УДК 517.95

©2009 р. О.В. Доманська

Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ У КВАЗІЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Знайдено класи існування та єдиності узагальненого розв'язку нелінійних еліптичних нерівностей, заданих у необмежених квазіциліндричних областях, з певними умовами на поведінку розв'язку і обмеженнями на зростання вихідних даних на нескінченності. При цьому використовується метод, який базується на аналозі принципу Сен-Венана.

It has been obtained the existence and uniqueness classes of nonlinear elliptic inequalities given in unbounded quasicylindrical domains under some conditions on the solution's behaviour and restrictions on initial data's growth. We use the method based on Saint-Venant's principle analogue.

Вступ. На сьогодні актуальним є вивчення варіаційних нерівностей із нестаціонарними умовами росту, оскільки вони є об'єктом дослідження у теорії пружності та динаміці електрореологічних речовин ([1,2]).

У даній роботі досліджується однозначна розв'язність варіаційних нерівностей, модельним прикладом яких є варіаційна нерівність, асоційована з рівнянням

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} - |u|^{p_0(x)-2}u = f, \quad (1)$$

при $p_i(x) = 2$ $(i = \overline{0,k})$, $p_i(x) > 1$ $(i = \overline{k+1,n})$ (зауважимо, що при $p_i(x) = 2$ $(i = \overline{k+1,n})$ рівняння (1) є лінійним), а область задання Ω по змінних $x_1, \ldots, x_k$ є необмеженою, а по решта змінних — обмеженою.

Еліптичні варіаційні нерівності в необмежених областях вивчались у роботах [3–7]. Виявилося, що для єдиності розв'язку лінійних та деяких нелінійних варіаційних нерівностей із необмеженою областю задання треба накласти певні обмеження на його поведінку на нескінченності, а існування розв'язку вдається довести при відповідних умовах на зростання вихідних даних на нескінченності [3,4]. Однак існують нелінійні варіаційні нерівності, які є однозначно розв'язними без умов на нескінченності. У роботі [5] знайдено варіаційні нерівності зі сталими показниками з такою властивістю. У [6] встановлено коректність без умов на нескінченності систем квазілінійних варіаційних нерівностей, модельним прикладом яких є нерівність, асоційована з (1) при $p_i = 2$ $(i = \overline{1,n})$, $p_0(x) > 2$. У роботі [7] отримано подібний результат для анізотропних варіаційних нерівностей, асоційованих з рівнянням (1) при $1 < p_i(x) \leq 2$ $(i = \overline{1,n})$, $p_0(x) \geq 2$, а у [8] — для їхніх узагальнень на випадок квазілінійних варіаційних нерівностей вищих порядків зі змінними показниками нелінійності.

У праці [9] знайдено класи існування та єдиності розв'язку крайових задач для узагальнень рівняння (1) з умовами на нескінченності. При цьому використовується комбінація методу, який базується на аналозі відомого в теорії пружності принципу Сен-Венана та методу монотонності. У даній роботі ці результати переносяться на варіаційні нерівності.

Основні позначення. Через $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, позначатимемо лінійний простір, складений із елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_m)$, де $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,m})$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^m$, — яка-небудь функція, то під $v|_D$ розумітиметься її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Нехай Ω — необмежена *квазіциліндрична* область у просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, тобто (з точністю до нумерації змінних) для деякого натурального $k < n$ множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 < R^2\}$ є обмеженою для кожного $R > 0$ і для будь-якого $j \in \{1, \ldots, k\}$ множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=\overline{1,k}, i\neq j} x_i^2 < R^2\}$ — необмежена хоча б для одного значення $R > 0$. Окрім того, припускатимемо, що 0 належить до Ω. Позначимо через Ω_τ для довільного $\tau > 0$ зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2} < 1 + \tau\}$, що містить 0. Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω — кусково-гладка і така, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції v виконується рівність

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Omega_\tau} v(x)d\,x = \int\limits_{S_\tau} v(s)h(s)d\,s, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

де $S_\tau \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega_\tau \backslash \partial\Omega$, $h \in C(\overline{\Omega})$, $h > 0$, $d\,s$ — елемент площі поверхні S_τ. Для виконання умови (2) достатньо вимагати, щоб межа області Ω була гладкою. Зауважимо, що будь-яка область вигляду $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 — необмежена область в $\mathbb{R}^k$ з гладкою межею, а Ω_2 — обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, є квазіциліндричною і задовольняє вказану умову.

Нехай $C_{\text{c}}^1(\mathbb{R}^k)$ — підпростір простору $C^1(\mathbb{R}^k)$, який складається з функцій, носії яких є обмеженими, а $C_{\text{c}}^{1,+}(\mathbb{R}^k)$ — підпростір простору $C_{\text{c}}^1(\mathbb{R}^k)$, елементами якого є невід'ємні в $\mathbb{R}^k$ функції.

Нехай $r \in L_{\infty,\text{loc}}(\Omega)$, причому $r(x) \geq 1$ для майже всіх (м. в.) $x \in \Omega$. На просторі $C(\overline{\Omega_\tau})$, де $\tau > 0$ — довільне число, введемо норму
$\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_\tau)} \overset{\text{def}}{=} \inf\{\lambda > 0 : \rho_r(v/\lambda; \tau) \leq 1\}$, де $\rho_r(v; \tau) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_\tau} |v(x)|^{r(x)}\,d\,x$. Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega_\tau})$ за цією нормою позначимо через $L_{r(\cdot)}(\Omega_\tau)$ (див. [10]). Множина $L_{r(\cdot)}(\Omega_\tau)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_\tau)$ і називається *узагальненим простором Лебега*. Під $L_{r(\cdot),\text{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$.

Нехай $\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \{p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : p_i \in L_\infty(\Omega),\ p_i(x) > 1$ для м. в. $x \in \Omega\}$. Для $p \in \mathbb{P}$ через $p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots, p_n^*)$ позначимо векторну функцію, компоненти якої задовольняють умову: $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p_i^*(x)} = 1$ $(i = \overline{0,n})$ для м. в. $x \in \Omega$. Для кожного $\tau > 0$ під $W_{p(\cdot)}^1(\Omega_\tau)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ за нормою

$$\|v\|_{W_{p(\cdot)}^1(\Omega_\tau)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \|\partial_i v\|_{L_{p\,i(\cdot)}(\Omega_\tau)},$$

де $\partial_i \overset{\text{def}}{=} \partial/\partial x_i$, $i = \overline{1,n}$, $\partial_0 v = v$. Очевидно, що $W_{p(\cdot)}^1(\Omega_\tau)$ є підпростором простору $\big\{v(x),\ x \in \Omega_\tau : \partial_i v \in L_{p_i(\cdot)}(\Omega_\tau)\ \ (i = \overline{0,n})\big\}$.

На лінійному просторі $C_{\text{c}}^1(\overline{\Omega})$ введемо топологію лінійного опуклого простору за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{W_{p(\cdot)}^1(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$. Замикання цього простору за введеною топологією позначимо через $W_{p(\cdot),\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до v у цьому просторі, якщо $\|v_k - v\|_{W_{p(\cdot)}^1(\Omega_\tau)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для кожного $\tau > 0$.

2. Формулювання задачі та основних результатів.

Розглянемо варіаційну нерівність

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(x, u, \nabla u)\partial_i(w(v-u))\,d\,x \geq$$

$$\geq \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n f_i(x)\partial_i(w(v-u))\,d\,x, \qquad (3)$$

де a_i, f_i — задані функції, u — шукана функція, $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$, v, w — "пробні" функції, які належать до певних просторів.

Зробимо відповідні припущення. Нехай

1) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $a_i(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x \in \Omega$ функція $a_i(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неперервна і для будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot, s, \xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна;

2) для кожного $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, м. в. $x\in\Omega$ і будь-яких $s\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$|a_i(x,s,\xi)|\le$$
$$\le h_{1i}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)}+|s|^{p_0(x)/p_i^*(x)}\Big)+h_{2i},$$

де $p=(p_0,p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{P}$, $h_{1i}\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_{2i}\in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

3) $f_i\in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i=\overline{0,n}$.

Нехай K — опуклий замкнений конус у просторі $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ з вершиною в нулі, тобто замкнена підмножина простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ така, що: 1) $v+w\in K$ $\forall v,w\in K$; 2) $\lambda v\in K$ $\forall\lambda\ge 0$, $v\in K$.

Зауваження 1. Нехай $G\subseteq\Omega$ — підобласть або кусково-гладка $(n-1)$-вимірна поверхня, а K — підмножина множини $W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{G})$, яка складається з невід'ємних на G функцій. Очевидно, що K — опуклий замкнений конус з вершиною в нулі.

Означення. *Узагальненим розв'язком варіаційної нерівності (3) називають функцію $u\in K$, яка задовольняє нерівність (3) для всіх $v\in K$ і $w\in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^k)$.*

Вважаючи, що

4) $p_0(x)=2$, $p_1(x)=2,\ldots,p_k(x)=2$ для

м. в. $x\in\Omega$

будемо шукати додаткові умови на вихідні дані, при яких узагальнений розв'язок варіаційної нерівності (3) існує та єдиний у класі функцій з певною поведінкою на нескінченності.

Нехай виконуються ще такі умови:

5) для майже всіх $x\in\Omega$ та будь-яких $s,r\in\mathbb{R}$ і $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$

$$a_0(x,s,\xi)=\sum_{i=1}^{k}b_i(x)\xi_i+c(x,s,\xi),\qquad(4)$$

де $b_i,\partial_i b_i\in C(\overline{\Omega})$, $b_i|_{\partial\Omega}=0$ $(i=\overline{1,k})$ і

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,s,\xi)-a_i(x,r,\eta))(\xi_i-\eta_i)+$$
$$+(c(x,s,\xi)-c(x,r,\eta))(s-r)\ge$$
$$\ge q_1(x)\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|^2+q_2(x)|s-r|^2,\qquad(5)$$

де $q_1,q_2\in C(\overline{\Omega})$, $\min\limits_{x\in\overline{\Omega_\tau}}q_1(x)>0$ $\forall\tau>0$,

$$q_2(x)-2^{-1}\sum_{i=1}^{k}\partial_i b_i(x)>0\quad\forall\,x\in\Omega;\qquad(6)$$

6) для кожного $i\in\{1,\ldots,k\}$, м. в. $x\in\Omega$ та будь-яких $s,r\in\mathbb{R}$ і $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ правильна нерівність

$$|a_i(x,s,\xi)-a_i(x,r,\eta)|\le$$
$$\le g_{1i}(x)\sum_{j=1}^{k}|\xi_j-\eta_j|+g_{2i}(x)|s-r|,\qquad(7)$$

де g_{1i}, g_{2i} — деякі неперервні та невід'ємні на $\overline{\Omega}$ функції, причому

$$\Big(\sum_{i=1}^{k}g_{2i}^2(x)\Big)^{\frac12}\ge\frac12\sum_{i=1}^{k}b_i(x)\frac{x_i}{|x|}\ \ \forall x\in S_\tau,\ \forall\tau>0;\qquad(8)$$

7) існує неперервна додатна функція $A(\tau)$, $\tau\ge 0$, така, що

$$d_1(\tau)\lambda^{-1/2}(\tau)+d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau)\le A(\tau)\quad\forall\tau>0,$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\,z}{A(z)}=+\infty,\qquad(9)$$

де $d_1(\tau)=\sup\limits_{s\in S_\tau}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}g_{1i}^2(s)/(q_1(s)h(s))\Big)^{1/2}$;

$$d_2(\tau)=\sup_{s\in S_\tau}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k}g_{2i}^2(s)\Big)^{1/2}-\tfrac12\sum_{i=1}^{k}b_i(s)\frac{s_i}{|s|}\Big);$$

$$\lambda(\tau)=\inf_v\Big\{\Big[\int\limits_{S_\tau}E(v)\,h\,d\,s\Big]\Big[\int\limits_{S_\tau}v^2\,d\,s\Big]^{-1}\Big\},$$

де інфімум береться по всіх неперервно диференційовних в околі S_τ функціях;

$$E(v)\stackrel{\mathrm{def}}{=}q_1\sum_{i=1}^{k}(\partial_i v)^2+(q_2-2^{-1}\sum_{i=1}^{k}\partial_i b_i)v^2.$$

Зауваження 2. З умови **6**, зокрема, випливає, що при її виконанні функції

$a_i(x,s,\xi)$, $(x,s,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $(i=\overline{1,k})$ явно не залежать від змінних $\xi_{k+1},\dots,\xi_n$.

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\tau}{d\alpha}=A(\tau),\qquad \tau(0)=0. \tag{10}$$

Очевидно, що розв'язок $\tau(\alpha)$, $\alpha\ge 0$, задачі (10) визначається рівністю $\int\limits_0^{\tau(\alpha)}\frac{dz}{A(z)}=\alpha$. Звідси та умови (9), зокрема, випливає, що $\tau(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$.

Покладемо $\langle v\rangle_\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\left(\int\limits_{\Omega^\alpha}E(v)\,dx\right)^{1/2}$, де $\Omega^\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\Omega_{\tau(\alpha)}$, $\alpha\ge 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{1}-\mathbf{7}$. *Тоді в класі функцій, які задовольняють умову*

$$\int\limits_{\Omega^R}E(v)\,dx=o(1)e^R\quad \text{при}\quad R\to+\infty, \tag{11}$$

варіаційна нерівність (3) може мати не більше одного узагальненого розв'язку.

Для кожного натурального l покладемо

$$\Lambda_l\stackrel{\text{def}}{=}\inf_v\left\{\left[\int\limits_{\Omega^l}E(v)\,dx\right]\left[\int\limits_{\Omega^l}v^2\,dx\right]^{-1}\right\},$$

де інфімум береться по всіх функціях v з простору $C^1(\overline{\Omega^l})$; $q_{1l}\stackrel{\text{def}}{=}\min\limits_{\overline{\Omega^l}}q_1(x)>0$.

Нехай $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ — лінійний підпростір лінійного простору $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є обмеженими множинами (зокрема, межі носіїв можуть мати непорожній перетин з межею $\partial\Omega$). На просторі $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ збіжність послідовностей визначається так: послідовність $\{f_l\}_{l=1}^\infty$ є збіжною до f в $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$, якщо існує значення $\tau>0$ таке, що носії членів послідовності лежать в $\overline{\Omega_\tau}$ і $\|f-f_l\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega_\tau)}\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}0$. Спряжений до $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ простір позначатимемо через $(W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega))'$, а дію елемента $f\in(W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega))'$ на елемент $v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ — $\langle f,v\rangle_*$.

Додатково припускатимемо, що

8) для множини K існує оператор $\beta: W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\longrightarrow(W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega))'$ такий, що

$$K=\{v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\beta(v)=0\};$$

$$\langle\beta(u_1)-\beta(u_2),w(u_1-u_2)\rangle_*\ge 0 \tag{12}$$

$\forall u_1,u_2\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w\in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^k)$.

Зауваження 3. Якщо $K=W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то варіаційна нерівність (3) переходить у інтегральне рівняння

$$\int\limits_\Omega\sum_{i=0}^n a_i(x,u,\nabla u)\partial_i\psi\,dx\ge\int\limits_\Omega\sum_{i=0}^n f_i(x)\partial_i\psi\,dx, \tag{13}$$

де ψ — "пробна" функція з $W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$.

Зауваження 4. Для множини K із зауваження 1 визначимо оператор β, який задовольняє вказані вище умови, за правилом

$$\langle\beta u,v\rangle_*=\int\limits_G\sum_{j=1}^N u_j^{(-)}v_j\,d\mu$$

для довільних $u\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$, де $d\mu$ — елемент "об'єму", якщо G — підобласть, і $d\mu$ — елемент "площі", якщо G — поверхня; $u^{(-)}(x)=u(x)$ при $u(x)<0$ і $u^{(-)}(x)=0$ при $u(x)\ge 0$ для майже всіх $x\in G$.

Теорема 2. *Нехай, крім умов* $\mathbf{1}-\mathbf{7}$, *виконується умова* $\mathbf{8}$ *і ще дві умови:*

9) *для м.в.* $x\in\Omega$ *і* $\forall\ s\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,s,\xi)\xi_i+c(x,s,\xi)s\ge$$

$$\ge q_1(x)\sum_{i=1}^k|\xi_i|^2+q_2(x)|s|^2+q_3(x)\sum_{i=k+1}^n|\xi_i|^{p_i(x)},$$

де $q_3\in L_\infty(\Omega)$, $q_{3l}\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega^l}q_3(x)>0$ $\forall l\in\mathbb{N}$;

10) *для будь-якого* $l\in\mathbb{N}$

$$\Lambda_l^{-1}\int_{\Omega^l}|f_0(x)|^2\,dx+q_{1l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=1}^k|f_i(x)|^2\,dx+$$

$$+q_{3l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}\,d\,x\le C_1e^{(1-\varepsilon)l},$$

де $C_1>0$, $\varepsilon>0$ *— сталі, які від* l *не залежать.*

Тоді існує узагальнений розв'язок варіаційної нерівності (3), який належить класу єдиності, визначеному в теоремі 1. Більше того, цей розв'язок задовольняє оцінку

$$\langle u\rangle_l\le C_2e^{(1-\varepsilon)l/2},\qquad l\in\mathbb{N},\qquad(14)$$

де $C_2>0$ *— стала, яка залежить тільки від* C_1 *і* ε.

3. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* u_1,u_2 *— функції з* K, *які задовольняють варіаційну нерівність (3)* $\forall\ v\in K$ *і* $w\in C_c^{1,+}(\mathbb{R}^k)$ *за умови, що* $\operatorname{supp}w\cap\Omega$ *лежить в* Ω^{R_*}, *де* $R_*>0$ *— деяке число. Тоді для будь-яких* R_1,R_2, $0<R_1<R_2\le R_*$, *правильна нерівність*

$$\langle u_1-u_2\rangle_{R_1}\le e^{(R_1-R_2)/2}\langle u_1-u_2\rangle_{R_2}.\qquad(15)$$

Доведення. Нехай $\{u_{1m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{u_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ — послідовності функцій з простору $C^1(\overline{\Omega})$, які збігаються відповідно до u_1 і u_2 за нормою $W^1_{p(\cdot)}(\Omega^{R_*})$, причому для кожного $m\in\mathbb{N}$ звуження $u_{1m}|_{\Omega^{R_*}}$ та $u_{2m}|_{\Omega^{R_*}}$ належить простору $C^2(\overline{\Omega^{R_*}})$. Покладемо $\widetilde{u}\stackrel{\rm def}{=}u_1-u_2$, $\widetilde{u}_m=u_{1m}-u_{2m}$, $m\in\mathbb{N}$. Очевидно, що $\|\widetilde{u}-\widetilde{u}_m\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega^{R_*})}\to0$ при $m\to+\infty$.

Додамо до варіаційної нерівності (3), записаної для u_1, ту ж нерівність, але записану для u_2. Вибравши яке-небудь $\tau\in(0,\tau(R_*))$, покладемо в отриманій після віднімання нерівності $v=(u_1+u_2)/2$, $w=\psi_\delta$, де $\delta\in(0,\tau)$ — довільне число, ψ_δ — функція з простору $C^1(\mathbb{R}^k)$, для якої виконуються умови: $\psi_\delta(x')=1$ при $|x'|<\tau+1-\delta$ (тут і далі прийнято позначення $x'=(x_1,\dots,x_k)$), $\psi_\delta(x')=0$ при $|x'|>\tau+1$ і $0\le\psi_\delta(x')\le1$, $|\nabla\psi_\delta(x')|\le C_3/\delta$ для всіх $x'\in\mathbb{R}^k$, де $C_3>0$ — стала, яка не залежить від τ і δ. Тоді матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1)-a_i(u_2))\,\partial_i(\widetilde{u}\psi_\delta)\,d\,x\le0.\qquad(16)$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$c(v)\stackrel{\rm def}{=}c(x,v,\nabla v),\,a_i(v)\stackrel{\rm def}{=}a_i(x,v,\nabla v),\,i=\overline{0,n}.\qquad(17)$$

Перепишемо нерівність (16), враховуючи (4), так

$$I_m\equiv\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_{1m})-a_i(u_{2m}))\,\partial_i\widetilde{u}_m+$$

$$+(c(u_{1m})-c(u_{2m}))\,\widetilde{u}_m+\sum_{i=1}^{k}b_i\,\partial_i\widetilde{u}_m\,\widetilde{u}_m\Big]\,d\,x\le$$

$$\le\sigma_{m\delta}(\tau)+G_\delta(\tau),\qquad(18)$$

де

$$\sigma_{m\delta}(\tau)=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=0}^{n}\Big\{(a_i(u_{1m})-a_i(u_{2m}))\,\partial_i\widetilde{u}_m-$$

$$-(a_i(u_1)-a_i(u_2))\,\partial_i\widetilde{u}\,\psi_\delta\Big\}\,d\,x,$$

$$G_\delta(\tau)=-\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{k}(a_i(u_1)-a_i(u_2))\,\widetilde{u}\,\partial_i\psi_\delta\,d\,x.$$

Перетворимо G_δ так. Довизначимо $a_i(u_{jm})$ нулем поза Ω^{R_*} і покладемо

$$a_{i\rho}(u_{jm}(x))\stackrel{\rm def}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^n}a_i(u_{jm}(y))\,\omega_\rho(x-y)\,d\,y,$$

$i=\overline{1,k}$, $j=1,2$, де ω_ρ — ядра усереднення, $\rho>0$. Тоді

$$G_\delta(\tau)=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{k}\Big[(a_i(u_1)-a_i(u_2))\,(\widetilde{u}_m-\widetilde{u})+$$

$$+(a_{i\rho}(u_{1m})-a_i(u_1))-(a_{i\rho}(u_{2m})-a_i(u_2))\widetilde{u}_m\Big]\partial_i\psi_\delta\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau\setminus\Omega_{\tau-\delta}}\sum_{i=1}^{k}\partial_i((a_{i\rho}(u_{1m})-a_{i\rho}(u_{2m}))\widetilde{u}_m)\psi_\delta dx+$$

$$+\int\limits_{S_{\tau-\delta}}\sum_{i=1}^{k}(a_{i\rho}(u_{1m})-a_{i\rho}(u_{2m}))\widetilde{u}_m\nu_i ds-$$

$$-\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}(a_{i\rho}(u_{1m})-a_{i\rho}(u_{2m}))\widetilde{u}_m\,\nu_i\,d\,s+$$

$$+\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}(a_{i\rho}(u_{1m})-a_{i\rho}(u_{2m}))\widetilde{u}_m\,\nu_i\,d\,s, \quad (19)$$

де $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої по відношенню до області Ω_τ ($\Omega_{\tau-\delta}$) нормалі до S_τ ($S_{\tau-\delta}$), тобто $\nu_i(x)=x_i/|x|$ $(i=\overline{1,n})$, $x\in S_\tau$ ($S_{\tau-\delta}$).

Застосувавши умову **6**, здобудемо

$$|a_{i\rho}(u_{1m})-a_{i\rho}(u_{2m})|=$$

$$=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(a_i(u_{1m}(y))-a_i(u_{2m}(y)))\,\omega_\rho(x-y)\,d\,y\Big|\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}|a_i(u_{1m}(y))-a_i(u_{2m}(y))|\;\omega_\rho(x-y)\,d\,y\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(g_{1i}|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}|\widetilde{u}_m|\big)\,\omega_\rho(x-y)\,d\,y=$$

$$=\big(g_{1i}(x)|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}(x)|\widetilde{u}_m|\big)_\rho,$$

де $\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m=(\partial_1\widetilde{u}_m,\ldots,\partial_k\widetilde{u}_m)$.

На підставі нерівності Коші-Буняковського отримаємо

$$\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}(a_{i\rho}(u_{1m})-a_{i\rho}(u_{2m}))\widetilde{u}_m\,\nu_i\,d\,s\le$$

$$\le\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}\Big|(g_{1i}|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}|\widetilde{u}_m|)_\rho-$$

$$-(g_{1i}|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}|\widetilde{u}_m|)\Big|\;|\widetilde{u}_m|\,|\nu_i|\,d\,s+$$

$$+\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}(g_{1i}|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}|\widetilde{u}_m|)\,|\widetilde{u}_m|\,|\nu_i|\,d\,s\le$$

$$\le\Big(\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}g_{1i}^2\,|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|^2\,d\,s\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{S_\tau}|\widetilde{u}_m|^2\,d\,s\Big)^{1/2}+$$

$$+\int\limits_{S_\tau}\Big(\sum_{i=1}^{k}g_{2i}^2\Big)^{1/2}|\widetilde{u}_m|^2\,d\,s+L_{m\rho}(\tau), \quad (20)$$

де $L_{m\rho}(\tau)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{S_\tau}\sum\limits_{i=1}^{k}\big|(g_{1i}|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}|\widetilde{u}_m|)_\rho-(g_{1i}|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}_m|+g_{2i}|\widetilde{u}_m|)\big|\,|\widetilde{u}_m|\,d\,s$.

Тепер перетворимо $\sigma_{m\delta}$ так:

$$\sigma_{m\delta}(\tau)=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=0}^{n}\big\{(a_i(u_{1m})-a_i(u_{2m}))\partial_i\widetilde{u}_m-$$

$$-(a_i(u_1)-a_i(u_2))\,\partial_i\widetilde{u}+(a_i(u_1)-a_i(u_2))\times$$

$$\times\partial_i\widetilde{u}(1-\psi_\delta)\big\}d\,x=\sigma_m^*(\tau)+\sigma_\delta^*(\tau),$$

де

$$\sigma_m^*(\tau)=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=0}^{n}\big\{(a_i(u_{1m})-a_i(u_{2m}))\partial_i\widetilde{u}_m-$$

$$-(a_i(u_1)-a_i(u_2))\,\partial_i\widetilde{u}\big\}d\,x,$$

$$\sigma_\delta^*(\tau)=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_1)-a_i(u_2))\partial_i\widetilde{u}(1-\psi_\delta)d\,x.$$

Перетворимо і оцінимо знизу ліву частину нерівності (18), використовуючи нерівність (5) та формулу інтегрування частинами, так:

$$I_m\ge\int\limits_{\Omega_\tau}E(\widetilde{u}_m)\,d\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k}b_i\,\widetilde{u}_m^2\,\nu_i\,d\,s. \quad (21)$$

Отож, з (18) на підставі (19)—(21), використовуючи введені в умові **7** позначення, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}E(\widetilde{u}_m)d\,x\le$$

$$\le\Big[d_1(\tau)\lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau)+d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau)\Big]\int\limits_{S_\tau}E(\widetilde{u}_m)hds+$$

$$+\sigma_m^*(\tau)+\sigma_\delta^*(\tau)+G_{m\rho\delta}^*(\tau)+L_{m\rho}(\tau),\tau>0, \quad (22)$$

де $G_{m\rho\delta}^*$ — сума всіх членів правої частини (19), за виключенням останнього.

Позначимо $F_m(\tau)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\Omega_\tau}E(\widetilde{u}_m)\,d\,x$. З (22), враховуючи умову **7** і (10), матимемо

$$F_m(\tau)\le\frac{dF_m(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{d\alpha}+\sigma_m^*(\tau)+\sigma_\delta^*(\tau)+$$

$$+G^*_{m\rho\delta}(\tau)+L_{m\rho}(\tau), \quad \tau\in(0,\tau(R_*)),$$

звідки

$$0\le -F_m+\frac{dF_m}{d\alpha}+\sigma^*_m+\sigma^*_\delta+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}. \quad (23)$$

Домноживши (23) на $e^{-\alpha}$ і проінтегрувавши отриману нерівність по α від R_1 до R_2 $(0<R_1<R_2\le R_*)$, отримаємо

$$F_m(\tau(R_1))\le e^{R_1-R_2}F_m(\tau(R_2))+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}[\sigma^*_m+\sigma^*_\delta+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}]e^{R_1-\alpha}\,d\,\alpha. \quad (24)$$

Аналогічно як у [11,12] можна показати, що інтеграл $\int\limits_{R_1}^{R_2}[\sigma^*_m+\sigma^*_\delta+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}]e^{R_1-\alpha}\,d\,\alpha$ — як завгодно малий, якщо $m\in\mathbb{N}$ — достатньо велике, $\rho=\rho(m)>0$ — достатньо мале і $\delta=\delta(m,\rho)$ — достатньо мале. Враховуючи сказане, перейдемо в (24) до границі при $m\to\infty$ і здобудемо оцінку (15). $\square$

Нехай виконуються умови **1**—**10**, а l — деяке натуральне число. Покладемо $\mathbb{U}_{p,l}\overset{\rm def}{=}\{v|_{\Omega^l}: v\in W^1_{p(\cdot),\rm c}(\Omega),\ \operatorname{supp}v\subset\Omega^l\}$ — лінійний простір, наділений нормою простору $W^1_{p(\cdot)}(\Omega^l)$. Очевидно, що $\mathbb{U}_{p,l}\subset W^1_{p(\cdot)}(\Omega^l)$ і $\mathbb{U}_{p,l}$ є банаховим простором. Канонічну білінійну форму на $(\mathbb{U}_{p,l})'\times\mathbb{U}_{p,l}$ позначимо через $[\cdot,\cdot]_l$. Під K_l розумітимемо множину $\{v|_{\Omega^l}: v\in K,\ \operatorname{supp}v\subset\Omega^l\}$, яка на підставі нашого припущення є замкненим конусом в $\mathbb{U}_{p,l}$.

Визначимо оператор

$$L_l:\mathbb{U}_{p,l}\to(\mathbb{U}_{p,l})'$$

за правилом

$$[L_lv,\widetilde{v}]_l\overset{\rm def}{=}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=0}^n a_i(v)\,\partial_i\widetilde{v}\,d\,x \qquad \forall v,\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,l}.$$

Легко переконатися, що оператор $L_l:\mathbb{U}_{p,l}\to(\mathbb{U}_{p,l})'$ — строго монотонний, обмежений, коерцитивний і семінеперервний.

Визначимо також функціонал $F_l\in(\mathbb{U}_{p,l})'$ за правилом

$$[F_l,\widetilde{v}]_l\overset{\rm def}{=}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=0}^n f_i(x)\,\partial_i\widetilde{v}(x)\,d\,x \qquad \forall\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,l}.$$

Лема 2. *Існує єдина функція $u_l\in K_l$ така, що*

$$[L_lu_l,w(v-u_l)]_l\ge[F_l,w(v-u_l)]_l \qquad (25)$$

для будь-яких $v\in K_l$, $w\in C^{1,+}(\mathbb{R}^k)$.

Доведення. У цьому доведенні, для спрощення записів, всюди опустимо індекс l, крім позначень $\mathbb{U}_{p,l}$, K_l і Ω^l. Для довільного $\varepsilon\in(0,1)$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_\varepsilon\in\mathbb{U}_{p,l}$, яка задовольняє рівняння

$$Lu_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\beta_lu_\varepsilon=F, \qquad (26)$$

де тут β_l — звуження оператора штрафу β, що визначає K, на простір $\mathbb{U}_{p,l}$ ($\beta_lv=0$, $v\in\mathbb{U}_{p,l}\ \Leftrightarrow\ v\in K_l$).

Використовуючи властивості оператора L, легко переконатися, що оператор $L+\frac{1}{\varepsilon}\beta_l$ — монотонний, обмежений, семінеперервний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір $\mathbb{U}_{p,l}$ — рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [13, Гл.2, Σ 2] отримаємо існування розв'язку рівняння (26). Його єдиність випливає із сильної монотонності оператора L.

Міркуючи так, як при доведенні теореми 5.2 [13, с. 385], здобудемо, що множина $\{u_\varepsilon:\varepsilon\in(0,1)\}$ — обмежена в $\mathbb{U}_{p,l}$, множина $\{Lu_\varepsilon:\varepsilon\in(0,1)\}$ — обмежена в $(\mathbb{U}_{p,l})^*$, $\|\beta_lu_\varepsilon\|_{(\mathbb{U}_{p,l})^*}\le C_4\varepsilon$, де C_4 — додатна стала, яка не залежить від ε.

Звідси випливає існування функцій $u\in\mathbb{U}_{p,l}$, $\chi\in(\mathbb{U}_{p,l})^*$ та послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ таких, що $\varepsilon_j\to0$ при $j\to\infty$ і

$$u_{\varepsilon_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}u \ \text{ слабко в } \mathbb{U}_{p,l}, \qquad (27)$$

$$Lu_{\varepsilon_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\chi \ \text{ слабко в } (\mathbb{U}_{p,l})^*, \qquad (28)$$

$$\beta_lu_{\varepsilon_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}0 \ \text{ сильно в } (\mathbb{U}_{p,l})^*, \quad \beta_lu=0. \qquad (29)$$

Далі (для зручності) писатимемо u_j замість u_{ε_j} $(j \in \mathbb{N})$. З рівняння (26) для довільних $v \in K_l$, $w \in C^{1,+}(\mathbb{R}^k)$ маємо

$$[Lu_j - F, w(v - u_j)] =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_j} \langle \beta_l v - \beta_l u_j, w(v - u_j) \rangle_* \geq 0, \tag{30}$$

звідки випливає нерівність

$$[Lu_j, w(v - u_j)] \geq [F, w(v - u_j)] \tag{31}$$

$\forall v \in K_l$, $w \in C^{1,+}(\mathbb{R}^k)$, $j \in \mathbb{N}$.

Поклавши в (31) $v = u$, $w = 1$, одержимо

$$[Lu_j, u - u_j] \geq [F, u - u_j].$$

Звідси на підставі (27) маємо

$$\varliminf_{j\to\infty} [Lu_j, u - u_j] \geq 0. \tag{32}$$

З монотонності оператора L випливає $[Lu - Lu_j, u - u_j] \geq 0$, тобто

$$[Lu_j, u - u_j] \leq [Lu, u - u_j],$$

звідки

$$\varlimsup_{j\to\infty} [Lu_j, u - u_j] \leq 0. \tag{33}$$

З (32) і (33) отримаємо

$$\lim_{j\to\infty} [Lu_j, u - u_j] = 0. \tag{34}$$

Узявши до уваги нерівність (5), отримаємо

$$[Lu_j - Lu, u_j - u] \geq \int\limits_{\Omega^l} \Big[q_1 \sum_{i=1}^{k} |\partial_i u_j - \partial_i u|^2 +$$
$$+ (q_2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}) |u_j - u|^2 \Big] \, dx \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

На підставі (27) та (34) з (35) отримаємо

$$u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ сильно в } L_2(\Omega^l), \tag{36}$$

$$\partial_i u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u \ \text{ сильно в } L_2(\Omega^l), \ i = \overline{1,k}. \tag{37}$$

Згідно з умовою **6** та (36), (37)

$$a_i(u_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \ \text{ сильно в } L_2(\Omega^l), i = \overline{1,k}. \tag{38}$$

Покажемо, що

$$\chi = Lu. \tag{39}$$

Для цього використаємо ідею, викладену на с. 191 монографії [13]. Нехай $\widetilde{v}$ — довільний елемент із простору $\mathbb{U}_{p,l}$. Покладемо $w_\theta \overset{\text{def}}{=} u + \theta(\widetilde{v} - u)$, $\theta \in (0, 1)$. На підставі монотонності оператора L здобудемо

$$[Lu_j - Lw_\theta, u_j - w_\theta] \geq 0, \qquad \text{тобто}$$
$$\theta[Lu_j, u - \widetilde{v}] \geq$$
$$\geq [Lu_j, u - u_j] + [Lw_\theta, u_j - u] + \theta[Lw_\theta, u - \widetilde{v}].$$

Спрямуємо в цій нерівності j до ∞, врахувавши (27), (34). У результаті отримаємо

$$[\chi, u - \widetilde{v}] \geq [Lw_\theta, u - \widetilde{v}].$$

Спрямувавши тут θ до 0 і врахувавши, що оператор L — семінеперервний, одержимо

$$[\chi - Lu, u - \widetilde{v}] \geq 0 \tag{40}$$

для довільних $\widetilde{v} \in \mathbb{U}_{p,l}$.

Узявши в (40) $\widetilde{v} = u - \lambda\psi$, де $\lambda > 0$, $\psi \in \mathbb{U}_{p,l}$, здобудемо $[\chi - Lu, \psi] \geq 0 \ \ \forall \psi \in \mathbb{U}_{p,l}$, звідки легко випливає (39).

Використовуючи означення оператора L та нерівність (5), отримаємо

$$[Lu_j, w(u - u_j)] = \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} a_i(u_j)\, \partial_i(w(u - u_j))\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_j) - a_i(u))\, \partial_i(u - u_j) w \, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} a_i(u)\, \partial_i(u - u_j) w \, dx + \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} a_i(u_j) \times$$
$$\times (u - u_j)\, \partial_i w \, dx \leq \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} a_i(u) \partial_i(u - u_j) w \, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} a_i(u_j)\, (u - u_j)\, \partial_i w \, dx. \tag{41}$$

Перейшовши в (41) до границі при $j \to \infty$, урахувавши (36)—(38), отримаємо

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}[Lu_j, w(u-u_j)] \le 0. \qquad (42)$$

На підставі нерівності (31) здобудемо

$$[F, w(v-u_j)] \le [Lu_j, w(v-u_j)] =$$
$$= [Lu_j, w(v-u)] + [Lu_j, w(u-u_j)] \qquad (43)$$

для довільних $v \in K_l,\ w \in C^{1,+}(\mathbb{R}^k)$.

Спрямуємо в (43) j до ∞, враховуючи (28), (39), (42). У результаті отримаємо (25) для довільних $v \in K_l,\ w \in C^{1,+}(\mathbb{R}^k)$. □

4. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай u_1, u_2 — два узагальнених розв'язки варіаційної нерівності (3), які задовольняють умову (11). Тоді $\langle u_1 - u_2\rangle_R = \gamma(R)e^{R/2}$ при $R > 0$, де $\gamma(R) \to 0$ при $R \to +\infty$. Звідси та з оцінки (15) маємо для довільних R_1 і R_2, $R_1 < R_2$, нерівність

$$\langle u_1 - u_2\rangle_{R_1} \le \gamma(R_2)e^{R_1/2}. \qquad (44)$$

Зафіксувавши R_1 і спрямувавши R_2 до $+\infty$, з (44) отримаємо рівність $\langle u_1-u_2\rangle_{R_1} = 0$, тобто $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω^{R_1}. На підставі довільності R_1 отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω. □

Доведення теореми 2. Для кожного натурального числа l згідно з лемою 2, беручи до уваги означення L_l і F_l, маємо існування функції $u_l \in K_l$ такої, що

$$\int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\,\partial_i(w(v-u_l))\,d\,x \ge$$
$$\ge \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,\partial_i(w(v-u_l))\,d\,x \qquad (45)$$

для будь-яких $v \in K_l,\ w \in C^{1,+}(\mathbb{R}^k)$.

Довизначимо функцію u_l нулем на $\Omega\backslash\overline{\Omega^l}$ для кожного $l \in \mathbb{N}$, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Очевидно, що $u_l \in K$.

Покажемо, що отримана послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збіжна в певному сенсі до узагальненого розв'язку варіаційної нерівності (3).

Спочатку оцінимо $\langle u_l\rangle_l$. Для цього покладемо в варіаційній нерівності (45) $w = 1$, $v = 0$. Тоді отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\,\partial_i u_l\,d\,x \le \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=0}^{n} f_i\,\partial_i u_l\,d\,x. \qquad (46)$$

Використовуючи умови на вихідні дані, формулу інтегрування частинами і нерівність Коші-Буняковського, з (46) матимемо

$$\int\limits_{\Omega^l}\Big\{q_1\sum_{i=1}^{k}|\partial_i u_l|^2 + (q_2 - 2^{-1}\sum_{i=1}^{k}\partial_i b_i)|u_l|^2 +$$
$$+q_3\sum_{i=k+1}^{n}|\partial_i u_l(x)|^{p_i(x)}\Big\}\,d\,x \le$$
$$\le \frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{\Omega^l}|u_l|^2\,d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{\Omega^l}|f_0|^2\,d\,x +$$
$$+\frac{\varepsilon_2}{2}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=1}^{k}|\partial_i u_l|^2\,d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=1}^{k}|f_i|^2\,d\,x +$$
$$+\frac{\varepsilon_3}{2}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=k+1}^{n}|\partial_i u_l|^{p_i(x)}dx + \frac{1}{2\varepsilon_3}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i|^{p_i^*(x)}dx, \qquad (47)$$

де ε_1, ε_2, ε_3 — довільні додатні сталі.

Поклавши в нерівності (47) $\varepsilon_1 = 2^{-1}\Lambda_l$, $\varepsilon_2 = 2^{-1}q_{1l}$, $\varepsilon_3 = 2^{-1}q_{3l}$, здобудемо

$$\int\limits_{\Omega^l}\Big\{E(u_l) + q_3\sum_{i=k+1}^{n}|\partial_i u_l(x)|^{p_i(x)}\Big\}\,d\,x \le$$
$$\le 2\Lambda_l^{-1}\int\limits_{\Omega^l}|f_0|^2\,d\,x + 2q_{1l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=1}^{k}|f_i|^2\,d\,x +$$
$$+2q_{3l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}\,d\,x.$$

Звідси та умови **10** випливає оцінка

$$\langle u_l\rangle_l \le C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}. \qquad (48)$$

Нехай $m \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}$ є фундаментальною за нормою $\langle \cdot \rangle_m$. Візьмемо будь-які натуральні числа l, r, причому $l \geq m$. Маємо

$$\langle u_{l+r} - u_l \rangle_m \leq \sum_{i=0}^{r-1} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m. \quad (49)$$

Оскільки u_{l+i+1}, u_{l+i} справджують умови леми 1 при $R_* = l+i$, то з цього твердження випливає оцінка

$$\langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m \leq e^{-1/2} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{m+1} \leq \ldots$$
$$\leq e^{-(l+i-m)/2} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i}. \quad (50)$$

З (48) отримаємо

$$\langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i} \leq \langle u_{l+i+1} \rangle_{l+i+1} + \langle u_{l+i} \rangle_{l+i} \leq$$
$$\leq C_5 e^{(1-\varepsilon)(l+i)/2}, \quad (51)$$

де $C_5 > 0$ — стала, яка від l та i не залежить. На основі (49)—(51) здобудемо

$$\langle u_{l+r} - u_l \rangle_m \leq \sum_{i=0}^{r-1} C_5 e^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\varepsilon(l+i)}{2}} \leq C_6 e^{(m-\varepsilon l)/2}, \quad (52)$$

де $C_6 > 0$ — стала, яка від l і r не залежить.

З (52) випливає, що $\langle u_{l+r} - u_l \rangle_m \to 0$ при $l \to \infty$ для будь-яких $r \in \mathbb{N}$, тобто послідовності $\{u_l\}$, $\{\partial_i u_l\}$, $i = \overline{1,k}$, — фундаментальні у просторі $L_2(\Omega^m)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тому існує функція $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ така, що $\partial_i u \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i = \overline{1,k})$ і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad (53)$$

$$\partial_i u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u \quad \text{сильно в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \ i = \overline{1,k}. \quad (54)$$

На підставі умови **6** з (53), (54) маємо

$$a_i(u_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \ \text{ сильно в } \ L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \ i = \overline{1,k}. \quad (55)$$

Оцінимо похідні $\partial_{k+1} u_l, \ldots, \partial_n u_l$. Для цього зауважимо, що варіаційна нерівність (45) виконується для будь-яких $v \in K$, $w \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\mathbb{R}^k)$, $\operatorname{supp} w \cap \Omega \subset \overline{\Omega^l}$. Нехай $R > 0$ — довільне число, $\zeta(x') = \psi_1(x')$, $x' \in \mathbb{R}^k$, де функція ψ_1 така ж, як у доведенні леми 1 при $\tau = R+1$ $(\delta = 1)$. Візьмемо в (45) $w = \zeta$, $v = 0$. Нехай число l_0 таке, що для довільного $l \geq l_0$ маємо $\Omega^l \supset \Omega_{R+1}$. Тоді для $l > l_0$ після простих перетворень отримаємо

$$\int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=0}^{n} a_i(u_l) \partial_i u_l \, \zeta \, dx \leq \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=0}^{n} f_i \partial_i u_l \, \zeta \, dx +$$
$$+ \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} f_i \, u_l \, \partial_i \zeta \, dx - \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} a_i(u_l) \, u_l \, \partial_i \zeta \, dx. \quad (56)$$

Оцінимо доданки нерівності (56), використовуючи умову **9**, нерівності Коші-Буняковського та Юнга. У результаті, врахувавши, що $|\nabla \zeta| \leq C_3$ на $\mathbb{R}^k$, матимемо

$$\int_{\Omega_{R+1}} \Big[q_1 \sum_{i=1}^{k} |\partial_i u_l|^2 + (q_2 - 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} \partial_i b_i) |u_l|^2 +$$
$$+ q_3 \sum_{i=k+1}^{n} |\partial_i u_l(x)|^{p_i(x)} \Big] \zeta \, dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=0}^{k} |\partial_i u_l|^2 \zeta \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=0}^{k} |f_i|^2 \zeta \, dx +$$
$$+ \eta \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=k+1}^{n} |\partial_i u_l(x)|^{p_i(x)} \zeta \, dx +$$
$$+ C_7(\eta) \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)} \zeta \, dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} \Big\{ |a_i(u_l)|^2 +$$
$$+ (1 + |b_i(x)|) |u_l|^2 + |f_i|^2 \Big\} |\partial_i \zeta| \, dx, \quad (57)$$

де $\eta > 0$ — довільна стала, $C_7(\eta) > 0$ — деяка стала.

На підставі (53)—(55) з (57), вибираючи значення η досить малим, одержимо

$$\int_{\Omega_R} \sum_{i=k+1}^{n} |\partial_i u_l(x)|^{p_i(x)} \, dx \leq C_8(R), \quad (58)$$

де $C_8(R) > 0$ — стала, яка від l не залежить. Згідно з умовою **2**, застосовуючи нерівність Гельдера, на підставі (53), (54) і (58) для кожного $i = 0, k+1, \ldots, n$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |a_i(u_l)|^{p_i^*(x)} d\,x \le C_9 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{ \sum_{j=0}^{k} |\partial_i u_l|^2 + \\ + \sum_{j=k+1}^{n} |\partial_i u_l|^{p_j(x)} \Big\} d\,x + C_{10}(R) \le C_{11}(R), \tag{59}$$

де $C_9, C_{10}(R), C_{11}(R) > 0$ — деякі сталі, які від l не залежать (але сталі C_{10}, C_{11} можуть залежати від R).

З (53), (54), (58), (59) та умови **1**, урахувавши рефлексивність просторів $L_{p_i(\cdot)}(\Omega_R)$ $(i = \overline{k+1, n})$ та $L_{p_i^*(\cdot)}(\Omega_R)$ $(i = 0, k+1, \ldots, n)$ при $R > 0$, отримаємо існування підпослідовності $\{u_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ та функцій $\chi_i \in L_{p_i^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i = 0, k+1, \ldots, n)$ таких, що

$$\partial_i u_{l_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u \text{ слабко в } L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), i = \overline{k+1, n}, \tag{60}$$

$$c(u_{l_j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0 \quad \text{слабко в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{61}$$

$$a_i(u_{l_j}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \text{ слабко в } L_{p_i^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{62}$$

$i = \overline{k+1, n}$.

Покажемо, що

$$\chi_0 = c(u), \tag{63}$$

$$\chi_i = a_i(u), \qquad i = \overline{k+1, n}. \tag{64}$$

Нехай $\widetilde{v} \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w \in C_c^{1,+}(\mathbb{R}^k)$. Згідно з нерівністю (5) маємо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(u_{l_j}) - a_i(\widetilde{v})\big)\big(\partial_i u_{l_j} - \partial_i \widetilde{v}\big) + \\ + \big(c(u_{l_j}) - c(\widetilde{v})\big)\big(u_{l_j} - \widetilde{v}\big) \Big\} w\,d\,x \ge 0 \tag{65}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$, звідки

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j}) \partial_i u_{l_j}\, w\,d\,x - \\ - \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(u_{l_j}) \partial_i \widetilde{v} + a_i(\widetilde{v})(\partial_i u_{l_j} - \partial_i \widetilde{v})\big) - \\ - \big(c(u_{l_j}) - c(\widetilde{v})\big)\big(u_{l_j} - \widetilde{v}\big) \Big\} w\,d\,x \ge 0 \tag{66}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$.

Нехай $\mu \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} w \cap \Omega \subset \Omega^{l_j}$ при $j \ge \mu$. Для будь-якого $v \in K$ і довільного $j \ge \mu$ правильна (див. (45)) нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} a_i(u_{l_j})\, \partial_i (w(v - u_{l_j}))\, d\,x \ge \\ \ge \int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} f_i\, \partial_i (w(v - u_{l_j}))\, d\,x. \tag{67}$$

З нерівності (67), взявши у ній $v = 0$, отримаємо

$$- \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(u_{l_j}) \partial_i u_{l_j}\, w\,d\,x \ge \\ \ge \int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(u_{l_j}) u_{l_j}\, w - \sum_{i=0}^{n} f_i\, \partial_i u_{l_j}\, w + \\ + \sum_{i=1}^{k} a_i(u_{l_j})\, u_{l_j}\, \partial_i w - \sum_{i=1}^{k} f_i\, u_{l_j}\, \partial_i w \Big\} d\,x. \tag{68}$$

З (66) та (68) здобудемо

$$- \int\limits_{\Omega} \Big\{ a_0(u_{l_j}) u_{l_j}\, w - \sum_{i=0}^{n} f_i\, \partial_i u_{l_j}\, w + \\ + \sum_{i=1}^{k} a_i(u_{l_j})\, u_{l_j}\, \partial_i w - \sum_{i=1}^{k} f_i\, u_{l_j}\, \partial_i w \Big\} d\,x - \\ - \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(u_{l_j}) \partial_i \widetilde{v} + a_i(\widetilde{v})(\partial_i u_{l_j} - \partial_i \widetilde{v})\big) - \\ - \big(c(u_{l_j}) - c(\widetilde{v})\big)\big(u_{l_j} - \widetilde{v}\big) \Big\} w\,d\,x \ge 0. \tag{69}$$

Перейдемо в (69) до границі при $j \to \infty$, урахувавши (4), (53)–(55), (60)–(62). У результаті отримаємо

$$- \int\limits_{\Omega} \Big\{ (\chi_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \partial_i u)\, u\, w - \sum_{i=0}^{n} f_i\, \partial_i u\, w +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} a_i(u)\, u\, \partial_i w - \sum_{i=1}^{k} f_i\, u\, \partial_i w\Big\}\, d\, x-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k} a_i(u)\partial_i \widetilde{v} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\widetilde{v})(\partial_i u - \partial_i \widetilde{v}) +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n} \chi_i \partial_i \widetilde{v} - (\chi_0 - c(\widetilde{v}))(u-\widetilde{v})\Big\}\, w\, d\, x \geq 0. \tag{70}$$

Покладемо при $j \geq \mu$ в нерівності (67) $v = u_{l_j} + u$ і, перейшовши до границі при $j \to \infty$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k} a_i(u)\partial_i u + \sum_{i=k+1}^{n} \chi_i\, \partial_i u\Big\}\, w\, d\, x \geq$$

$$\geq -\int\limits_{\Omega}\Big\{(\chi_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \partial_i u) u\, w - \sum_{i=0}^{n} f_i\, \partial_i u\, w +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} a_i(u)\, u\, \partial_i w - \sum_{i=1}^{k} f_i\, u\, \partial_i w\Big\}\, d\, x. \tag{71}$$

З (70) та (71) здобудемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k} (a_i(\widetilde{v}) - a_i(u))\,(\partial_i u - \partial_i \widetilde{v}) +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n} (a_i(\widetilde{v}) - \chi_i)\,(\partial_i u - \partial_i \widetilde{v}) +$$

$$+(c(\widetilde{v}) - \chi_0)\,(u-\widetilde{v})\Big\}\, w\, d\, x \leq 0 \tag{72}$$

для довільного $\widetilde{v} \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $w \in C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^k)$.

Узявши в (72) $\widetilde{v} = u - \lambda g$, $\lambda > 0$, $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k} (a_i(u-\lambda g) - a_i(u))\, \partial_i g +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u-\lambda g) - \chi_i)\, \partial_i g +$$

$$+(c(u-\lambda g) - \chi_0) g\Big\}\, w\, d\, x \leq 0 \tag{73}$$

для довільних $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Спрямуємо в нерівності (73) λ до 0. У результаті здобудемо

$$\int\limits_{\Omega}\{\sum_{i=k+1} (a_i(u) - \chi_i)\, \partial_i g + (c(u) - \chi_0) g\} w d\, x \leq 0 \tag{74}$$

для довільних $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

З (74), беручи спочатку $g(x) = 1$, а потім $g(x) = -1$, отримаємо (63). Урахувавши (63), з (74) одержимо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u) - \chi_i)\, \partial_i g\, w\, d\, x \leq 0 \tag{75}$$

для довільних $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Оскільки (75) виконується для довільної функції $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ та для кожного $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, то, поклавши спочатку $g(x) = x_l$, а потім $g(x) = -x_l$, здобудемо (64).

Для всіх $j \geq \mu$ виконується нерівність (67). Перетворимо її ліву частину так:

$$\int\limits_{\Omega^{l_j}}\sum_{i=0}^{n} a_i(u_{l_j})\, \partial_i (w(v-u_{l_j}))d\, x =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{l_j}}\sum_{i=0}^{n} (a_i(u_{l_j}) - a_i(v))\partial_i (w(v-u_{l_j}))d\, x +$$

$$+\int\limits_{\Omega^{l_j}}\sum_{i=0}^{n} a_i(v)\partial_i (w(v-u^{k_j}))d\, x \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega^{l_j}}\sum_{i=1}^{k} (a_i(u_{l_j}) - a_i(v))(v-u_{l_j})\partial_i w d\, x +$$

$$+\int\limits_{\Omega^{l_j}}\sum_{i=0}^{n} a_i(v)\partial_i (w(v-u_{l_j}))d\, x =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{l_\mu}}\sum_{i=1}^{k} (a_i(u_{l_j}) - a_i(v))(v-u_{l_j})\partial_i w\, d\, x +$$

$$+\int\limits_{\Omega^{l_\mu}}\sum_{i=0}^{n} a_i(v)\partial_i (w(v-u_{l_j}))d\, x = I_j. \tag{76}$$

Легко переконатися, що

$$I_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=1}^{k} (a_i(u)-a_i(v))(v-u)\,\partial_i w\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=0}^{n} a_i(v)\,\partial_i(w(v-u))\,d\,x. \qquad (77)$$

Стосовно правої частини нерівності (67) маємо

$$\int\limits_{\Omega^{l_j}} \sum_{i=0}^{n} f_i\,\partial_i(w(v-u_{l_j}))d\,x =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=0}^{n} f_i\,\partial_i(w(v-u_{l_j}))d\,x \underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=0}^{n} f_i\,\partial_i(w(v-u))d\,x. \qquad (78)$$

Оцінимо ліву частину нерівності (67), використавши (76), і перейдемо в отриманій нерівності до границі при $j\to\infty$, урахувавши (77) та (78). Потім покладемо $v\overset{\mathrm{def}}{=}u+\theta(\widetilde{v}-u)$, $0<\theta<1$, $\widetilde{v}\in K$. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(u)-a_i(u+\theta(\widetilde{v}-u))\big)\,(\widetilde{v}-u)\,\partial_i w\,d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=0}^{n} a_i(u+\theta(\widetilde{v}-u))\,\partial_i(w(\widetilde{v}-u))\,d\,x \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega^{l_\mu}} \sum_{i=0}^{n} f_i\,\partial_i(w(\widetilde{v}-u))\,d\,x. \qquad (79)$$

Перейшовши в (79) до границі при $\theta\to 0$, отримаємо (3) для заданої функції $\widetilde{v}$. На підставі довільності функцій $\widetilde{v}$ і w робимо висновок, що u є узагальненим розв'язком нерівності (3). Отже, ми довели існування узагальненого розв'язку нерівності (3).

Оцінка (14) одержується з (48) і (52) наступним чином:

$$\langle u\rangle_l \leq \langle u-u_l\rangle_l + \langle u_l\rangle_l =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \langle u_m-u_l\rangle_l + \langle u_l\rangle_l \leq C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}. \qquad \square$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Zhikov V. V.* Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR. — 1987. — **9**. — p.33—66.

2. *Růžička M.* Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. — Springer, Berlin, 2000.

3. *Simon L.* On strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Acta Math. Hungar. — 1988. — **52**, №1-2. — P.147-164.

4. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Acta Math. Hungar. — 1990. — **55**, №3 - 4. — P.379-392.

5. *Медвідь І.М.* Еліптична варіаційна нерівність в необмежених областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — **49**, №2. — С.108—116.

6. *Бокало М.М., Кушнір О.В.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук, праць. Вип. 288. Математика. — Чернівці: Рута, 2006. — С.28—38.

7. *Доманська О.В.* Варіаційні еліптичні нерівності в узагальнених анізотропних просторах Лебега-Соболєва // Нелинейные граничные задачи. — 2008. — **18**. — С.1—19.

8. *Бокало М.М., Кушнір О.В.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Вісник Львівського ун-ту. Серія мех.-мат. — 2006. — **66**. — С.20—35.

9. *Доманська О.В.* Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2007. — **67**. — С.104—118.

10. *Kováčik O., Rákosníc J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ Czechosl. Math. J. — 1991. — **41**, №4. — P.592—618.

11. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. — 1976. — **31**, №6.— С. 142—166.

12. *Бокало Н. М.* Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1994. – **30**, №8. – С.1325-1334.

13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 608 с.

14. *Шишков А.Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, №2. — С.277—289.