УДК 517.911

©2009 р. О. Є. Зернов[1], Ю. В. Кузіна[2]

[1] Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського, Одеса
[2] Одеський інститут фінансів Українського державного університета фінансів та міжнародної торговлі, Одеса

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКОЇ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Для неявної сингулярної задачі Коші доведено існування єдиного неперервно диференційовного розв'язку з визначеною асимптотикою.

For an implicit initial value problem the existence of the unique continuously differentiable solution with definite asymptotics is proved.

Відомо, що дослідження сингулярних задач Коші є одним з головних напрямків розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь. Слід підкреслити, що для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної невідомої функції, достатньо докладно вивчені питання розв'язності [3,12,15], а також збіжності до розв'язку послідовностей наближень [2,11,14,16]. В той же час для диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної невідомої функції, одержані не тільки результати про розв'язність та кількість розв'язків [10,13], але досліджено також [1,5] асимптотичну поведінку розв'язків, причому в достатньо загальних умовах. Але асимптотику розв'язків неявних диференціальних рівнянь зараз вивчено набагато менше навіть для регулярного випадку. Тому автори розглянули деяку сингулярну задачу Коші неявного виду та одержали ефективні достатні умови існування єдиного розв'язку з відомою асимптотикою. При цьому були застосовані якісні методи [4,5,6]. Робота продовжує дослідження, які були розпочаті авторами в статтях [7,8,9].

Розглядатимемо задачу Коші

$$\alpha(t)x'(t) = at + bx(t) + \varphi(t, x(t), x'(t)), \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

де $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ - невідома функція. Нехай виконані наступні *умови (A)*:

1) a, b - сталі;

2) $\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ - неперервна функція, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t) = 0$;

3) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ - неперервна функція, $D = \left\{(t,x,y) : t \in (0,\tau), |x| < r_1 \frac{t^2}{\alpha(t)}, |y| < r_2 \frac{t}{\alpha(t)}\right\}$, де r_1, r_2 - додатні сталі.

Розв'язком задачі (1),(2) називається неперервно диференційовна функція $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}\,(0 < \rho < \tau)$, яка тотожно задовольняє рівнянню (1) при всіх $t \in (0,\rho]$ та, крім того, задовольняє умову $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Назвемо *умовами (B)* сукупність наступних умов:

1) $\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ - неперервно диференційовна функція;

2) $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\alpha(t)}{t} = +\infty$;

3) $t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \lambda + \eta(t), t \in (0,\tau)$,
де λ - стала, $0 \le \lambda \le 1, \eta : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ - неперервна функція, $\lim\limits_{t\to+0} \eta(t) = 0$;

4) $|\varphi(t,x_1,y_1) - \varphi(t,x_2,y_2)| \le$

$$\le l_2 \frac{\alpha(t)}{t} |x_1 - x_2| + l_3 \alpha(t) |y_1 - y_2|$$

для будь-яких $(t,x_1,y_1) \in D, (t,x_2,y_2) \in D$, де l_2, l_3 - додатні сталі, $l_2 + l_3 < 1$. Нехай сталі c_1, c_2 означені рівностями

$$c_1 = \frac{a}{2-\lambda}, c_2 = \frac{bc_1}{3-2\lambda}, \quad (3)$$

а функція $\xi : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ означається рівністю

$$\xi(t) = c_1 \frac{t^2}{\alpha(t)} + c_2 \frac{t^3}{\alpha^2(t)}. \quad (4)$$

Назвемо *умовами (C)* сукупність наступних умов:

1) $(t, \xi(t), \xi'(t)) \in D$ при $t \in (0, \tau)$;

2) $|\varphi(t, \xi(t), \xi'(t)) \in D| \leq K_1 \frac{t^2}{\alpha(t)} \beta(t)$,

$$|\eta(t)| \leq K_2 \tfrac{t}{\alpha(t)} \beta(t), t \in (0, \tau);$$

тут K_1, K_2 - додатні сталі, $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ - неперервно диференційовна функція, $\lim\limits_{t \to +0} \beta(t) = 0$, причому або

$$\lim_{t \to +0} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{t} = 0, \quad (5)$$

або

$$\lim_{t \to +0} \frac{t}{\alpha(t)\beta(t)} = \sigma, \quad (6)$$

де σ - стала, $0 \leq \sigma < +\infty$ та, крім того,

$$\lim_{t \to +0} t \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \beta_0, 0 \leq \beta_0 < +\infty;$$

3) $l_2 < (3 + \gamma_0 - 2\lambda)(1 - l_3)$, де стала γ_0 означається так:

$$\gamma_0 = \begin{cases} 1 - \lambda, & \text{за умовою (5)} \\ \beta_0, & \text{за умовою (6)} \end{cases} \quad (7)$$

Нехай функція $\gamma : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ означається рівностями

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{t}{\alpha(t)}, & \text{за умовою (5)} \\ \beta(t), & \text{за умовою (6)} \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, $\lim\limits_{x \to +0} t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \gamma_0$, де стала γ_0 визначена рівністю (7).

Теорема Якщо виконані умови *(A),(B),(C),* то існують сталі $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0, q > 0$ такі, що задача (1),(2) має єдиний розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, який задовольняє нерівностям

$$|x(t) - \xi(t)| \leq M \tfrac{t^3}{\alpha^2(t)} \gamma(t),$$
$$|x'(t) - \xi'(t)| \leq qM \tfrac{t^2}{\alpha^2(t)} \gamma(t),$$

де $t \in (0, \rho]$, а функції $\xi : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ та $\gamma : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ означені рівностями (4),(8) відповідно.

Доведення Нехай сталі M та q задовольняють умовам

$$M > K_3((3 + \gamma_0 - 2\lambda) - (l_2 + ql_3))^{-1},$$
$$3 + \gamma_0 - 2\lambda < q < (3 + \gamma_0 - 2\lambda - l_2) l_3^{-1},$$

де стала K_3 означається рівністю

$$K_3 = \begin{cases} |bc_2| + 1, \lim\limits_{x \to +0} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{t} = 0, \\ K_1 + K(|c_1| + 1) + |bc_2| (\sigma + 1), \\ \lim\limits_{x \to +0} \frac{t}{\alpha(t)\beta(t)} = \sigma. \end{cases}$$

Вважатимемо, що стала $\rho > 0$ задовольняє умові

$$\rho < \min \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6\},$$

(усі сталі ρ_i означаються нижче). Визначимо, що достатня малість ρ гарантує коректність всіх наступних міркувань. Означимо через B множину всіх неперервно диференційовних функцій $x : [o, \rho] \to R$ з нормою

$$\|x\|_B = \max_{t \in [0, \rho]} (|x(t)| + |x'(t)|).$$

Означимо через U підмножину B , кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє нерівностям

$$|u(t) - \xi(t)| \leq M \tfrac{t^3}{\alpha^2(t)} \gamma(t),$$
$$|u'(t) - \xi'(t)| \leq qM \tfrac{t^2}{\alpha^2(t)} \gamma(t), t \in (0, \rho],$$

причому $u(0) = 0, u'(0) = c_1$. Очевидно, що U - замкнена й обмежена множина.

Існує таке $\rho_1 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_1$, виконується умова: $(t, u(t), u'(t)) \in D$ для всіх $u \in U$.

Надалі розглядатимемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \left(at + bx(t) + \varphi(t, u(t), u'(t)) \right), \quad (9)$$

де $u \in U$ - будь-яка фіксована функція. Означимо $D_0 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], x \in \mathbb{R}\}$. Всюди в D_0 для рівняння (9) виконуються умови теореми існування й єдиності розв'язка задачі Коші та неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Введемо наступні означення: $\Phi_1 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - \xi(t)| = M\frac{t^3}{\alpha^2(t)}\gamma(t)\right\}$, $D_1 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - \xi(t)| < M\frac{t^3}{\alpha^2(t)}\gamma(t)\right\}$, $H = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - \xi(\rho)| = M\frac{\rho^3}{\alpha^2(\rho)}\gamma(\rho)\right\}$.

Нехай функція $A_1 : D_0 \to (0,+\infty]$ означена рівністю

$$A_1(t,x) = (x - \xi(t))^2 \left(\frac{t^3}{\alpha^2(t)}\gamma(t)\right)^{-2}.$$

Позначимо через $a_1 : D_0 \to \mathbb{R}$ похідну цієї функції в силу рівняння (9). Легко бачити, що існує таке $\rho_2 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_2$, виконується умова: $a_1(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$. Тому ([8], стор. 66) серед інтегральних кривих рівняння (9), які перетинають H, знайдеться хоч одна, яка означена при $t \in (0,\rho]$ та лежить в D_1 при всіх $t \in (0,\rho]$. Позначимо цю інтегральну криву через $I_u : (t, x_u(t))$. Доведемо, що вказана інтегральна крива є єдиною інтегральною кривою рівняння (9) з такими властивостями. Для цього розглянемо однопараметричні сім'ї множин

$$\Phi_2(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - x_u(t)| = \nu t\},$$
$$D_2(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - x_u(t)| < \nu t\},$$

де ν - параметр, $\nu \in (0,1]$. Нехай функція $A_2 : D_0 \to (0,+\infty]$ означена рівністю

$$A_2(t,x) = (x - x_u(t))^2 t^{-2}$$

та нехай $a_2 : D_0 \to \mathbb{R}$ - похідна цієї функції в силу рівняння (9). Легко переконатися в тому, що існує таке $\rho_3 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_3$, виконується умова: $a_2(t,x) < 0$ при $(t,x) \in D_0$, якщо тільки $x \ne x_u(t)$. Зокрема, $a_2(t,x) < 0$, якщо $(t,x) \in \Phi_2(\nu)$ для будь-якого фіксованого параметру $\nu \in (0,1]$. Звідси випливає ([8], стор.66-67) справедливість твердження, яке доводиться. На підставі сказаного,

$$|x_u(t) - \xi(t)| \le M\frac{t^3}{\alpha^2(t)}\gamma(t), t \in (0,\rho].$$

Легко бачити, що існує таке $\rho_4 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_4$, виконується нерівність

$$|x'_u(t) - \xi'(t)| \le qM\frac{t^2}{\alpha^2(t)}\gamma(t), t \in (0,\rho].$$

Покладемо за означенням $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c_1$. Тоді $x_u \in U$. Означимо оператор $T : U \to U$ рівністю

$$Tu = x_u. \tag{10}$$

Тепер доведемо, що $T : U \to U$ - оператор стиску. Нехай $u_1 \in U$, $u_2 \in U-$ довільні фіксовані функції. Покладемо $Tu_1 = x_1, Tu_2 = x_2$. Якщо $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Якщо ж $u_1 \ne u_2$, то нехай $\|u_1 - u_2\|_B = h, h > 0$. Далі будемо досліджувати асимптотичну поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$$x'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\left(at + bx(t) + \varphi(t, u_1(t), u'_1(t))\right). \tag{11}$$

Введемо позначення

$$\Phi_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| = 3ht\},$$
$$D_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| < 3ht\}.$$

Нехай функція $A_3 : D_0 \to (0,+\infty]$ означена рівністю

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2},$$

та нехай $a_3 : D_0 \to \mathbb{R}$ - похідна цієї функції в силу рівняння (11). Легко бачити, що існує таке $\rho_5 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_5$, виконується умова:

$$a_3(t,x) < 0, \quad (t,x) \in \Phi_3. \tag{12}$$

При одержанні (12) ми використали очевидні нерівності

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le ht, |u'_1(t) - u'_2(t)| \le h,$$

які виконані при всіх $t \in (0,\rho]$ та для будь-яких $u_1 \in U, u_2 \in U$. В той же час

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| \le$$

$$\le 2M \tfrac{t^3}{\alpha^2(t)} \gamma(t) < 3ht,$$

якщо $t \in (0, t(h)]$, де $t(h) \in (0,\rho]$, $t(h)$ - достатньо мале. Тому інтегральна крива $I : (t, x_1(t))$ рівняння (11) лежить в D_3 при всіх $t \in (0, t(h)]$. Звідки випливає ([8], стор.67-69), що вказана інтегральна крива залишається в D_3 при всіх $t \in (0,\rho]$. Отже,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le 3ht, t \in (0,\rho]. \qquad (13)$$

Легко бачити, що

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \le (l_2 + l_3 + o(1))h, t \to +0. \qquad (14)$$

На підставі (13),(14),

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le$$

$$\le (l_2 + l_3 + +o(1))h, \quad t \to +0.$$

Покладемо $\theta = \frac{1}{2}(1 + l_1 + l_3)$. Очевидно, $0 < \theta < 1$. Існує таке $\rho_6 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_6$, виконується умова:

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \theta h, t \in (0,\rho],$$

тому маємо

$$\max_{t\in[0,\rho]} (|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \le \theta h,$$

або

$$\|x_1 - x_2\|_B \le \theta h,$$

або, остаточно,

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \le \theta \|u_1 - u_2\|_B.$$

Проведені міркування не залежать від обрання функцій $u_1 \in U, u_2 \in U$. Тому $T : U \to U$ - оператор стиску. Залишається застосувати до оператора $T : U \to U$ принцип Банаха стиснутих відображень. Теорему доведено.

Приклад

$$t^{\frac{1}{3}} x'(t) = t + 2x(t) + \varphi(t, x(t), x'(t)), x(0) = 0$$

де

$$\varphi(t, x(t), x'(t)) = -\frac{24}{35} t^3 - t^{\frac{19}{3}} (x(t))^8 (x'(t))^5 +$$

$$+ t^7 (x(t))^8 (x'(t))^4 + 2t^6 (x(t))^9 (x'(t))^4 -$$

$$-\frac{24}{35} t^9 (x(t))^8 (x'(t))^4.$$

Відповідно теореми, ця задача має єдиний розв'язок $x_0\,(0,\rho] \to \mathbb{R}$ такий, що

$$\left| x_0(t) - \tfrac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} - \tfrac{18}{35} t^{\frac{7}{5}} \right| \le Mt^3, t \in (0,\rho], \quad (*)$$

де ρ достатньо мале, $\rho > 0, M$ достатньо велике.

З іншого боку, задачу можна записати у вигляді:

$$\left(t^{\frac{1}{3}} x'(t) - t - 2x(t) + \tfrac{24}{35} t^3 \right) \times$$
$$\times (1 + t^6 (x(t))^8 (x'(t))^4) = 0, \quad x(0) = 0.$$

Так як загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x(t) = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{18}{35} t^{\frac{7}{5}} + \frac{12}{35} t^3 + Ce^{3t^{\frac{2}{3}}}, C \in \mathbb{R},$$

то очевидно, що у даної задачі Коші існує єдиний розв'язок $x_0\,(0,\rho] \to \mathbb{R}$ (для будь-якого $\rho > 0$) такий, що

$$x_0(t) = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{18}{35} t^{\frac{7}{5}} + \frac{12}{35} t^3.$$

Цей розв'язок задовольняє умову (*), якщо $M \ge 1$, а $\rho > 0$ - достатньо мале.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М: Мир,1968.—464 с.

2. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных // Дифференц. уравн.— 1971.— Т.7, N$^{\beta o}$ 9.— С.1575—1580.

3. *Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности особой точки // Функц.анал.Прилож.— 1985.— Т.19.— $N^{\beta o}$ 2.— С.1—10.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.— 472 с.

5. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972.— 664 с.

6. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн.— 2001.— Т.53.— $N^{\beta o}$ 3.— С.302—310.

7. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественное исследование сингулярной задачи Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0, x(0) = 0$ // Укр. мат. журн. — 2003.— Т.55.— $N^{\beta o}$ 12.— С.1720—1723.

8. *Зернов О. Є., Кузіна Ю. В.* Геометричний аналіз задачі Коші для неявного диференціального рівняння // Матем. Студії. — 2008.— Т.29.— $N^{\beta o}$ 1.— С.63—70.

9. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Геометрический анализ некоторой сингулярной задачи Коши // Нелін. коливання. — 2004.— Т.7.— $N^{\beta o}$ 1.— С.67—80.

10. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравн.— 1965.— Т.1.— $N^{\beta o}$ 10.— С.1271—1291.

11. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных// Изв. высш. учебн. завед. Математика.— 1971.— $N^{\beta o}$ 9.— С.79—84.

12. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк I.O.* Диференціальні рівняння. —К.: Либідь,— 2003.—600с.

13. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Труды Московск. матем. об-ва.— 1959.— $N^{\beta o}$ 8.— С.155—198.

14. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Different. Equat. and Dynam. Syst.— 1999.—B.7.— $N^{\beta o}$ 4.— P.437—459.

15. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl.— 1959.— $N^{\beta o}$ 48.— P.97—102.

16. *Kowalsky Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. Polon. Math.— 1963.— B.13. — $N^{\beta o}$ 2.— P.173—204.