УДК 517.956.4

©2009 р. Я.М. Дрінь

Буковинська державна фінансова академія

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕГЛАДКИМ СИМВОЛОМ

Для квазілінійного параболічного рівняння з псевдодиференціальним оператором доведено теорему про глобальну розв'язність задачі Коші.

The theorem about global solvability Cauchy problem for the quasi-linear parabolic equation with pseudodifferential operator are proved.

1. Постановка задачі. Нехай $(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\gamma \in [1,2]$, $\beta > \dfrac{\gamma}{n}$, $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ – задана неперервна функція така, що $\forall t \in \mathbb{R}_+$ і $\{u, u_1, u_2\} \subset \mathbb{R}$ існують сталі $\{c_1, c_2, \beta\} \subset \mathbb{R}_+$, такі, що вірними є нерівності

$$|f(t,u)| \le c_1 |u|^{1+\beta}, \tag{1}$$

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le$$
$$\le c_2 |u_1 - u_2| \max\{|u_1|^\beta, |u_2|^\beta\}; \tag{2}$$

$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – задана функція; $a_\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, однорідна степеня γ гладка в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ порядку $N \ge 2n + 2[\gamma] + 1$ і існує стала C_N така, що $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$ вірними є нерівності

$$|D_\sigma^{æ} a_\gamma(\sigma)| \le C_N |\sigma|^{\gamma - |æ|}, |æ| \le N - 2n - [\gamma].$$

Проведемо дослідження коректної розв'язності задачі Коші

$$u_t(t,x) - \alpha \Delta u(t,x) + (1-\alpha) A_\gamma u(t,x) =$$
$$f(t,u), (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

де $\alpha = 1$ при $\gamma = 2$, $\alpha = 0$ при $1 \le \gamma < 2$, $u\colon \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}$, Δ – оператор Лапласа, A_γ – псевдодиференціальна операція, побудована за символом a_γ (наприклад, $a_\gamma = |\sigma|^\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$), яка трактується як гіперсингулярна інтегральна операція [1], у просторі функцій $H(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Якщо $\gamma = 1$, то $a_\gamma = |\sigma|$, якщо $\gamma = 2$, то рівняння (3) є квазілінійним рівнянням теплопровідності.

Означення простору $H(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Нехай число $\chi \in \mathbb{R}_+$, $G\colon \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для однорідного рівняння (3) з початковою умовою (4).

При $\gamma = 1$ ФРЗК

$$G(t,x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

при $\gamma = 2$ ФРЗК

$$G(t,x) = [2\sqrt{\pi t}]^{-n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}, (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

при $1 < \gamma < 2$ ФРЗК

$$G(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)t\} d\sigma,$$

$$G(t,x) \ge 0, (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Позначимо через $H(\mathbb{R}_+^{n+1})$ простір неперервних у $\mathbb{R}_+^{n+1}$ функцій v таких, що для них є скінченною норма [2]

$$\langle v \rangle_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \equiv \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{|v(t,x)|}{G(t+\chi, x)}. \tag{5}$$

У 1974 році С.Д. Ейдельман і Я.М. Дрінь визначили параболічні псевдодиференціальні оператори (ППДО) з негладкими однорідними символами і розпочали дослідження задачі Коші для лінійних рівнянь з ППДО [3]. При вивченні властивостей розв'язків задачі Коші важливу роль відіграють оцінки

ФРЗК G. Точні оцінки функції ФРЗК G, що узгоджуються з асимптотикою із [4] у випадку $n = 1$ отримані ними в [5]. У 1988 році А.Н. Кочубей, трактуючи ПДО як гіперсингулярні інтеграли (ГСІ) отримав точні степеневі оцінки функції G і її похідних:

$$|D_x^{æ}G(t,x)| \leq C_{æ}t(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(n+\gamma+|æ|)}, \quad (6)$$

де $|æ| \leq N-2n-[\gamma]$, $N \geq 2n+2[\gamma]+1$, N – порядок гладкості символа a_γ по σ при $\sigma \neq 0$, причому $|D_\sigma^{æ}a(\sigma)| \leq C_N|\sigma|^{\gamma-|æ|}$ (див. [1, стор. 919]).

В [1] А.Н. Кочубею вдалося в загальному випадку побудувати і вивчити ФРЗК, довести теореми про розв'язність задачі Коші в класах функцій з деяким степеневим зростанням при $|x| \to \infty$, вказати на цікаві зв'язки одержаних результатів з теорією випадкових процесів.

У праці [6, стор. 32 – 34] для рівняння $\partial_t u + A_1 u = 0$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, де A_1 – ПДО з символом $|\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, побудовано ФРЗК G, який виражається рівністю (див. випадок $\gamma = 1$) і показує, що оцінка (6) є точною степеневою оцінкою, на відміну від експоненціальної в диференціальному випадку (див. $\gamma = 2$).

Серед еволюційних рівнянь з ПДО важливе місце займають рівняння з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Такі рівняння виникають при моделюванні різних реальних процесів. У праці [7] охоплені майже всі галузі фізики, де зустрічаються фрактальні структури – від квантової теорії поля і статистичної механіки до турбулентності та хаосу в динамічних системах.

Відомо, що ФРЗК G для ППДР, які містять ПДО, побудований за символом $|\sigma|^\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma \leq 2$, трактуються як густини розподілів ймовірностей деяких випадкових величин. Як зазначено в [8], такі розподіли при $0 < \gamma < 1$ досліджувалися Д.Пойа, при $\gamma = 1$ – О.Коші, при $\gamma = \dfrac{3}{2}$ – Ж.Хольцмарком, при $\gamma = 2$ – К.Гауссом. Те, що ці функції є густинами ймовірнісних розподілів лише при $0 < \gamma \leq 2$, було доведено в повному обсязі Полем Леві, який ввів для них назву "стійкі розподіли".

Завдяки працям В.Мандельброта (їх список наведено в [6]) і його послідовників намітилося використання стійких законів розподілу в деяких економічних моделях.

Серед задач для таких рівнянь найбільше досліджувалася задача Коші, яку досліджували С.Д. Ейдельман, Я.М. Дрінь, А.Н. Кочубей, В.В. Городецький, В.А. Літовченко, М.В. Федорюк, Ю.А. Дубінський та ін. Отримано важливі результати щодо коректної розв'язності цієї задачі в різних функціональних просторах, властивостей її розв'язків, зокрема інтегральних зображень, поведінки розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємності та стабілізації за Ляпуновим. Зазначимо, що задачі Коші для квазілінійних ППДР з негладкими символами майже не вивчена. У праці [9] розглянуто задача Коші для квазілінійного параболічного диференціального рівняння другого порядку з інтегральним коефіцієнтом і однією просторовою змінною.

2. Основний результат. Вірною є така

Теорема. *Нехай функція f є неперервною, задовольняє умови (1), (2) і існує таке мале число $\delta > 0$, що коли $\varphi \in H(\mathbb{R}^n)$ і $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}} \leq \delta$, то задача (3), (4) має єдиний глобальний розв'язок $u \in H(\mathbb{R}_+^{n+1})$, для якого $\langle u\rangle_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \leq C$.*

3. Доведення. Досить розглянути випадок $1 < \gamma < 2$, де використовується степенева оцінка (6) для ФРЗК G, бо випадки $\gamma = 1$, $\gamma = 2$ є, фактично прикладами, де ФРЗК G виражається точними рівностями, і є степеневою і експоненціальною функцією відповідно. Якщо задача (3), (4) має розв'язок $u \in C^{1,N}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то його можна однозначно записати у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x-\xi,\varphi(\xi))d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)f(\tau,u(\tau,\xi))d\xi,$$

$$(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_{+}. \tag{7}$$

Досліджуватимемо (7) як нелінійне інтегральне рівняння відносно шуканої функції u. За допомогою методу послідовних наближень доведемо, що рівняння (7) має єдиний розв'язок:

$$u_0(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$u_k(t,x)=u_0(t,x)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_n} G(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times f(\tau,u_{k-1}(\tau,\xi))d\xi,k\geq 1,(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_{+}. \tag{8}$$

Доведемо, що послідовність $\{u_k,k\geq 1\}$ (8) збігається у просторі $H(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$. Очевидно, з умов (1), (5) випливає, що

$$|f(t,u(t,x))|\leq C_1|u(t,x)|^{1+\beta}=$$

$$=C_1\frac{|u(t,x)|^{1+\beta}}{G^{1+\beta}(t+\chi,x)}G^{1+\beta}(t+\chi,x)\leq$$

$$\leq C_1\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}G^{1+\beta}(t+\chi,x),(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_{+}. \tag{9}$$

Тоді

$$|(Mu)(t,x)|\equiv\Big|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times f(\tau,u(\tau,\xi))d\xi\Big|\leq C_1\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\times$$

$$\times\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G^{1+\beta}(\tau+\chi,\xi)G(t-\tau,x-\xi)d\xi\leq$$

$$\leq C_3\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\int\limits_0^\infty(\tau+\chi)^{-\frac{n\beta}{\gamma}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times G(\tau+\xi,\chi)d\xi=C_3\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}G(t+\chi,x)\times$$

$$\times\lim_{\tau\to\infty}\frac{(\tau+\chi)^{1-\frac{n\beta}{\gamma}}}{1-\frac{n\beta}{\gamma}}\Bigg|_0^\tau=C_4\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}G(t+\chi,x), \tag{10}$$

якщо $1-\dfrac{n\beta}{\gamma}<0$, або $\beta>\dfrac{\gamma}{n}$, де $C_3=C_0C_1$, $C_4=C_3\gamma(n\beta-\gamma)^{-1}\chi^{1-\frac{n\beta}{\gamma}}$. При цьому використана оцінка (9) і формула згортки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)G(\tau+\chi,\xi)d\xi=G(t+\chi,x),$$

$$\tau<t,x\in\mathbb{R}^n.$$

Із нерівності (10) випливає, що

$$\langle Mu\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\leq C_4\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}. \tag{11}$$

Розглянемо дві довільні функції $\{u,v\}\subset H(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$ і, не зменшуючи загальності, вважаємо, що існує стала $K>0$ така, що $\langle u\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\leq K$ та $\langle v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}\leq K$. Проведемо, використовуючи (2), (5), оцінку різниці

$$|(Mu-Mv)(t,x)|=\Big|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times[f(\tau,u(\tau,\xi))-f(\tau,v(\tau,\xi))]d\xi\Big|\leq$$

$$\leq C_2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)\max\{|u|^\beta,|v|^\beta\}\times$$

$$\times|u-v|G^{1+\beta}(\tau+\chi,\xi)G^{-(1+\beta)}(\tau+\chi,\xi)d\xi\leq$$

$$\leq C_2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\max\Big\{\Big(\frac{|u(\tau,\xi)|}{G(\tau+\chi,\xi)}\Big)^\beta,$$

$$\Big(\frac{|v(\tau,\xi)|}{G(\tau+\chi,\xi)}\Big)^\beta\Big\}\frac{|u(\tau,\xi)-v(\tau,\xi)|}{G(\tau+\chi,\xi)}\times$$

$$\times G(t-y,x-\xi)G^{1+\beta}(\tau+\chi,\xi)d\xi\leq$$

$$\leq C_2K^\beta\langle u-v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}C_0\int\limits_0^\infty(\tau+\chi)^{-\frac{n\beta}{\gamma}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\xi)G(\tau+\chi,\xi)d\xi=$$

$$=C_5K^\beta\langle u-v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}}G(t+\chi,x),(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_{+},$$

$$C_5=C_2\cdot C_0\gamma(n\beta-\gamma)^{-1}.$$

Отже, вірною є нерівність

$$\langle Mu - Mv\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq C_5 K^\beta \langle u-v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}. \quad (12)$$

Оцінимо початкове наближення u_0 за нормою простору $H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Маємо, що

$$|u_0(t,x)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x-\xi)G(\chi,\xi)\frac{\varphi(\xi)}{G(\chi,\xi)}d\xi\Big| \leq$$

$$\leq \langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} G(t+\chi,x), (t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+;$$

тому

$$\langle u_0\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq \langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n}. \quad (13)$$

Припустимо, що φ неперервна на $\mathbb{R}^n$ і існує таке число $\delta > 0$, мале, що $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} < \delta$, тобто φ є малою за нормою простору $H(\mathbb{R}^n)$.

Тоді із (8) і (11) випливає, що

$$\langle u_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq \delta + C_4\langle u_{k-1}\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_+}, k\geq 1. \quad (14)$$

Тому

$$\langle u_1\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq \delta + C_4\delta^{1+\beta} \equiv M_1(\delta),$$

$$\langle u_2\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq \delta + C_4 M_1^{1+\beta}(\delta) \equiv M_2(\delta),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\langle u_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq \delta + C_4 M_{k-1}^{1+\beta}(\delta) \equiv M_k(\delta), k\geq 1. \quad (15)$$

Звідси випливає, що для досить малого $\delta > 0$ існує $M(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ таке, що

$$\langle u_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq M(\delta), k\geq 1. \quad (16)$$

Із нерівностей (12) – (16) отримуємо, що

$$\langle u_k - u_{k-1}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \langle Mu_{k-1} - Mu_{k-2}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \leq$$

$$\leq C_5 M^\beta(\delta)\langle u_{k-1} - u_{k-2}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+},$$

$k \geq 2$. Якщо $\delta > 0$ вибрати настільки малим, щоб $C_5 M^\beta(\delta) < 1$, то, оскільки $\{u_k, k\geq 1\}$ є послідовністю частинних сум для функціонального ряду

$$u_0 + (u_1 - u_0) + \dots + (u_k - u_{k-1}) + \dots,$$

який мажорується за нормою простору $H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ збіжним числовим рядом, то отримуємо, що послідовність $\{u_k, k\geq 1\}$ збігається до функції $u \in H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. При цьому гранична функція u є неперервною в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Якщо в (8) перейти до границі при $k\to\infty$, то одержимо, що u є розв'язком рівняння (7). Теорема доведена.

Зауваження 1. Із властивостей інтегралів з формули (7) випливає, що при підвищенні гладкості функцій f та φ відповідно підвищиться гладкість розв'язку задачі (3), (4).

Зауваження 2. Якщо припустити, що функції φ та f неперервні і обмежені відповідно в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^{n+1}_+$, а також для довільних $t\in\mathbb{R}_+$ і $\{u_1,u_2\}\subset\mathbb{R}$ існує таке число $L>0$, що виконується нерівність

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L|u_1 - u_2|,$$

то інтегральне рівняння (7) можна розв'язати методом послідовних наближень, причому

$$|u_k(t,x) - u_{k-1}(t,x)| \leq ML^k\frac{t^k}{k!}, k\geq 1.$$

Звідси випливає, що інтегральне рівняння (7) має єдиний розв'язок для $0 < t \leq T$. Тоді не існує глобальної розв'язності, але не вимагається спадання початкової функції φ при $|x|\to\infty$.

Зауваження 3. Замість рівняння (3) можна розглядати ППДР з інтегральним коефіцієнтом вигляду

$$u_t(t,x) - \alpha\Delta u(t,x) + (1-\alpha)A_\gamma u(t,x) +$$

$$+\int\limits_\Omega u(t,\xi)d\xi\sum_{i=1}^n u_{x_i}(t,x) = f(t,u), \quad (3')$$

де $\alpha = 1$ при $\gamma = 2$ і $\alpha = 0$ при $1\leq\gamma\leq 2$, Δ – оператор Лапласа, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$. Припускається, що $u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння $(3')$, який належить до простору $C^{1,N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Зробимо заміну

$$u(t,x) = v(t,y),$$

$$y_i = x_i - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega u(\eta,\xi)d\xi d\eta, (t,y)\in\mathbb{R}^{n+1}_+,$$

$$1 \le i \le n.$$

Тоді

$$u_t(t,x) = v_t(t,y) + \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}(t,y)\frac{\partial y_i}{\partial t} =$$

$$= v_t(t,y) - \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}(t,y)\int_{\Omega} u(t,\xi)d\xi,$$

$$u_{x_i}(t,x) = v_{y_i}(t,x), 1 \le i \le n,$$

$$\Delta u(t,x) = \Delta v(t,x)$$

$$A_\gamma u(t,x) = A_\gamma v(t,y),$$

і задача Коші $(3')$, (4) перейде в таку задачу

$$v_t(t,y) - \alpha\Delta v(t,y) + (1-\alpha)A_\gamma v(t,y) =$$

$$= f(t, v(t,y)), (t,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

$$v(0,y) = \varphi(y), y \in \mathbb{R}^n,$$

яка є задачею (3), (4) і для неї вірною є доведена теорема.

Зазначимо також, що результати даної праці при $n = 1$ анонсовані в [10].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / Анатолий Наумович Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1988.

2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

3. *Эйдельман С.Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // С.Д. Эйдельман, Я.М.Дринь // Приближенные методы математического анализа. Киев, 1974. – С. 60 – 69.

4. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения / Михаил Васильевич Федорюк // Дифф. уравнения. 1978. Т .14, № 7. – С. 1296 – 1301.

5. *Эйдельман С.Д.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // С.Д. Эйдельман, Я.М.Дринь // Математ. исслед. 1981. Вып. 63. – С. 18 – 83.

6. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Роман Ярославович Дрінь. – Львів, 1997. – 137 с.

7. Фракталы в физике: Труды VI Международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 июля 1985). – М.6 Мир, 1988. – 672 с.

8. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения // Золотарев В.М. – М.: Наука, 1983. – 304 с.

9. *Лавренчук В.П.* Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння другого порядку з інтегральним коефіцієнтом / В.П. Лавренчук // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. Відп. ред. С.Д. Івасишен. – Чернівці, 1990. – С. 120 – 127.

10. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для квазілінійного псевдодиференціального рівняння з інтегральним коефіцієнтом / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Тези доповідей міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М.П. Кравчука (22 – 28 вересня 1992 р.), Київ-Луцьк, 1992. – С. 70.