УДК 517.95

©2008 р. Федак І. В.

Прикарпатський національний університет, Івано-Франківськ

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ, ПОВ'ЯЗАНИХ З КОЛИВАНННЯМИ СТРАТИФІКОВАНИХ РІДИН

У цій статті розглядається одне диференціально-операторне рівняння в гільбертовому просторі H, зв'язане з коливаннями стратифікованих рідин. В термінах розподілу спектра оператора A досліджено стійкість розв'язків. У випадку, якщо $H = L_2\,[a,b]$ і A – деяке самоспряжене розширення мінімального оператора, породженого виразом $-d^2/dx^2$, це рівняння є рівнянням динаміки стратифікованої рідини. Одержані необхідні і достатні умови стійкості розв'язків крайових задач для цього рівняння.

IIn this note, we consider a differential-operator equation in a Hilbert space H connected with oscillations of stratified fluids. In terms of the distribution of the spectrum of an operator A we investigate the stability of solutions. In the case where $H = L_2\,[a,b]$ and A is some self-adjoint extension of the minimal operator generated by the expression $-d^2/dx^2$, this equation is the equation of the dynamics of a stratified fluid. We have obtained necessary and sufficient conditions for the stability of solutions of boundary value problems for this equation.

Розглянемо рівняння

$$\varepsilon y^{IV}(t) + (A+E)y^{II}(t) + Ay(t) = 0, \qquad (1)$$

$t \geq 0$, де A – самоспряжений напівобмежений знизу оператор у гільбертовому просторі H, E – тотожний в H оператор, $\varepsilon \geq 0$.

У випадку, якщо $H = L_2\,[a,b]$, A – деяке самоспряжене розширення мінімального оператора для $-d^2/dx^2$, рівняння (1) при $\varepsilon \leq 1$ є рівнянням одномірних коливань стратифікованих рідин (див. [1], [2]).

Вектор-функція $y(t)$ називається розв'язком рівняння (1), якщо вона чотири рази (при $\varepsilon = 0$ двічі) сильно неперервно диференційована в H; при кожному фіксованому $t \geq 0$ функції $y(t)$ та $y^{II}(t)$ належать до $D(A)$ – області визначення оператора A, причому $Ay^{II}(t)$ сильно неперервна в H; $y(t)$ задовольняє (1).

В роботі [4] для рівняння (1) вивчалась задача Коші про знаходження розв'язків такого рівняння, які задовольняють початкові умови $y^{(k)}(0) = f_k$, $k = \overline{0,3}$. Встановлено бієкцію між класом початкових умов та множиною розв'язків такої задачі. Отримано представлення розв'язків та досліджене питання щодо їхньої стійкості.

Розв'язок $y(t)$ рівняння (1) назвемо стійким, якщо $\sup\limits_{t\geq 0, k=\overline{0,3}} \|y^{(k)}(t)\| < +\infty$ ($k = \overline{0,1}$ при $\varepsilon = 0$). Саме ж рівняння (1) вважатимемо стійким, якщо стійким є кожен з розв'язків задачі Коші при будь-яких допустимих початкових умовах. Справедливе (див. [4]) наступне твердження.

Теорема 1. Рівняння (1) стійке тоді і тільки тоді, коли:

$$[-1,0] \cap \sigma(A) = \emptyset \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0,$$

$$(-\infty,0] \cap \sigma(A) = \emptyset \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

$$\Big((-\infty,0] \cup \Big[2\varepsilon - 1 - 2\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon}, 2\varepsilon - 1 + \\ +2\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon}\Big]\Big) \cap \sigma(A) = \emptyset \quad \text{при} \quad \varepsilon \geq 1,$$

де $\sigma(A)$ – спектр оператора A.

Розглянемо тепер рівняння

$$\varepsilon \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(y(x,t) - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right) - \\ - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0, \ t \geq 0, \qquad (2)$$

покладаючи $H = L_2\,[a,b]$.

Визначимо на множині функцій $u(x)$ із $C_0^\infty[a,b] \subset L_2[a,b]$ оператор $A_0^{/} : A_0^{/}u = -u''$. Він є симетричним у щільній в $L_2[a,b]$ області визначення і допускає замикання до мінімального оператора $A_0 = \overline{A_0^{/}}$. При цьому

$$D(A_0) = \overset{0}{W}{}_2^2[a,b], \quad D(A_0^*) = W_2^2[a,b].$$

Як показано в [3], всі самоспряжені розширення $\widetilde{A}$ оператора A_0 описуються крайовими умовами:

$$\cos B \cdot Y' - \sin B \cdot Y = 0,$$

де B – деякий самоспряжений оператор в $C^1 \oplus C^1$, $Y = \{-u(a), u(b)\}$, $Y' = \{u'(a), u'(b)\}$. При цьому $\widetilde{A}$ є напівобмежений знизу.

Тому, покладаючи $A = \widetilde{A}$, ми можемо трактувати рівняння (2) як частковий випадок рівняння (1).

Перейдемо тепер до конкретних самоспряжених розширень $\widetilde{A}$ і відповідних їм крайових умов для рівняння (2).

Задача Діріхле.

Нехай $\cos B = 0$. Тоді крайові умови для рівняння (2) запишемо у вигляді:

$$y(a,t) = y(b,t) = 0.$$

Згідно з [5], маємо

$$\sigma(A) = \left\{ \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2 \right\}, \ n \in N.$$

А отже, з теореми 1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 2. При $0 \le \varepsilon < 1$ задача Діріхле для рівняння (2) є стійкою. При $\varepsilon = 1$ вона стійка тоді і тільки тоді, коли $b - a \neq k\pi$, $k \in N$. А при $\varepsilon > 1$ стійкість такої задачі рівносильна існуванню такого $m \in Z_+$, при якому виконується нерівність

$$m < m\sqrt{2\varepsilon - 1 + 2\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon}} < l = \frac{b-a}{\pi} <$$
$$< (m+1)\sqrt{2\varepsilon - 1 - 2\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon}} < m+1.$$

Зауважимо, що при $\varepsilon > 1$ з теореми 2 випливає більш зручний для практичної перевірки наслідок: якщо $m < l < m+1$, то стійкими є лише ті задачі Діріхле, для яких виконуються нерівності:

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\left(l + \frac{1}{l} \right)^2 \text{ при } \quad m = 0$$

та

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\min\left\{ \left(\frac{m}{l} + \frac{l}{m} \right)^2, \left(\frac{m+1}{l} + \frac{l}{m+1} \right)^2 \right\}$$

при $m \in N$.

Задача Неймана.

Нехай тепер $\sin B = 0$. Тоді крайові умови для рівняння (2) запишемо у вигляді:

$$y_x'(a,t) = y_x'(b,t) = 0.$$

Згідно з [5], маємо

$$\sigma(A) = \left\{ \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2 \right\}, \ n \in Z_+.$$

Оскільки при цьому $0 \in \sigma(A)$, то з теореми 1 випливає, що задача Неймана є нестійкою при всіх $\varepsilon \ge 0$.

Змішана крайова задача.

Визначимо крайові умови для рівняння (2) рівностями:

$$y_x'(a,t) = h_1 y(a,t), \ y_x'(b,t) = h_2 y(b,t),$$
$$|h_1| + |h_2| \neq 0,$$

які відповідають вибору діагональної матриці B при побудові самоспряженого розширення $\widetilde{A}$ та крайових умов $u'(a) = h_1 u(a)$, $u'(b) = h_2 u(b)$.

Оскільки загальний розв'язок рівняння $-u''(x) = \lambda u(x)$ має вигляд

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}(x-a) + c_2 \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-a)}{\sqrt{\lambda}},$$

то нескладно переконатися, що власні значення оператора $\widetilde{A}$ визначаються з рівняння

$$D(\lambda) \equiv h_1 h_2 \frac{\sin\sqrt{\lambda}(b-a)}{\sqrt{\lambda}} +$$
$$+ (h_2 - h_1)\cos\sqrt{\lambda}(b-a) +$$
$$+ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(b-a) = 0.$$

При $\lambda < 0$ отримаємо

$$D(\lambda) = h_1 h_2 \frac{sh\sqrt{-\lambda}(b-a)}{\sqrt{-\lambda}} + \\ + (h_2 - h_1) ch\sqrt{-\lambda}(b-a) - \\ - \sqrt{-\lambda} sh\sqrt{-\lambda}(b-a).$$

Для таких λ проаналізуємо різні можливі варіанти значень $h_1,\ h_2$:
а) $h_1 = 0,\ h_2 \neq 0$. Тоді при $h_2 > 0$ рівняння $D(\lambda) = 0$ має єдиний від'ємний корінь, а при $h_2 < 0$ отримаємо $D(\lambda) < 0$ для всіх $\lambda < 0$.
б) $h_2 = 0,\ h_1 \neq 0$. При $h_1 < 0$ знову отримаємо єдиний від'ємний корінь рівняння $D(\lambda) = 0$, та $D(\lambda) < 0$ для всіх $\lambda < 0$ при $h_1 > 0$.
в) $h_1 > 0,\ h_2 < 0$. $D(\lambda) < 0$ для всіх $\lambda < 0$.
г) $h_1 h_2 > 0$. Тоді для $\lambda < 0$ при $h_1 - h_2 > h_1 h_2 (b-a)$ отримуємо

$$D(\lambda) < h_1 h_2 \frac{sh\sqrt{-\lambda}(b-a)}{\sqrt{-\lambda}} + \\ + (h_2 - h_1) ch\sqrt{-\lambda}(b-a) < \\ < h_1 h_2 \left(\frac{sh\sqrt{-\lambda}(b-a)}{\sqrt{-\lambda}} + \\ + (b-a) ch\sqrt{-\lambda}(b-a) \right) < 0.$$

Якщо ж $h_1 - h_2 \leq h_1 h_2 (b-a)$, то $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} D(\lambda) = -\infty$, $\lim\limits_{\lambda \to -0} D(\lambda) \geq 0$, звідки випливає наявність кренів рівняння $D(\lambda) = 0$ на $(-\infty, 0]$.
д) $h_1 < 0,\ h_2 > 0$. Як і у попередньому пункті маємо при $h_1 - h_2 \leq h_1 h_2 (b-a)$, що $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} D(\lambda) = -\infty$, $\lim\limits_{\lambda \to -0} D(\lambda) \geq 0$. Відповідно, при $h_1 - h_2 > h_1 h_2 (b-a)$ отримаємо $\lim\limits_{\lambda \to -0} D(\lambda) < 0$ та $D\left(-\left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2\right) > 0$. А отже, у кожному з цих випадків рівняння $D(\lambda) = 0$ матиме від'ємні корені.

Підсумовуючи сказане, з врахуванням теореми 1, отримуємо наступну теорему.

Теорема 3. Змішана крайова задача при $0 < \varepsilon < 1$ стійка тоді і тільки тоді, коли

$$h_1 - h_2 > \max\{0,\ h_1 h_2 (b-a)\}. \qquad (3)$$

Зауважимо, що при $\varepsilon = 0$ умова (3) є лише достатньою, а при $\varepsilon \geq 1$ – лише необхідною умовою стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Габов С.А., Оразов Б.Б.* Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых, связанных с ним задачах // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. – 1986. – Т.26, №1. – С. 92-102.

2. *Габов С.А., Оразов Б.Б., Свешников А.Г.* Об одном эволюционном уравнении четвертого порядка, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости. – Дифференц. Уравнения. – 1986. – Т.22, №1. – С. 19-25.

3. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284с.

4. *Горбачук М.Л., Федак И.В.* Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированных жидкостей // Докл. АН СССР. 1989. – Т.297, №1. – С. 14-17.

5. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431с.