^T(y)G_k(y)x$, $y \in [\zeta_1, \zeta_2]$ і знайдемо умови, при яких воно є допустимим для цієї системи. Для цього скористаємося функцією Ляпунова $v_k^0(y, x_0, h) = x^T G_k(y)x$. За означенням слабкого інфінітезимального оператора в силу систем (1) – (3) і (8), (2), (3), одержимо [7]:

$$\begin{gathered}(Qv_k^0)(y,x,h)|_{(1)} = (Qv_k^0)(y,x,h)|_{(8)} + \\ +E\{v_k^0(\xi(t),x(t),h) - v_k^0(\alpha,x,h)|\xi(t-0) = \\ = \alpha, \xi(t) = \beta \neq \alpha, x(t-0) = x(t), h\} = \\ = x^T(G_k(\alpha), A_k(\alpha) + A_k^T(\alpha)G_k(\alpha) - \\ -G_k(\alpha)B_k(\alpha)D_k^{-1}(\alpha)B_k^T(\alpha)G_k(\alpha) + \qquad (16) \\ +\sigma_k^T(\alpha)G_k(\alpha)\sigma_k(\alpha) + C_k(\alpha) + \\ + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}[K^T(\alpha,\beta)G_k(\beta)K(\alpha,\beta) + \\ + \sum_{s=1}^{N} Q_s{}^T(G_k(\beta)Q_s - G_k(\alpha)]p_k(\alpha,\beta)d\beta)x = 0, \\ k = 0, 1, 2, \ldots,\end{gathered}$$

Оцінимо квадратичну форму в (16). Маємо

$$C_k(\alpha) + G_k(\alpha)B_k(\alpha)D_k^{-1}(\alpha)B_k^T(\alpha)G_k(\alpha) \ge cE,$$

де c дорівнює мінімальному елементу матриці $C_k(\alpha)$ при $\alpha \in [\zeta_1, \zeta_2]$, E – одинична $m \times m$-матриця.

Оцінку інтегрального доданку проведемо із врахуванням (10), (11), (12), (15):

$$\begin{gathered}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}[K^T(\alpha,\beta)G_k(\beta)K(\alpha,\beta) + \\ + \sum_{s=1}^{N} Q_s{}^T(G_k(\beta)Q_s - G_k(\alpha)]p_k(\alpha,\beta)d\beta \le \\ \le LN\vartheta \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}[K^T(\alpha,\beta)K(\alpha,\beta) + \sum_{s=1}^{N} Q_s{}^T Q_s - 1] \times \\ \times p_k(\alpha,\beta)d\beta \le LN\vartheta\pi(\zeta_2 - \zeta_1)E, \pi = const.\end{gathered}$$

Тоді з (16) одержимо оцінку

$$(Qv_k)(y,x,h) = -x^T[-c + LN\vartheta\pi(\zeta_2 - \zeta_1)]x.$$

Вважаючи $Q = c[2\vartheta\pi(\zeta_2 - \zeta_1)]^{-1}$, матимемо $-c + LN\vartheta\pi(\zeta_2 - \zeta_1) \le -\frac{c}{2}$, якщо $NL < Q$. Отже, незбурений рух системи (1) – (3) з умовою стрибка (5), (11) експоненціально стійкий в середньому квадратичному, оскільки [6]

$$(Qv_k)(y,x,h) \le -\frac{c}{2}x^2.$$

Теорема 1 доведена.

Зауваження 2. Нерівність $NL < Q$ означає повільну в середньому зміну коефіцієнтів системи (1)-(3), оскільки, наприклад, для матриці $A(\xi(t))$ вірною є оцінка

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} E\{A(\xi(t+\Delta t)) - A(\xi(t))|\xi(t) = \alpha\} = \\ = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t} E\{dA(\gamma)/d\gamma \cdot |\xi(t+\Delta t) - \alpha|\} = \\ = \|dA(\gamma)/d\gamma\| \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} |\beta - \alpha| p_k(\alpha,\beta)d\beta \le NL < Q.\end{gathered}$$

2. Достатні умови існування допустимого керування у випадку частково керовної системи. В умовах теореми 1 міститься вимога про існування керування, яке стабілізує систему (8), (2), (3) при кожному фіксованому значенні $\xi(t) = \gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$. Але, природно, що систему можна стабілізувати навіть в тому випадку, коли на деякій множині фіксованих значень $\xi(t) = \gamma \in \bar{Z}$ система (8), (2), (3) не може бути стабілізована. Цього можна очікувати, якщо ймовірність довгого перебування системи в таких структурних станах як і величина стрибків фазового вектора $x(t)$ досить мала.

Знайдемо кількісні оцінки для параметрів процесу $\xi(t)$, при яких в системі зможе реалізуватися вказана ситуація. При цьому для спрощення викладок будемо вважати, що фазові траєкторії при зміні структури системи залишаються неперервними, тобто будемо вважати, що в (5) $K(\alpha,\beta) = E$, $Q(\alpha,\beta) = 0$.

Нехай стабілізуюче лінійне керування для системи (8), (2), (3) існує лише для кожного γ із замкнутої множини $Z \subset Y = [\zeta_1, \zeta_2]$. Позначимо через $\bar{Z}$ доповнення до Z, тобто $\bar{Z} = Y \backslash Z$ і введемо в розгляд величини

$$q_k(\alpha, Z) \int\limits_Z |\alpha - \beta| p_k(\alpha,\beta) d\beta, \alpha \in Z,$$

$$p_{k_1}(\alpha, \bar{Z}) =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0+} P\{\xi(t+\Delta t) \in \bar{Z} / \xi(t) = \alpha \in Z\},$$
$$p_{k_2}(\alpha, Z) = \tag{17}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0+} P\{\xi(t+\Delta t) \in Z / \xi(t) = \alpha \in \bar{Z}\}.$$

Тут $q_k(\alpha, Z)$ – середня швидкість зміни процесу $\xi(t)$ на множині Z, величина $p_{k_1}(\alpha,\bar{Z})\Delta t$ характеризує ймовірність переходу системи (1) – (3) за час Δt із стабілізованого стану $\alpha \in Z$ в множину $\bar{Z}$ нестабілізовних станів, а $p_{k_2}(\alpha, Z)\Delta t$ – ймовірність зворотного переходу.

Теорема 2. *Нехай для системи (1) – (3) виконуються умови:*

1) при будь-якому фіксованому $\gamma \in Z$ для системи (8), (2), (3) існує допустиме лінійне керування;

2) фазові траєкторії $x(t)$ системи (1) – (3) неперервні при $t \geq t_0 \geq 0$;

3) параметри системи (8), (2), (3) задовольняють оцінки (10).

Тоді можна вказати настільки малі числа $\mu > 0, \delta_1 > 0$ і настільки велике число $\delta_2 > 0$, що при виконанні нерівностей

$$\begin{aligned} &q_k(\alpha, Z) < \mu, \alpha \in Z, \\ &p_{k_1}(\alpha, \bar{Z}) < \delta_1, \alpha \in Z, \\ &p_{k_2}(\alpha, Z) > \delta_2, \alpha \in \bar{Z}, \end{aligned} \tag{18}$$

для системи (1) – (3) існує допустиме керування.

Доведення. Для довільного $\gamma \in Z$ побудуємо функцію Ляпунова у вигляді $v_k(\gamma, x, h) = x^T G_k(\gamma) x$ та керування $u_k^0(\gamma, x, h) = -D_k^{-1}(\gamma) B_k^T(\gamma) G_k(\gamma) x$, яке стабілізує систему (8), (2), (3) і мінімізує функціонал (6). Матриця $G_k(\gamma) > 0$ задовольняє рівняння (9).

Візьмемо деяке число $m > 0$ і побудуємо додатно визначену за змінною x функцію

$$v_k(y, x, h) = \begin{cases} x^T G_k(y) x, & y \in Z, \\ (m + c_2)\|x\|^2, & y \in \bar{Z}; \end{cases} \tag{19}$$

де $c_1 = \min \|G_k(y)\|, c_2 = \max \|G_k(y)\|$ при $y \in Z$.

Керування $u_k(y, x, h)$ для системи (1) – (3) визначимо рівністю

$$u_k(y, x, h) = \begin{cases} u_k^0(y, x, h), & y \in Z, \\ 0, & y \in \bar{Z}. \end{cases} \tag{20}$$

Умова $u_k(y, x, h) = 0$ при $y \in \bar{Z}$ означає, що в нестабілізовних станах керування системою припиняється і накладається для спрощення доведення. Наприклад, в одновимірному випадку нестабілізовність (некеровність) означає, що $B(y) = 0$ при $y \in \bar{Z}$ і тоді вибір будь-якого іншого керування не змінює поведінку системи.

Покажемо, що керування $u_k(y, x, h)$ є допустимим при відповідному виборі сталих μ, δ_1, δ_2 в умовах (18).

Оцінимо величину $(Qv_k)(y, x, h)$ в силу системи (1) – (3) під дією керування (20). Враховуючи (9), (10), а також умову (15), яка виконується тепер тільки при $\gamma \in Z$, одержимо в точці $x(t) \in R^m$, $y = \alpha \in Z$ наступну оцінку

$$(Qv_k)(y, x, h) = x^T[-C_k(\alpha) -$$
$$-G_k(\alpha) B_k(\alpha) D_k^{-1}(\alpha) B_k^T(\alpha) G_k(\alpha) +$$
$$+ \int\limits_Z (C_k(\beta) - C_k(\alpha)) p_k(\alpha,\beta) d\beta + \tag{21}$$
$$+ \int\limits_{\bar{Z}} ((c_2 + m)E - C_k(\alpha)) p_k(\alpha,\beta) d\beta] x \leq$$

$$\leq x^T[-c+N\vartheta q_k(\alpha,Z)+(c_2-c_1+m)p_{k_1}(\alpha,\bar{Z})]x.$$

Аналогічно, при $y=\alpha\in\bar{Z}$, одержимо оцінку

$$(Qv_k)(y,x,h)=x^T[2(c_2+m)A_k(\alpha)+\sigma_k^T(\alpha)\sigma_k(\alpha)+$$
$$+\int_Z(C_k(\beta)-(m+c_2)E)p_k(\alpha,\beta)d\beta]x\leq \quad (22)$$
$$\leq x^T[2N(c_2+m)+N^2-mp_{k_2}(\alpha,Z)]x.$$

З (21) і (22) випливає, що від'ємна визначеність $(Qv_k)(y,x,h)$ може бути забезпечена досить малим значенням величин $q_k(\alpha,Z)$ і $p_{k_1}(\alpha,\bar{Z})$, а також досить великим значенням $p_{k_2}(\alpha,Z)$.

Зокрема, у (18) можна вказати такі малі значення $\mu>0,\delta_1>0$, щоб $N\upsilon\mu+(c_2-c_1+m)\delta_1<c/2$, а $\delta_2=(2N(c_2+m)+N^2+c/2)m^{-1}$. Тоді для довільних $x(t)\in R^m,\alpha\in Y$ вірною є оцінка

$$(Qv_k)(y,x,h)\leq -\frac{c}{2}\|x\|^2,$$

що і доводить теорему.

Зауваження 3. В доведенні теореми 2 фігурує вільний параметр m, яким можна маніпулювати так, щоб оптимізувати в деякому розумінні перехідні ймовірності $p_{k_1}(\alpha,\bar{Z})$ і $p_{k_2}(\alpha,Z)$.

Зауваження 4. Теорема 2 доведена в припущенні про неперервність фазової траєкторії $x(t)$. При деякому ускладненні викладок можна довести, що аналогічний результат має місце і при наявності стрибків фазового вектора, які визначаються умовами (5), якщо тільки ці стрибки досить малі.

Зауваження 5. Слід відмітити, що керування (20), яке стабілізує систему (1) – (3) буде лінійним за змінною x при кожному фіксованому $\xi(t)\in[\zeta_1,\zeta_2]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз., 1963. – 859 с.

2. *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: в 2-х т. – М.: Физматгиз, 1994. – Т.1, Т.2 – 544 с., 473 с.

3. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. – 222 с.

4. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. – 798 с.

5. *Свердан М.Л., Царьков Е.Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.

6. *Лукашив Т.О., Ясинский В.К., Ясинский Е.В.* Устойчивость стохастических систем с марковскими параметрами // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 1. – С. 5-28.

7. *Лукашив Т.О., Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Стабилизация динамических систем случайной структуры с внешними марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 14-29.