УДК 517.9

©2009 р. М.І.Конаровська

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ТЕОРЕМИ ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Установлено теореми Ліувілля для сингулярних параболічних систем.

The theorems of Liouville for the singular parabolic systems were established.

При вивченні властивостей розв'язків сингулярних параболічних систем важливим є доведення теорем Ліувілля. Подібні задачі для параболічних систем глибоко вивчені в працях С.Д. Ейдельмана [1,4]. Для таких систем встановлені оцінки матриці Гріна, на основі яких сформульовані та доведені загальні теореми Ліувілля для регулярних розв'язків параболічних систем у півпросторі з коефіцієнтами, залежними від t. Природно, що виникає питання про встановлення відповідних теорем для B-параболічних систем. Вивчення таких систем проводилось в роботах [2, 3]. У праці Матійчука М.І. [2] детально досліджені B-параболічні системи в нормованих просторах Діні. У роботі [3] сформульовано означення Λ_ω-умов та наведено класи систем, для яких ці умови виконуються. У даній статті на основі результатів, одержаних в [3], доводяться відповідні теореми Ліувілля для сингулярних параболічних систем у півпросторі $t \le T$ з коефіцієнтами, залежними від t.

1. Основні позначення та означення Λ_ω-умов в півпросторі $t \le T$. У шарі $\Pi^+ = (t_0;T) \times E_n^+$, $E_n^+ = E_{n-1} \times (0;\infty)$ розглядається задача Коші

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t) D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x), \quad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad (2)$$

де $|k| = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$, $x \in E_n^+$, $x = (x', x_n)$, $x' = = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x_n > 0$, $D_{x'}^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, $B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu \ge -\frac{1}{2}$.

Тоді розв'язок задачі (1) – (2) однозначно визначається формулою [2,с.21]

$$u(t,x) = \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t, t_0, x' - \xi', x_n) \varphi(\xi) \xi_n^{2\nu+} d\xi,$$

де

$$G(t, t_0, x' - \xi', x_n) =$$

$$= c_\nu' \int_{E_n^+} e^{i\sigma'(x'-\xi')} V(t, t_0, \sigma) j_\nu(\sigma_n x_n) \sigma_n^{2\nu+1} d\sigma -$$

матриця Гріна задачі Коші (1) – (2),

$$T_{x_n}^{\xi_n} f(x) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)} \times$$

$$\times \int_0^\pi f(x', \sqrt{x_n^2 + \xi_n^2 - 2x_n\xi_n \cos\alpha}) \sin^{2\nu}\alpha d\alpha -$$

оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя B_{x_n}, $j_\nu(\sigma_n x_n)$ – нормована функція Бесселя.

Означення. Система (1) задовольняє Λ_ω^--умову, $\omega \le 0$, якщо існує матриця Гріна системи (1), для похідних якої справджується оцінка

$$|D_{x'}^k B_{x_n}^j G(t, t_0, x', x_n, \xi_n)| \le C_{kj} \times$$

$$\times a(t,t_0)^{-(n_\nu + 2j + |k|)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{\omega(t-t_0)} e^{-c|\frac{x}{a(t,t_0)}|^q} \right\}, \quad (\Lambda_\omega)$$

$a(t,t_0)$ – неперервна монотонно зростаюча функція аргумента t така, що $a(t_0,t_0) = 0$,

C_{kj}, c – додатні сталі, залежні від ν, $\sup_t |A_{kj}(t)|$, модуля неперервності коефіцієнтів $A_{kj}(t)$ при $|k|+2j=2b$, $n_\nu = n+2\nu+1$, $q = \dfrac{2b}{2b-1}$.

2. Теореми Ліувілля. Розглянемо у півпросторі $t \in (-\infty, T]$ розв'язок $u(t,x)$ системи (1). Для розв'язку справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Припустимо, що:*
1) матриця Гріна задовольняє Λ_ω^--умову з $\omega = 0$, а саме:

$$|D_{x'}^m B_{x_n}^j G(t,t_0,x',x_n,\xi_n)| \le C_{mj} \times$$
$$\times a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+|m|)} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x}{a(t,t_0)}|^q}\},$$

$a(t,t_0) \to \infty$ при $t_0 \to -\infty$, $n_\nu + 2j + |m| \to \infty$ при $m \to \infty$, $j \to \infty$;
2) розв'язок задовольняє умову

$$|u(t,x)| \le C_1(1+|x'|)^\beta + C_2(1+x_n^2)^\mu, \quad (3)$$

Тоді $u(t,x)$ в півпросторі $t \le T$ є многочленом по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ степеня не вище $[\beta]$, а по x_n^2 – $[\mu]$. Якщо $|k|+2j \ge 1$, то при $\beta < 1$ і $2\mu < 1$ $u(t,x) \equiv \mathrm{const}$.

Доведення. Візьмемо $u(x,t)$ при $t = t_0$ за початкову функцію і на основі теореми єдиності розв'язку задачі Коші отримаємо зображення розв'язку при $t_0 < t \le T$:

$$u(t,x) = \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,t_0,x'-\xi',x_n) u(t_0,\xi) \times$$
$$\times \xi_n^{2\nu+1} d\xi = \int_{E_n^+} G(t,t_0,x,\xi) u(t_0,\xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi.$$

Для того, щоб підрахувати степень многочлена по x_i, $(i = \overline{1,n})$, потрібно визначити, похідні якого порядку функції $u(t,x)$ по x тотожньо дорівнюють нулеві. Для цього оцінимо похідні розв'язку, враховуючи умову Λ_0^- і (3):

$$|D_{x'}^m B_{x_n}^j u(t,x)| \le \int_{E_n^+} |D_{x'}^m B_{x_n}^j G(t,t_0,x,\xi)| \times$$
$$\times |u(t_0,\xi)| \xi_n^{2\nu+1} d\xi \le$$
$$\le \int_{E_n^+} C_{mj} a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+|m|)} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x-\xi'}{a(t,t_0)}|^q}\} \times$$
$$\times \left[C_1(1+|\xi'|)^\beta + C_2(1+\xi_n^2)^\mu\right] \xi_n^{2\nu+1} d\xi =$$
$$= C_{mj} a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+|m|)} \times$$
$$\times \left[C_1 \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x-\xi'}{a(t,t_0)}|^q}\}(1+|\xi'|)^\beta \xi_n^{2\nu+1} d\xi + \right.$$
$$\left. + C_2 \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x-\xi'}{a(t,t_0)}|^q}\}(1+\xi_n^2)^\mu \xi_n^{2\nu+1} d\xi \right] =$$
$$= C_{mj} a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+|m|)} [I_1 + I_2].$$

Оцінимо кожен з інтегралів I_1 і I_2:

$$I_1 = C_1 \int_{E_{n-1}} e^{-c|\frac{x'-\xi'}{a(t,t_0)}|^q}(1+|\xi'|)^\beta d\xi' \times$$
$$\times \int_0^\infty T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x_n}{a(t,t_0)}|^q}\} \xi_n^{2\nu+1} d\xi_n = C_1 A_1 \cdot A_2.$$

Для обчислення інтегралу A_1 використаємо заміну $\frac{\xi'-x'}{a(t,t_0)} = \alpha'$ (A), а для обчислення інтегралу A_2 – означення оператора узагальненого зсуву та заміну:

$$\begin{cases} v_1 = (x_n - \xi_n \cos\alpha)\ a(t,t_0)^{-1}, \\ v_2 = \xi_n \sin\alpha\ a(t,t_0)^{-1}; \end{cases} \quad (\bar{A})$$

Тут $-\infty < v_1 < +\infty$, $0 \le v_2 < +\infty$.

Тоді

$$A_1 = \int_{E_{n-1}} e^{-c|\alpha'|^q}(1+|\alpha' a(t,t_0) + x'|)^\beta \times$$
$$\times a(t,t_0)^{n-1} d\alpha'.$$

Враховуючи нерівність $|\alpha' a(t,t_0) + x'|^\beta \le \le 2^\beta(|\alpha'|^\beta a(t,t_0)^\beta + |x'|^\beta)$ і вважаючи, що $a(t,t_0) \ge 1$, отримаємо

$$A_1 \le \tilde{C}_1(1+\tilde{C}_2|x'|^\beta) a(t,t_0)^{n-1} +$$
$$+ \tilde{C}_2 a(t,t_0)^{\beta+n-1} \le \left(\tilde{C}_1(1+\tilde{C}_2|x'|^\beta) + \tilde{C}_2\right) \times$$
$$\times a(t,t_0)^{\beta+n-1} = \tilde{A}_1(x') a(t,t_0)^{\beta+n-1}.$$

$$A_2 = \int\limits_0^\infty T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x_n}{a(t,t_0)}|^q}\}\xi_n^{2\nu+1}d\xi_n =$$

$$= C(\nu)\int\limits_0^\infty d\xi_n \int\limits_0^\pi e^{-c\left(\frac{r(\alpha,x_n,\xi_n)}{a(t,t_0)}\right)^q}\sin^{2\nu}\alpha\xi_n^{2\nu+1}d\alpha =$$

$$= a(t,t_0)^{2\nu+2}C(\nu)\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_0^\infty e^{-c\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^q}v_2^{2\nu}dv_1dv_2 \le$$

$$\le \tilde{A}_2(\nu)a(t,t_0)^{2\nu+2}.$$

Отже,

$$I_1 \le C_1\tilde{A}_1(x')\tilde{A}_2(\nu)a(t,t_0)^{n+2\nu+1+\beta}. \qquad (4)$$

Далі оцінюємо інтеграл I_2:

$$I_2 = C_2\int\limits_{E_{n-1}} e^{-c|\frac{x'-\xi'}{a(t,t_0)}|^q}d\xi'\int\limits_0^\infty T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c|\frac{x_n}{a(t,t_0)}|^q}\}\times$$

$$\times(1+\xi_n^2)^\mu\xi_n^{2\nu+1}d\xi_n = C_2B_1\cdot B_2.$$

Аналогічно, як і при оцінюванні інтегралів A_1 і A_2, використаємо заміни (A) і $(\bar{A})$. Тоді

$$B_1 = \int\limits_{E_{n-1}} e^{-c|\alpha'|^q}a(t,t_0)^{n-1}d\alpha' \le \tilde{B}_1 a(t,t_0)^{n-1}.$$

$$B_2 = C(\nu)\int\limits_0^\infty d\xi_n\int\limits_0^\pi e^{-c\left(\frac{r(\alpha,x_n,\xi_n)}{a(t,t_0)}\right)^q}\sin^{2\nu}\alpha\times$$

$$\times(1+\xi_n^2)^\mu\xi_n^{2\nu+1}d\alpha =$$

$$= a(t,t_0)^{2\nu+2}C(\nu)\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_0^\infty e^{-c\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^q}v_2^{2\nu}\times$$

$$\times\left(v_2^2a^2+(x_n-v_1a)^2+1\right)^\mu dv_1dv_2 \le$$

$$\le C(\nu)\tilde{B}_2(x_n)a(t,t_0)^{2\nu+2+2\mu}.$$

Отже,

$$I_2 \le C_2\tilde{B}_1C(\nu)\tilde{B}_2(x_n)a(t,t_0)^{n+2\nu+1+2\mu}. \qquad (5)$$

Враховуючи нерівності (4) та (5), маємо

$$|D_{x'}^m B_{x_n}^j u(t,x)| \le C_{mj}a(t,t_0)^{-(n_\nu+2j+|m|)}\times$$

$$\times\Big(C_1\tilde{A}_1(x')\tilde{A}_2(\nu)a(t,t_0)^{n+2\nu+1+\beta}+$$

$$+C_2\tilde{B}_1C(\nu)\tilde{B}_2(x_n)a(t,t_0)^{n+2\nu+1+2\mu}\Big) =$$

$$= C_{mj}C_1\tilde{A}_1(x')\tilde{A}_2(\nu)a(t,t_0)^{-2j-|m|+\beta}+$$

$$+C_{mj}C_2\tilde{B}_1C(\nu)\tilde{B}_2(x_n)a(t,t_0)^{-2j-|m|+2\mu}.$$

Для першого доданку вибираємо m_1 і j_1 так, щоб для $m \ge m_1$ і $j \ge j_1$ виконувалась нерівність $-2j-|m|+\beta < 0$. Аналогічно для другого доданку вибираємо m_2 і j_2 так, щоб для $m \ge m_2$ і $j \ge j_2$ виконувалась нерівність $-2j-|m|+2\mu < 0$. Тоді, враховуючи довільність $t > t_0$ і те, що $a(t,t_0) \to \infty$ при $t_0 \to -\infty$, отримаємо, що

$$D_{x'}^m B_{x_n}^j u(t,x) \equiv 0$$

для

$$\begin{cases} -2j-|m|+\beta < 0, & m \ge m_1, j \ge j_1, \\ -2j-|m|+2\mu < 0; & m \ge m_2, j \ge j_2. \end{cases}$$

Нехай $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$, $j_0 = \max\{j_1, j_2\}$, тоді

$$D_{x'}^{m_0} B_{x_n}^{j_0} u(t,x) \equiv 0.$$

Значить $u(t,x)$ є многочленом по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ степеня не вище m_0-1, а по x_n^2 – степеня не вище j_0. Враховуючи те, що $|u(t,x)| \le C_1(1+|x'|)^\beta + C_2(1+x_n^2)^\mu$, маємо, що степень по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не вище $[\beta]$, а по x_n^2 – $[\mu]$.

Для доведення другої частини теореми зауважимо, що якщо $\beta < 1$ і $2\mu < 1$, то уже при $m = 1$ $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, а це означає, що $u(t,x)$ не залежить від x. Оскільки $|k|+2j \ge 1$, то в правій частині системи виконується хоча б одне диференціювання функції $u(t,x)$ по x. Враховуючи те, що $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, маємо $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$. Звідси випливає, що $u = \mathrm{const}$.

Теорема 2. *Нехай для системи (1), коефіцієнти якої є многочленами по t степеня не вище r, $|m|+2j \ge l_1+l_2 \ge 1$, виконується умова Λ_ω^- ($\omega = 0$) з $a(t,t_0) \ge \gamma|t_0|^\sigma$, $\sigma > 0$, для досить великих $|t_0|$, $n_\nu+2j+|m| \to \infty$ при $m \to \infty$, $j \to \infty$, тоді розв'язок в півпросторі $t \le T$ системи (1), який задовольняє умову:*

$$|u(t,x)| \le \left[C_1(1+|x'|)^\beta + C_2(1+x_n^2)^\mu\right]\times$$

$$\times(T+1-t)^{\alpha}, \qquad (6)$$

є многочленом по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *степеня не вище* $[\beta]$, *по* x_n^2 – $[\mu]$, *а по* t – *многочленом степеня не вище* $\min\{[\alpha], pr+p-1\}$, *де* p – *найменше ціле число таке, що* $p(l_1+l_2) > \ > [\beta]+[\mu]+1$.

Доведення. Доведення того, що $u(t,x)$ є многочленом по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ степеня не вище $[\beta]$, а по x_n^2 – $[\mu]$, аналогічне доведенню теореми 1.

Доведемо, що $u(t,x)$ є многочленом по t степеня не вище $\min([\alpha], pr+p-1)$. Для того, щоб визначити степінь многочлена по t, потрібно визначити, похідні якого порядку по t від функції $u(t,x)$ дорівнюють нулеві. Підрахуємо цей порядок. Для цього диференціюватимемо ліву і праву частину системи (1) по t, причому зліва нас будуть цікавити похідні найвищого порядку по t, а справа – диференціювання по x найнижчого порядку. При цьому будемо використовувати операцію "порівняння по молодшим", яку позначатимемо символом $\simeq$.

$$\frac{\partial^{m+p}u}{\partial t^{m+p}} = \frac{\partial^{m+p-1}}{\partial t^{m+p-1}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial^{m+p-1}}{\partial t^{m+p-1}}\left(\sum_{1\le l\le |k|+2j\le 2b} A_{kj}(t)D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}u\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{\partial^{m+p-1}}{\partial t^{m+p-1}}\left(t^r D_{x'}^{l_1}B_{x_n}^{l_2}u\right) =$$

$$= D_{x'}^{l_1}B_{x_n}^{l_2}\frac{\partial^{m+p-1}}{\partial t^{m+p-1}}\left(t^r u\right) =$$

$$= D_{x'}^{l_1}B_{x_n}^{l_2}\frac{\partial^{m+p-1-r}}{\partial t^{m+p-1-r}}\left(\frac{\partial^r(t^r u)}{\partial t^r}\right) \simeq$$

$$\simeq D_{x'}^{l_1}B_{x_n}^{l_2}\frac{\partial^{m+p-1-r}u}{\partial t^{m+p-1-r}} =$$

$$= D_{x'}^{l_1}B_{x_n}^{l_2}\frac{\partial^{m+p-1-r-1}}{\partial t^{m+p-1-r-1}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \ldots =$$

$$= D_{x'}^{pl_1}B_{x_n}^{pl_2}\frac{\partial^{m+p-pr-p}u}{\partial t^{m+p-pr-p}} = D_{x'}^{pl_1}B_{x_n}^{pl_2}\frac{\partial^{m-pr}u}{\partial t^{m-pr}}.$$

Беремо $m = pr$, $pl_1+pl_2 > [\beta]+[\mu]+1$. Тоді

$$\frac{\partial^{m+p}u}{\partial t^{m+p}} = D_{x'}^{pl_1}B_{x_n}^{pl_2}\frac{\partial^{m-pr}u}{\partial t^{m-pr}},$$

$$\frac{\partial^{pr+p}u}{\partial t^{pr+p}} = D_{x'}^{pl_1}B_{x_n}^{pl_2}u.$$

Оскільки $pl_1+pl_2 > [\beta]+[\mu]+1$, то $D_{x'}^{pl_1}B_{x_n}^{pl_2}u \equiv 0$ і звідси маємо $\frac{\partial^{pr+p}u}{\partial t^{pr+p}} \equiv 0$. А це означає, що $u(t,x)$ по t є многочленом степеня не вище $\min\{[\alpha], pr+p-1\}$.

Теорема 3. *Нехай для системи (1)виконуються наступні припущення:*
1) матриця Гріна задовольняє Λ_{ω}^{-} *з* $\omega < 0$ *і* $2j+|m| = 0$*;*
2) розв'язок задовольняє умову

$$|u(t,x)| \le \varphi(t)e^{k|x|^{\mu}}, \quad 1 \le \mu < q = \frac{2b}{2b-1};$$

3)
$$\varphi(t_0)a(t,t_0)^{-n_\nu+\frac{q(n+2\nu+1)}{q-\mu}}\times$$
$$\times\exp\left\{\omega(t,t_0)+ka(t,t_0)^{\frac{\mu q}{q-\mu}}\frac{q-\mu}{q}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\bar\eta\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}+\eta_1\left(\frac{k\eta_1\mu}{c\eta_2 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\right]\right\}\xrightarrow[t_0\to-\infty]{} 0,$$

$\bar\eta = \max\{\eta;\eta_1\eta_3\}$, $\eta = 1$, $\eta_i = 1$ *при* $\mu = 1$, $\eta = 2^{\mu}$, $\eta_i = 2^{\mu}$ *при* $\mu > 1$ $(i = \overline{1,3})$, $c_1 = \min\{c; c\eta_2\}$.

Тоді довільний в півпросторі $t \le T$ *розв'язок системи (1) тотожньо дорівнює нулеві.*

Доведення. Візьмемо за початкову функцію значення $u(x,t)$ при $t = t_0$ і на основі теореми єдиності розв'язку задачі Коші отримаємо зображення розв'язку при $t_0 < t \le T$:

$$u(t,x) = \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n}G(t,t_0,x'-\xi',x_n)u(t_0,\xi)\times$$
$$\times\xi_n^{2\nu+1}d\xi.$$

Оцінимо $u(t,x)$, враховуючи припущення 1), 2) теореми:

$$|u(t,x)| \le \int_{E_n^+} C_0 a(t,t_0)^{-n_\nu}T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\left|\frac{x-\xi'}{a(t,t_0)}\right|^q}\}\times$$
$$\times\varphi(t_0)e^{k|\xi|^{\mu}}\xi_n^{2\nu+1}d\xi\ e^{\omega(t,t_0)} = C_0 a(t,t_0)^{-n_\nu}\times$$
$$\times\varphi(t_0)e^{\omega(t,t_0)}\int_{E_{n-1}} e^{-c\left|\frac{x'-\xi'}{a(t,t_0)}\right|^q}e^{k|\xi'|^{\mu}}d\xi'\times$$

$$\times \int_0^\infty T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\left|\frac{x_n}{a(t,t_0)}\right|^q}\} e^{k|\xi_n|^\mu}\xi_n^{2\nu+1}d\xi_n =$$

$$= C_0 a(t,t_0)^{-n_\nu}\varphi(t_0)e^{\omega(t,t_0)}\ I_1\cdot I_2.$$

Обчислимо спочатку інтеграл I_1. Для цього використаємо заміну (A) і нерівність $|a\alpha'+x'|^\mu \le \ \eta(a^\mu|\alpha'|^\mu+|x'|^\mu)$.

$$I_1 = \int_{E_{n-1}} e^{-c\left|\frac{x'-\xi'}{a(t,t_0)}\right|^q + k|\xi'|^\mu} d\xi' =$$

$$= \int_{E_{n-1}} e^{-c|\alpha'|^q + k|a\alpha'+x'|^\mu} a^{n-1} d\alpha' \le$$

$$\le \int_{E_{n-1}} e^{-c|\alpha'|^q + k\eta(a^\mu|\alpha'|^\mu+|x'|^\mu)} a^{n-1} d\alpha' =$$

$$= e^{k\eta|x'|^\mu} a^{n-1} \int_{E_{n-1}} e^{-c|\alpha'|^q + k\eta a^\mu|\alpha'|^\mu} d\alpha'.$$

Розпишемо інтеграл I_2, враховуючи означення оператора узагальненого зсуву:

$$I_2 = \int_0^\infty T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\left|\frac{x_n}{a(t,t_0)}\right|^q}\} e^{k|\xi_n|^\mu}\xi_n^{2\nu+1}d\xi_n =$$

$$= C(\nu)\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-c\left(\frac{r(\alpha,x_n,\xi_n)}{a(t,t_0)}\right)^q}\sin^{2\nu}\alpha e^{k|\xi_n|^\mu}\times$$

$$\times \xi_n^{2\nu+1} d\xi_n d\alpha = C(\nu)\int_0^\infty e^{k|\xi_n|^\mu} d\xi_n \times$$

$$\times \int_0^\pi e^{-c\left(\frac{r(\alpha,x_n,\xi_n)}{a(t,t_0)}\right)^q}\sin^{2\nu}\alpha \xi_n^{2\nu}\xi_n d\alpha.$$

Далі, проводячи заміну $(\bar{A})$, отримаємо

$$I_2 = C(\nu)\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{k\left|(x_n-v_1a)^2+(v_2a)^2\right|^{\frac{\mu}{2}}}\times$$

$$\times e^{-c\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^q} v_2^{2\nu}a^{2\nu}a^2 dv_1 dv_2 =$$

$$= C(\nu)a^{2\nu+2}\int_0^\infty v_2^{2\nu}dv_2 \int_{-\infty}^\infty e^{k\left|(x_n-v_1a)^2+(v_2a)^2\right|^{\frac{\mu}{2}}}\times$$

$$\times e^{-c\left(v_1^2+v_2^2\right)^{\frac{q}{2}}} dv_1.$$

Використовуючи нерівності $|(x_n-v_1a)^2 + (v_2a)^2|^{\frac{\mu}{2}} \ \le\ \eta_1(|x_n-v_1a|^\mu + |v_2a|^\mu)$, $(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{q}{2}} \le \eta_2(v_1^q+v_2^q)$, зведемо інтеграл I_2 до вигляду:

$$I_2 = a^{2\nu+2}C(\nu)\int_0^\infty v_2^{2\nu}dv_2\times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty e^{k\eta_1(|x_n-v_1a|^\mu+|v_2a|^\mu)}e^{-c\eta_2\left(v_1^q+v_2^q\right)}dv_1 =$$

$$= a^{2\nu+2}C(\nu)\int_0^\infty e^{k\eta_1|v_2a|^\mu - c\eta_2 v_2^q} v_2^{2\nu}dv_2\times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty e^{k\eta_1|x_n-v_1a|^\mu - c\eta_2 v_1^q}dv_1.$$

В інтегралі по v_1 використаємо нерівність $|x_n-v_1a|^\mu \le \eta_3(|x_n|^\mu+|v_1a|^\mu)$. Тоді остаточно матимемо:

$$I_2 = a^{2\nu+2}e^{k\eta_1\eta_3|x_n|^\mu}C(\nu)\times$$

$$\times \int_0^\infty e^{k\eta_1|v_2a|^\mu - c\eta_2 v_2^q}v_2^{2\nu}dv_2\int_{-\infty}^\infty e^{k\eta_1\eta_3|v_1a|^\mu - c\eta_2 v_1^q}dv_1.$$

Отже,

$$I_1\cdot I_2 \le C(\nu)e^{k\eta|x'|^\mu}a^{n-1}a^{2\nu+2}e^{k\eta_1\eta_3|x_n|^\mu}\times$$

$$\times \int_{E_{n-1}} e^{-c|\alpha'|^q + k\eta a^\mu|\alpha'|^\mu}d\alpha' \times \int_0^\infty e^{k\eta_1|v_2a|^\mu - c\eta_2 v_2^q}\times$$

$$\times v_2^{2\nu}dv_2\int_{-\infty}^\infty e^{k\eta_1\eta_3|v_1a|^\mu - c\eta_2 v_1^q}dv_1 \le$$

$$\le C(\nu)e^{k\bar{\eta}|x|^\mu}a^{n+2\nu+1}\int_{E_n} e^{-c_1|\alpha|^q + k\bar{\eta}a^\mu|\alpha|^\mu}d\alpha\times$$

$$\times \int_0^\infty e^{k\eta_1|v_2a|^\mu - c\eta_2 v_2^q}v_2^{2\nu}dv_2 =$$

$$= C(\nu)e^{k\bar{\eta}|x|^\mu}a^{n+2\nu+1}\ A_1\cdot A_2,$$

де $\bar\eta=\max\{\eta;\eta_1\eta_3\}$, $c_1=\min\{c;c\eta_2\}$.

Для оцінки A_1 перейдемо до сферичних координат. Тоді

$$A_1=w_{n-1}\int\limits_0^\infty e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}R^{n-1}dR.$$

Дослідимо підінтегральну функцію $f(R)=e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}$ на максимум:

$$f'(R)=\left(-c_1qR^{q-1}+k\bar\eta a^\mu\mu R^{\mu-1}\right)\times$$
$$\times e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}=0,$$
$$-c_1qR^{q-1}+k\bar\eta a^\mu\mu R^{\mu-1}=0,$$
$$R^{\mu-1}\left(-c_1qR^{q-\mu}+k\bar\eta a^\mu\mu\right)=0,$$
$$-c_1qR^{q-\mu}+k\bar\eta a^\mu\mu=0,$$
$$R^{q-\mu}=\frac{k\bar\eta a^\mu\mu}{c_1q},$$
$$R_{\max}=\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{1}{q-\mu}}\ a^{\frac{\mu}{q-\mu}}.$$

$$f_{\max}=f(R_{\max})=\exp\left\{-c_1\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{q}{q-\mu}}\ a^{\frac{\mu q}{q-\mu}}+\right.$$
$$\left.+k\bar\eta a^\mu\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ \left(a^{\frac{\mu}{q-\mu}}\right)^\mu\right\}=$$
$$=\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{\mu^2}{q-\mu}}k\bar\eta a^\mu\left(-\frac{\mu}{q}+1\right)\right\}=$$
$$=\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{\mu^2+q\mu-\mu^2}{q-\mu}}k\bar\eta\left(\frac{q-\mu}{q}\right)\right\}=$$
$$=\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\left(\frac{q-\mu}{q}\right)\right\}.$$

Запишемо інтеграл $\int\limits_0^\infty e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}\times$ $\times R^{n-1}dR$ у вигляді

$$\int\limits_0^\infty e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}R^{n-1}dR=\int\limits_0^{R_1}+\int\limits_{R_1}^\infty=B_1+B_2.$$

Оцінимо спочатку інтеграл B_2.

$$\int\limits_{R_1}^\infty e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}R^{n-1}dR\le\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c_1}{2}R^q}R^{n-1}dR.$$

Визначимо, при якому значенні R_1 дана оцінка є правильною:

$$-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu\le-\frac{c_1}{2}R^q,$$
$$-\frac{c_1}{2}R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu\le 0,$$
$$R^\mu\left(-\frac{c_1}{2}R^{q-\mu}+k\bar\eta a^\mu\right)\le 0,$$
$$-\frac{c_1}{2}R^{q-\mu}+k\bar\eta a^\mu\le 0,$$
$$R^{q-\mu}\ge\frac{2k\bar\eta a^\mu}{c_1},\quad R\ge\left(\frac{2k\bar\eta a^\mu}{c_1}\right)^{\frac{1}{q-\mu}}.$$

Отже, $R_1=\left(\frac{2k\bar\eta a^\mu}{c_1}\right)^{\frac{1}{q-\mu}}$. Тоді

$$B_1\le\int\limits_0^{R_1}e^{-c_1R^q+k\bar\eta a^\mu R^\mu}R^{n-1}dR\le$$
$$\le\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\left(\frac{q-\mu}{q}\right)\right\}\times$$
$$\times\int\limits_0^{R_1}R^{n-1}dR=\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\times\right.$$
$$\left.\left(\frac{q-\mu}{q}\right)\right\}\left.\frac{R^n}{n}\right|_0^{R_1}=\frac{1}{n}\left(\frac{2k\bar\eta a^\mu}{c_1}\right)^{\frac{n}{q-\mu}}\times$$
$$\times\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\left(\frac{q-\mu}{q}\right)\right\}.$$

Отже,

$$A_1\le w_{n-1}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2k\bar\eta a^\mu}{c_1}\right)^{\frac{n}{q-\mu}}\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\left(\frac{q-\mu}{q}\right)\right\}+\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c_1}{2}R^q}R^{n-1}dR\right].$$

Аналогічно оцінюється інтеграл A_2 і

$$A_2\le\exp\left\{\left(\frac{k\eta_1\mu}{c\eta_2q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\ a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\eta_1\frac{q-\mu}{q}\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{2k\eta_1a^\mu}{c\eta_2}\right)^{\frac{2\nu+1}{q-\mu}}\ \frac{1}{2\nu+1}+\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c\eta_2}{2}v_2^q}v_2^{2\nu}dv_2.$$

Остаточно для $u(x,t_0)$ маємо наступну оцінку

$$|u(x,t_0)| \le C_0 a(t,t_0)^{-n_\nu}\varphi(t_0)e^{\omega(t,t_0)}e^{k\bar\eta|x|^\mu}\times$$
$$\times a^{n+2\nu+1}w_{n-1}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{2k\bar\eta a^\mu}{c_1}\right)^{\frac{n}{q-\mu}}\times\right.$$
$$\times\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\frac{q-\mu}{q}\right\}+$$
$$\left.+\int_0^\infty e^{-\frac{c_1}{2}R^q}R^{n-1}dR\right]\left[\exp\left\{\left(\frac{k\eta_1\mu}{c\eta_2 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\times\right.\right.$$
$$\left.\times a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\eta_1\frac{q-\mu}{q}\right\}\left(\frac{2k\eta_1 a^\mu}{c\eta_2}\right)^{\frac{2\nu+1}{q-\mu}}\frac{1}{2\nu+1}+$$
$$\left.+\int_0^\infty e^{-\frac{c\eta_2}{2}v_2^q}v_2^{2\nu}dv_2\right].$$

Вимагаємо, щоб виконувалося граничне співвідношення

$$\varphi(t_0)a(t,t_0)^{-n_\nu}a^{n+2\nu+1}a^{\frac{\mu n}{q-\mu}}a^{\frac{\mu(2\nu+1)}{q-\mu}}e^{\omega(t,t_0)}\times$$
$$\times\exp\left\{\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\frac{q-\mu}{q}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\left(\frac{k\eta_1\mu}{c\eta_2 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}a^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\eta_1\frac{q-\mu}{q}\right\}=$$
$$=\varphi(t_0)a(t,t_0)^{-n_\nu+n+2\nu+1+\frac{\mu n}{q-\mu}+\frac{\mu(2\nu+1)}{q-\mu}}\times$$
$$\times\exp\left\{\omega(t,t_0)+ka^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\frac{q-\mu}{q}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\bar\eta\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}+\eta_1\left(\frac{k\eta_1\mu}{c\eta_2 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\right)\right\}=$$
$$=\varphi(t_0)a(t,t_0)^{-n_\nu+\frac{q(n+2\nu+1)}{q-\mu}}\times$$
$$\times\exp\left\{\omega(t,t_0)+ka^{\frac{q\mu}{q-\mu}}k\bar\eta\frac{q-\mu}{q}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\bar\eta\left(\frac{k\bar\eta\mu}{c_1 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}+\eta_1\left(\frac{k\eta_1\mu}{c\eta_2 q}\right)^{\frac{\mu}{q-\mu}}\right)\right\}\to 0$$

при $t_0\to-\infty$.

Враховуючи дане припущення і оцінку розв'язку, отримаємо твердження теореми.

Зауваження. Якщо розглянути систему, коефіцієнти якої залежать від t, то теореми Ліувілля будуть виконуватися лише при додаткових обмеженнях на систему. В протилежному випадку, теореми не будуть вірними. Розглянемо, наприклад, систему

$$\begin{cases}\frac{\partial u_1}{\partial t}=(\cos 2t-a)(-1)^b B_x^b u_1+\\ \qquad\qquad +(-1+\sin 2t)(-1)^b B_x^b u_2,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}=(1+\sin 2t)(-1)^b B_x^b u_1+\\ \qquad\qquad +(-\cos 2t-a)(-1)^b B_x^b u_2,\end{cases}$$

$0<a\le 1$.

Розв'язок даної системи має наступний вигляд

$$u_1(t,x)=j_\nu(x)e^{(1-a)t}\cos t,$$
$$u_2(t,x)=j_\nu(x)e^{(1-a)t}\sin t$$

і він є обмеженим при $t\le 0$. Якщо б виконувались теореми Ліувілля для даної системи, то розв'язок тотожньо дорівнював би нулеві, а це не так.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *С.Д.Эйдельман.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
2. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Масікевич М.І., Матійчук М.І.* Оцінки матриці Гріна в чверті простору B-параболічної системи з імпульсною дією // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 88 - 95.
4. *С.Д.Эйдельман.* Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Матем. сб. 44, №4, 1958. – С. 481 - 508.
5. *Р.Э.Виноград.* Об одном утверждении К.П.Персидского // Успехи матем. наук. Т.9, Вып. 2, 1954. – С. 125 - 128.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.