УДК 517.956

©2009 р. І.С. Тупкало

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Доведено коректну розв'язність двоточкової задачі для сингулярних еволюційних рівнянь нескінченного порядку в класах узагальнених функцій.

We prove the correct solvability of a two-point problem for singular evolution equations of infinite order in classes of generalized functions.

Останнім часом значна увага приділяється дослідженню нелокальних багатоточкових крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Це зумовлено тим, що багато задач практики моделюється крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними (у тому числі періодичними) умовами (теорія фізики плазми, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль у прямокутних хвилеводах, обернені задачі для рівняння теплопровідності тощо). За останні 40 років нелокальні задачі для рівнянь з частинними похідними вивчали в різних аспектах багато вчених (О.О. Дезін, В.К. Романко, В.М. Борок, М.І. Матійчук, Б.Й. Пташник, А.М. Нахушев, О.А. Самарський, О.Л. Скубачевський та ін.)., виділяючи переважно випадки коректно поставлених задач.

У працях [1, 2] досліджені властивості оператора $\varphi(B_\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B_\nu^k$, де B_ν – оператор Бесселя порядку $\nu > -1/2$ ($\varphi(B_\nu)$ в [1, 2] називається оператором Бесселя нескінченного порядку). Еволюційні рівняння з оператором $\varphi(B_\nu)$ є природним узагальненням сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя, який вироджується за просторовою змінною. В [1, 2] доведено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + \varphi(B_\nu)u = 0$ в класі початкових умов, які є узагальненими функціями нескінченного порядку типу ультрарозподілів. У цій роботі встановлюється коректна розв'язність двоточкової задачі для вказаного еволюційного рівняння у випадку, коли крайова умова є узагальненою функцією типу розподілів; при цьому, попередньо, досліджуються структура та властивості фундаментального розв'язку двоточкової задачі.

1. Простори основних та узагальнених функцій

Простір основних функцій $\overset{\circ}{S} \equiv \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$. Простір $S(\mathbb{R})$ складається з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які спадають при $|x| \to +\infty$ разом з усіма своїми похідними швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$, тобто $\varphi \in S$, якщо

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \exists c_{km} = c_{km}(\varphi) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \\ |x^k D_x^m \varphi(x)| \leq c_{km}.$$

Послідовність функцій $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset S$ називається збіжною в S до функції $\varphi \in S$, якщо

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ : \ x^k D_x^m \varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} x^k D_x^m \varphi.$$

У просторі S визначені, є лінійними і неперервними операції диференціювання $\varphi \to D_x^m \varphi$ та лінійної заміни змінної $\varphi(x) \to \varphi(ax+b)$. Мультиплікатором у просторі S є кожна нескінченно диференційовна функція α, яка зростає на нескінченності разом з усіма своїми похідними не швидше за поліном, тобто

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_m > 0 \ \exists p_m \in \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|D_x^m \alpha(x)| \le c_m (1+|x|)^{p_m}.$$

В S можна ввести структуру зліченно нормованого простору, якщо покласти

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0\le m\le p}} \{(1+|x|)^p |D_x^m \varphi(x)|\},$$

$$p \in \mathbb{Z}_+, \varphi \in S.$$

Очевидно, що $\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1 \le \cdots \le \|\varphi\|_p \le \ldots$. Символом $S_p \equiv S_p(\mathbb{R})$ позначимо поповнення простору S за p-нормою; при цьому $S_0 \supset S_1 \supset \ldots$, вкладення $S_{p+1} \subset S_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними і компактними. Отже, $S = \lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{pr} S_p$. Збіжність в отриманому зліченно нормованому просторі співпадає з раніше введеною збіжністю в S. Простір S є повним [3].

Символом $\overset{\circ}{S}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору S. Оскільки $\overset{\circ}{S}$ утворює підпростір S, то в $\overset{\circ}{S}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями. У просторі $\overset{\circ}{S}$ визначені і є неперервними оператор Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, який відповідає оператору Бесселя [4]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$, а також пряме та обернене перетворення Бесселя $F_{B_\nu}^{-1}$ [4]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) := \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{S},$$

$$\varphi(x) \equiv F_{B_\nu}^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

де $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$, $\nu > -1/2$, j_ν – нормована функція Бесселя, при цьому $F_{B_\nu}[\overset{\circ}{S}] = \overset{\circ}{S}$. Оскільки до основних функцій з простору $\overset{\circ}{S}$ можна скільки завгодно разів застосувати оператор Бесселя, то простір $\overset{\circ}{S}$ можна означити ще й так [5]:

$$\overset{\circ}{S} = \{\varphi \in S : \ \varphi(x) = \varphi(-x), \ x \in \mathbb{R} \ \Big|$$

$$\forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \exists c_{km} > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$(1+x^2)^k |B^m \varphi(x)| \le c_{km}\}.$$

Зазначимо також, що операція узагальненого зсуву аргументу диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) в просторі $\overset{\circ}{S}$.

Простори типу W та $\overset{\circ}{W}$. Нехай Ω, M – диференційовні, парні на $\mathbb{R}$ функції, невід'ємні, зростаючі та опуклі на $[0,+\infty)$; причому $M(0) = \Omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Omega(x) = +\infty$. За допомогою функцій M та Ω Б.Д. Гуревич [6] увів простори W_M, W^Ω, W_M^Ω, названі ним просторами типу W. Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c > 0 \, \exists a > 0 \, \exists b > 0 \, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leqslant c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$$

(сталі c, a, b залежить лише від функції φ). Символом $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ позначимо сукупність усіх цілих парних функцій з простору W_M^Ω. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$, позначимо через $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. Із результатів, отриманих в [7] випливає, що $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R}) \subset \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$. Отже, на функціях з простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ визначене перетворення Бесселя, при цьому

$$F_{B_\nu}[\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})] = \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),$$

де Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω [6].

Простір узагальнених функцій $(\overset{\circ}{S})'$. Символом $(\overset{\circ}{S})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{S}$ введена топологія проективної границі просторів $\underset{p}{\overset{\circ}{S}}$ ($\underset{p}{\overset{\circ}{S}}$ складається з парних функцій простору S_p), причому вкладення $\underset{p+1}{\overset{\circ}{S}} \subset \underset{p}{\overset{\circ}{S}}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні та компактні, то

$$(\overset{\circ}{S})' = (\lim_{p\to\infty} \operatorname{pr} \underset{p}{\overset{\circ}{S}})' = \lim_{p\to\infty} \operatorname{ind} (\overset{\circ}{S})'.$$

Отже, якщо $f \in (\overset{\circ}{S})'$, то $f \in (\underset{p}{\overset{\circ}{S}})'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, при цьому

$$|\langle f, \varphi \rangle| \le c\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

де $c = \|f\|_p$ – норма функціоналу f у просторі $(\underset{p}{\overset{\circ}{S}})'$.

Згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f*\varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle, \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, бо операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}$.

Якщо $\varphi \in (\overset{\circ}{S})'$ і $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}$ для довільної основної функції φ, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}$.

Якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}$, то $F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}$, тому перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S})'$ визначимо за допомогою співвідношення [5]

$$\langle F_{B_\nu}[f], \varphi \rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}. \qquad (1)$$

З (1), властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_{B_\nu}[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{S}$. Якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{S})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}$ правильною є формула [5]: $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi]$, при цьому $F_{B_\nu}[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}$.

2. Властивості фундаментального розв'язку двоточкової задачі

Розглянемо двоточкову задачу для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u((t,x)}{\partial t} = Bu(t,x), (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+, \qquad (2)$$

де оператор B побудований за сталим символом $A(\sigma)$, який, як функція σ, задовольняє наступні умови : функція $A(\sigma)$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, $A \in \overset{\circ}{P}{}_M^\Omega$, де символом $\overset{\circ}{P}{}_M^\Omega$ позначено клас цілих парних однозначних функцій φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ і такими, що $e^\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$. Якщо розвинення функції A в степеневий ряд має вигляд

$$A(\sigma) = \sum_{k=0}^\infty c_{2k}\sigma^{2k}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то, як випливає з результатів, наведених у праці [1], у просторі $\overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ визначений і є неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку

$$B = \sum_{k=0}^\infty c_{2k}(-B_\nu)^k \equiv F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[A(\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}],$$

$$\nu > -1/2$$

(тут Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω).

Двоточкову задачу для рівняння (2) поставимо так:

$$\mu_1 u(t,\cdot)\Big|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)\Big|_{t=T} = \varphi, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \qquad (3)$$

(тут вважаємо, що $\mu_1 > \mu_2 > 0$). Класичний розв'язок $u \in C^1(0,T)$, $\overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ задачі (2), (3) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя у вигляді

$$u(t,x) = F_\nu B^{-1}[v(t,\sigma)](x),$$

$$(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R} \equiv \Omega.$$

Для функції $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо наступну задачу:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = A(\sigma)v(t,\sigma), \quad (t,\sigma)\in\Omega, \qquad (4)$$

$$\mu_1 v(t,\sigma)\Big|_{t=0} - \mu_2 v(t,\sigma)\Big|_{t=T} = \tilde{\varphi}(\sigma), \quad \sigma\in\mathbb{R},$$

де $\tilde{\varphi}(\sigma) := F_{B_{x\to\sigma}}[\varphi(x)]$. Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{tA(\sigma)\}, \quad (t,\sigma)\in\Omega, \qquad (5)$$

де c – довільна стала. Підставивши (5) в (4) дістанемо, що

$$c = \tilde{\varphi}(\sigma(\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\})^{-1}, \quad \sigma\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

Підставивши тепер (6) в (5), отримаємо формулу для розв'язку задачі (4), (5):

$$v(t,\sigma) = \frac{\exp(tA(\sigma))\tilde{\varphi}(\sigma)}{\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\}}, \quad (t,\sigma)\in\Omega.$$

Отже, розв'язок задачі (2), (3) має вигляд

$$u(t,x) =$$

$$= c_\nu \cdot \int\limits_0^\infty \frac{\exp\{tA(\sigma)\}\tilde{\varphi}(\sigma)}{\mu 1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\}} j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Введемо позначення:

$$G(t,T,x) := F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}\Big[\frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\}}\Big] =$$

$$= c_\nu \cdot \int\limits_0^\infty \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\}} j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma. \qquad (7)$$

Тоді

$$(t,x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,T,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= G(t,T,x) * \varphi(x), \quad (t,x)\in\Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu +_2 \exp\{TA(\sigma)\}} \times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\Big) j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Далі скористаємося тим, що

$$j_\nu(\sigma\xi)j_\nu(x\sigma) = T_x^\xi j_\nu(x\sigma).$$

Тоді

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty \Big(c_\nu \int\limits_0^\infty \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\}} \times$$

$$\times T_x^\xi j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\Big)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty T_x^\xi\Big(c_\nu \int\limits_0^\infty \frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\}} j_\nu(x\sigma)\times$$

$$\times\sigma^{2\nu+1}d\sigma\Big)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,T,x)\varphi(\xi)\times$$

$$\times\xi^{2\nu+1}d\xi = G(t,T,x) * \varphi(x), \quad (t,x)\in\Omega,$$

що й потрібно було довести.

Дослідимо властивості функції G. Із властивостей функції $A(\sigma)$ випливає, що

$$\exp\{TA(\sigma)\} \le \mu_0\exp\{-TM(a\sigma)\} \le \mu_0, \forall\sigma\in\mathbb{R}.$$

Тоді

$$(\mu_1 - \mu_2\exp\{TA(\sigma)\})^{-1} \le (\mu_1 - \mu_2\mu_0)^{-1}.$$

Надалі вважаємо, що $\mu_1 > \mu_2\mu_0$. Із формули Пуассона

$$j_\nu(\theta) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\theta\cos t)\sin^{2\nu} t dt$$

для нормованої функції Бесселя випливає, що $|j_\nu(x\sigma)| \le b_\nu$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, де

$$b_\nu = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)}, \quad \nu > -\frac{1}{2}.$$

Тоді для $t \geq t_0 > 0$ справджуються нерівності

$$|\exp\{tA(\sigma)\}(\mu_1-\mu_2\exp\{TA(\sigma)\})^{-1}j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}| \leq$$

$$\leq \mu_0 b_\nu(\mu_1-\mu_2\mu_0)^{-1}\exp\{-t_0 M(a\sigma)\}\sigma^{2\nu+1}. \quad (8)$$

Оскільки опукла функція зростає швидше за довільну лінійну функцію, то $M(a\sigma) \geq ab_0\sigma$, $b_0 > 0$, $\sigma \in (0,+\infty)$. Звідси та з (8) вже випливає, що інтеграл (7) збігається рівномірно в довільній смузі $\{(t,x) : t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$, $t_0 > 0$. Отже, $G(t,T,x)$ є неперервною функцією аргументу $t \in (0,T]$ (при фіксованому x).

Функція $G(t,T,x)$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$ (при фіксованому x). Справді, формально диференціюючи (7) під знаком інтеграла, дістанемо функцію

$$\Lambda(\sigma) := A(\sigma)\exp\{tA(\sigma)\}(\mu_1-\mu_2\times$$

$$\times\exp\{TA(\sigma)\})^{-1}j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1},$$

модуль якої для $t \geq t_0 > 0$ оцінюється величиною

$$\mu_0 b_\nu(\mu_1-\mu_2\mu_0)^{-1}|A(\sigma)|\exp\{-t_0M(a\sigma)\}\sigma^{2\nu+1}.$$

Оскільки

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall\sigma \in \mathbb{R}:\ |A(\sigma)\ \leq c_\varepsilon e^{M(\varepsilon\sigma)},$$

то

$$|A(\sigma)|\exp\{-t_0M(a\sigma)\} \leq$$

$$\leq c_\varepsilon\exp\{M(\varepsilon\sigma)-t_0M(a\sigma)\}.$$

Із властивості опуклості функції M випливає нерівність $M(\varepsilon\sigma) \leq \dfrac{1}{p}M(\varepsilon p\sigma)$, $p \in \mathbb{N}$. Передусім підберемо $p \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалася нерівність $\dfrac{1}{p} \leq t_0$. Далі візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $\varepsilon p < a$, тобто $\varepsilon \in (0, a/p)$. Тоді

$$\exp\{M(\varepsilon\sigma)-t_0M(a\sigma)\} \leq \exp\left\{\frac{1}{p}M(\varepsilon p\sigma)-\right.$$

$$\left.-t_0M(a\sigma)\right\} \leq \exp\{t_0(M(\varepsilon p\sigma)-M(a\sigma))\}.$$

Із нерівності опуклості для функції M випливає, що

$$M(\varepsilon p\sigma)-M(a\sigma) \leq -M((a-\varepsilon p)\sigma) \equiv -M(\tilde{a}\sigma),$$

$$\tilde{a} > 0.$$

Тоді

$$\exp\{M(\varepsilon\sigma)-t_0M(a\sigma)\} \leq \exp\{-t_0M(\tilde{a}\sigma)\},$$

$$\sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, для функції $\Lambda(\sigma)$ мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-M(\tilde{a}\sigma)\}\cdot\sigma^{2\nu+1}$, тобто, інтеграл від похідної підінтегральної функції в (7) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0,T] \subset (0,T]$ і тому похідну по t під знаком інтеграла в (7) можна застосувати у кожній точці $t \in (0,T]$. Аналогічно доводимо, що функція $G(t,T,\cdot)$ нескінченно диференційовна по $t \in (0,T]$.

Зауважимо, що

$$(\mu_1-\mu_2\exp\{TA(\sigma)\})^{-1} = \mu_2^{-1}\Big(\frac{\mu_1}{\mu_2}-$$

$$-\exp\{TA(\sigma)\}\Big)^{-1} = \mu_2^{-1}\cdot\mu_1^{-1}(1-\mu^{-1}\times$$

$$\times\exp\{TA(\sigma)\})^{-1} = \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\exp\{kTA(\sigma)\},$$

де $\mu = \mu_1/\mu_2 > 1$. Тоді $G(t,T,x)$ можна подати у вигляді

$$G(t,T,x) = \mu_2^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}G(t+kT,x), (t,x) \in \Omega,$$

де

$$G(t+kT,x) = c_\nu\cdot\int_0^\infty e^{(t+kT)A(\sigma)}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

$G(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2). Відомо (див. [1, 2]), що $G(t,x)$ як функція змінної x, допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину; $G(t,z)$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$, як функція змінної z, є елементом простору $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$, при цьому

$$\exists b_1 \in (0,a)\ \exists b_2 > b\ \exists d_\nu > 0:\ |G(t,x+iy)| \leq$$

$$\leq d_\nu t^{-(\omega_0+3/2)/\alpha} \exp\Big\{tM_1\Big(\frac{x}{b_1t}\Big)+t\Omega_1\Big(\frac{y}{b_1t}\Big)\Big\}, \tag{9}$$

де $\omega_0=\nu$, якщо $0<T\leq 1$ і $\omega_0=0$, якщо $T>1$, $\alpha>\omega_0+3/2$, α – фіксоване. Звідси випливає, що $G(t,x)$, як функція дійсного аргументу x (при фіксованому $t\in(0,T)$), є елементом простору $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$.

Для подальшого нам потрібні будуть оцінки похідних функції $G(t,x)$ на дійсній осі. Згідно з інтегральною формулою Коші

$$D_x^n G(t,x)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{G(t,z)}{(z-x)^{n+1}}dz, n\in\mathbb{Z}_+,$$

$$t\in(0,T), x\in\mathbb{R}, z=x+iy,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $x\in\mathbb{R}$. Тоді, урахувавши (9) знайдемо, що

$$|D_x^nG(t,x)|\leq\frac{n!}{R^n}\max_{z\in\Gamma_R}|G(t,z)|\leq d_\nu\cdot t^{-\tilde{\omega}_0}\frac{n!}{R^n}\times$$

$$\times\exp\Big\{-tM_1\Big(\frac{x_0}{b_1t}\Big)+t\Omega_1\Big(\frac{R}{b_2t}\Big)\Big\},$$

$$\tilde{\omega}_0:=(\omega_0+3/2)/\alpha,$$

де x_0 – точка максимуму функції $\exp\Big\{-M_1\Big(\frac{\xi}{b_1t}\Big)\Big\}$, $\xi\in[x-R,x+R]$. Оскільки M_1 є зростаючою на $[0,+\infty)$ функцією, то $x_0\in\{0,x-R,x+R\}$, тобто $x_0=x+\theta R$, де $\theta\in\{0,1,-1\}$, причому $\theta=0$, якщо $x=0$. Враховуючи опуклість і парність функції M_1 дістаємо, що

$$|D_x^nG(t,x)|\leq d_\nu t^{-\tilde{\omega}_0}n!R^{-n}\exp\Big\{-tM_1\Big(\frac{x}{b_1t}\Big)\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{t\Omega_1\Big(\frac{R}{b_2t}\Big)\Big\}\leq d_\nu t^{-\tilde{\omega}_0}n!\min_R\varphi_{n,t}(R)\times$$

$$\times\exp\Big\{-tM_1\Big(\frac{x}{b_1t}\Big)\Big\},$$

де

$$\varphi_{n,t}(R)=R^{-n}\exp\Big\{t\Omega_1\Big(\frac{R}{b_2t}\Big)\Big\}.$$

Легко бачити, що

$$\varphi'_{n,t}(R)=\Big(\frac{1}{b_2}\Omega'_1\Big(\frac{R}{b_2t}\Big)R^n-nR^{n-1}\Big)\times$$

$$\times\exp\Big\{t\Omega_1\Big(\frac{R}{b_2t}\Big)\Big\}\cdot R^{-2n}.$$

Прирівнявши $\varphi'_{n,t}(R)$ до нуля, дістанемо співвідношення:

$$\frac{R}{b_2t}\omega_1\Big(\frac{R}{b_2t}\Big)=\frac{n}{t};$$

тут $\omega_1=\Omega'_1$, ω_1 – функція, за якою будується Ω_1: $\Omega_1(x)=\int\limits_0^x\omega_1(\tau)d\tau$. Безпосередньо переконуємося в тому, що кожна функція $\varphi_{n,t}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, досягає свого мінімуму в точці $R_n(t)=b_2t\rho_n(t)$, де $\rho_n(t)$ – розв'язок рівняння $x\omega_1(x)=\frac{n}{t}$, $n\in\mathbb{Z}_+$ (при фіксованому $t\in(0,T)$). Тому

$$\min_R\varphi_{n,t}(R)=\varphi_{n,t}(R_n(t))=\Big(\frac{1}{b_2\rho_n(t)}\Big)^nt^{-n}\times$$

$$\times\exp\{t\Omega_1(\rho_n(t))\}.$$

Оскільки $\exp\{t\Omega_1(\rho_n(t))\}\leq\exp n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то маємо такі оцінки похідних функції G на дійсній осі:

$$|D_x^nG(t,x)|\leq\tilde{c}\Big(\frac{1}{b_2\rho_n(t)}\Big)^nn!t^{-(\tilde{\omega}_0+n)}\times$$

$$\times\exp\Big\{-tM_1\Big(\frac{x}{b_1t}\Big)+t\Omega_1(\rho_n(t))\Big\}\leq$$

$$\leq\tilde{c}\Big(\frac{e}{b_2\rho_n(t)}\Big)^nn!t^{-(\tilde{\omega}_0+n)}\cdot\exp\Big\{-tM_1\Big(\frac{x}{b_1t}\Big)\Big\},$$

$$\tilde{c}=d_\nu, \tag{10}$$

$$(t,x)\in\Omega,\quad n\in\mathbb{Z}_+$$

(тут $\rho_0(t)=0$, $\rho_0^0(t):=1$).

Лема 1. *$G(t,T,x)$ при кожному $t\in(0,T]$, як функція аргументу x, є елементом простору $\overset{\circ}{S}=\overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$.*

Доведення. Нехай

$$S_{n,t,T}(x):=\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^n\mu^{-k-1}G(t+kT,x).$$

Із результатів, наведених у цьому пункті, випливає, що $S_{n,t,T}(\cdot)\in\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\subset\overset{\circ}{S}$ при кожному $n\in\mathbb{Z}_+$ та $t\in(0,T]$. Для доведення твердження досить показати, що

$S_{n,t,T}(\cdot) \to G(t,T,\cdot)$ при $n \to \infty$ за топологією простору S, або, що рівносильно,

$$r_{n,t,T}(x) := \mu_2^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^{-k-1} G(t+kT, x) \to 0,$$
$$n \to \infty,$$

у просторі S (оскільки простір S повний, то тоді $G(t,T,\cdot) \in S$ при кожному $t \in (0,T]$; внаслідок парності функції $G(t,T,x)$ як функції аргументу x звідси дістаємо, що $G(t,T,\cdot) \in \overset{\circ}{S}$ при кожному $t \in (0,T]$).

Скориставшись (10) запишемо (поки-що формально співвідношення):

$$|x^p D_x^q r_{n,t,T}(x)| = \mu_2^{-1} \Big| x^p \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^{-k-1} \times$$
$$\times D_x^q G(t+kT, x) \Big| \leq \mu_2^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^{-k-1} \times$$
$$\times |x^p D_x^q G(t+kT, x)| \leq \mu_2^{-1} \tilde{c} \Big(\frac{e}{b_2}\Big)^q \cdot q! \times$$
$$\times \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\mu^{-k-1}}{\rho_q^q(t+kT)} (t+kT)^{-(q+\tilde{\omega}_0)} |x|^p \times$$
$$\times \exp\Big\{ -(t+kT) M_1\Big(\frac{x}{b_1(t+kT)}\Big)\Big\},$$
$$x \in \mathbb{R}, \{p,q\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Елементи послідовності $\{\rho_q(t+kT), q \geq 1\}$ (при фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$) є розв'язками рівнянь

$$\rho_q(t+kT)\omega_1(\rho_q(t+kT)) = \frac{q}{t+kT}, \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\rho_q^{-q}(t+kT) = \omega_1^q(\rho_q(t+kT))(t+kT)^q q^{-q}.$$

Оскільки

$$\frac{q}{t+kT} \leq \frac{q}{t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, t \in (0,T],$$

то $0 < \rho_q(t+kT) \leq \rho_q(t)$. Із властивості монотонності функції ω_1 випливає нерівність

$$\omega_1(\rho_q(t+kT)) \leq \omega_1(\rho_q(t)) \equiv \gamma_q(t).$$

Крім того,

$$(t+kT)^q \leq (T(k+1))^q = T^q(k+1)^q, \quad k \geq n+1.$$

Скориставшись парністю функції M_1, а також тим, що $M_1(y) \geq \alpha_0 y$, $\alpha_0 > 0$, $y \in [0,\infty)$, знайдемо, що

$$|x|^p \exp\Big\{ -(t+kT) M_1\Big(\frac{|x|}{b_1(t+kT)}\Big)\Big\} \leq$$
$$\leq \frac{|x|^p \cdot p!}{(k+kT)^p M_1^p\Big(\frac{|x|}{b_1(t+kT)}\Big)} \leq$$
$$\leq \frac{|x|^p \cdot p! b_1^p (k+kT)^p}{(t+kT)^p \cdot |x|^p \alpha_0^p} \equiv p! b_1^p \alpha_0^{-p}.$$

Тоді

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p D_x^q r_{n,t,T}(x)| \leq \mu_2^{-1} \tilde{c} \Big(\frac{e}{b_2}\Big)^q q! p! b_1^p \alpha_0^{-p} q^{-q} \times$$
$$\times \gamma_q^q(t) t^{-(\tilde{\omega}_0+q)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(k+1)^q}{\mu^{k+1}} = c_{pq} \cdot \beta_n,$$
$$\mu = \mu_1/\mu_2 > 1,$$

де

$$c_{pq} = \mu_2^{-1} \tilde{c} \Big(\frac{b_1}{\alpha_0}\Big)^p t^{-\tilde{\omega}_0} \Big(\frac{eT\gamma_q^q(t)}{b_2 q t}\Big)^q q! p!,$$

$$\beta_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(k+1)^q}{\mu^{k+1}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^q}{\mu^{k+1}}$ збіжний (при довільному фіксованому $q \in \mathbb{Z}_+$), то $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ як залишок збіжного числового ряду. Цим доведено, що $x^p D_x^q r_{n,t,T} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0$ при фіксованому $t \in (0,T]$, тобто $S_{n,t,T}(\cdot) \to G(t,T,\cdot)$ при $n \to \infty$ у просторі S.

Лема доведена.

Лема 2. *Функція* $G(t,T,\cdot)$, $t \in (0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $\overset{\circ}{S}$, *диференційовна по* t.

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t, T, x) - G(t,T,x)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x)$$

виконується в розумінні збіжності в просторі S, тобто

$$x^pD_x^q\Phi_{\Delta t}\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}x^pD_x^q\Big(\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,\cdot)\Big), \Delta t\to 0, \quad (11)$$

для довільних $\{p,q\}\subset\mathbb{Z}_+$.

Функція $G(t,T,x)$ диференційовна по t у звичайному розумінні, тому

$$\Phi_{\Delta t}(x)=\frac{\partial}{\partial t}G(t+\theta\Delta t,T,x), \quad 0<\theta<1.$$

Отже,

$$\Phi_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x)=\frac{\partial}{\partial t}[G(t+\theta\Delta t,T,x)-$$

$$-G(t,T,x)]=\theta\Delta t\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t+\theta_1\Delta t,T,x),$$

$$0<\theta_1<1.$$

Урахувавши вигляд функції $G(t,T,x)$ знайдемо, що

$$\Lambda(x):=\Big|x^pD_x^q\Big(\Phi_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x)\Big)\Big|=$$

$$=\theta\mu_2^{-1}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}x^p\times$$

$$\times D_x^q\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t+\theta_1\Delta t+kT,x)\Big)\Big|\cdot|\Delta t|\equiv$$

$$\equiv S(t,T,x)\cdot|\Delta t|.$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t+\theta_1\Delta t+T,x)=$$

$$=c_\nu\cdot\int_0^\infty A^2(\sigma)e^{(t+\theta_1\Delta t+kT)A(\sigma)}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

то, врахувавши властивості функції-символа $A(\sigma)$ та скориставшись методикою оцінювання похідних функції $G(t,x)$ на дійсній осі, прийдемо до нерівності

$$\Big|D_x^q\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t+\theta_1\Delta t+kT,x)\Big)\Big|\leq$$

$$\leq d\Big(\frac{e}{b_3\rho_q(t+\theta_1\Delta t+kT)}\Big)^q\cdot q!\times$$

$$\times(t+\theta_1\Delta t+kT)^{-(q+\tilde\omega_0)}\exp\Big\{-(t+\theta_1\Delta t+kT)\times$$

$$\times M_1\Big(\frac{x}{b_1(t+\theta_1\Delta t+T)}\Big)\Big\}, \quad q\in\mathbb{Z}_+,$$

де d, b_3, $b_4>0$ – сталі, незалежні від q.

Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні леми 1, отримаємо, що

$$\Big|x^p\exp\Big\{-(t+\theta_1\Delta t+kT)\times$$

$$\times M_1\Big(\frac{x}{b_4(t+\theta_1\Delta t+kT)}\Big)\Big\}\Big|\leq p!b_4^p\alpha_0^{-p}.$$

Приріст аргументу Δt вважаємо таким, що $t/2\leq t+\theta_1\Delta t\leq T$. Тоді

$$\rho_q(t+\theta_1\Delta t+kT)\leq\rho_q(t/2),$$

$$\frac{q}{t+\theta_1\Delta t+kT}\leq\frac{q}{t/2}, \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+, t\in(0,T].$$

Звідси випливає, що

$$\omega_1(\rho_q(t+\theta_1\Delta t+kT))\leq\omega_1(\rho_q(t/2))\equiv\gamma_q(t/2),$$

$$(t+\theta_1\Delta t+kT)^q\leq(T(k+1))^q=T^q(k+1)^q, \forall k\in\mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$S(t,T,x)\leq\mu_2^{-2}d\Big(\frac{e}{b_3}\Big)^q q!q^{-q}T^q\gamma_q(t/2)p!b_4^p\alpha_0^{-p}\times$$

$$\times(t/2)^{-(q+\tilde\omega_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^q}{\mu^{k+1}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^q}{\mu^{k+1}}$ збіжний, то $S(t,T,x)\leq\beta$, $\forall x\in\mathbb{R}$, де $\beta=\beta(t)>0$. Таким чином,

$$0\leq\sup_{x\in\mathbb{R}}\Lambda(x)\leq\beta|\Delta t|\to 0, \quad \Delta t\to 0.$$

Це і означає, що умова (11) виконується.

Лема доведена.

Наслідок 1. $G(t,T,\cdot)$, $t\in(0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $\overset{\circ}{S}$, *неперервна по* t.

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,T,\cdot)=\Big(f*\frac{\partial}{\partial t}G\Big)(t,T,\cdot),$$

$$\forall f \in (\overset{\circ}{S})', t \in (0,T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$(f*G)(t,T,x) = \langle f_\xi, T_x^\xi G(t,T,x)\rangle \equiv$$
$$\equiv \langle f_\xi, T_\xi^x G(t,T,\xi)\rangle.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)((t,T,\cdot) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G)(t+\Delta t,T,\cdot)-$$
$$-(f*G)(t,T,\cdot)] =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\Big\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_x^\xi G(t+\Delta t,T,\cdot)T_x^\xi G(t,T,\cdot)]\Big\rangle.$$

Внаслідок леми 2 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_x^\xi G(t+\Delta t,T,\cdot)-T_x^\xi G(t,T,\cdot)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}T_x^\xi G(t,T,\cdot)$$

виконується у сенсі збіжності за топологією простору S, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)((t,T,\cdot) =$$
$$= \Big\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_x^\xi G(t+\Delta t,T,\cdot)-T_x^\xi G(t,T,\cdot)]\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_x^\xi G(t,\cdot)\Big\rangle = \Big\langle f_\xi, T_x^\xi \frac{\partial}{\partial t}G(t,T,\cdot)\Big\rangle =$$
$$= \Big(f*\frac{\partial G}{\partial t}\Big)(t,T,\cdot).$$

Твердження доведене.

Функцію $G(t,T,x)$ надалі називатимемо фундаментальним розв'язком двоточкової задачі (ФРДЗ) для рівняння (2).

Далі додатково припускаємо, що функція-символ $A(\sigma)$ є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}$; за цієї умови оператор B визначений і неперервний у просторі $\overset{\circ}{S}$.

Символом $(\overset{\circ}{S}_*)'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\overset{\circ}{S})'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{S}$.

Лема 3. *Нехай* $f \in (\overset{\circ}{S}_*)'$,

$$\omega(t,x) = (f*G)(t,T,x), \quad (t,x)\in\Omega_+.$$

Тоді функція $\omega(t,x)$ *є розв'язком рівняння (2).*

Доведення. Згідно з наслідком 3

$$\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,T,x) = \Big(f*\frac{\partial G}{\partial t}\Big)(t,T,x).$$

Крім того,

$$B\omega(t,x) = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[A(\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}[f*G]].$$

Оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}$, то

$$F_{B_{x\to\sigma}}[(f*G)(t,T,x)] = F_{B_{x\to\sigma}}[f](\sigma)\cdot$$
$$\cdot F_{B_{x\to\sigma}}[G](t,T,\sigma) = F_B[f](\sigma)\cdot Q(t,\sigma),$$

де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{tA(\sigma)\}(\mu_1-\mu_2\exp\{TA(\sigma)\})^{-1}.$$

Отже,

$$B\omega(t,x) = F_B^{-1}[A(\sigma)Q(t,\sigma)F_B[f]] =$$
$$= F_B^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F_B[f]\Big] = F_B^{-1}\Big[F_B\Big[\frac{\partial}{\partial t}G\Big]\cdot F_B[f]\Big] =$$
$$= F_B^{-1}\Big[F_B\Big(f*\frac{\partial G}{\partial t}\Big)\Big] = \Big(f*\frac{\partial G}{\partial t}\Big)(t,T,x).$$

Звідси випливає, що функція $\omega(t,x)$ задовольняє рівняння (2).

Лема доведена.

Лема 4. *Нехай*

$$\omega(t,x) = (f*G)(t,T,\xi) = \langle f_\xi, T_x^\xi G(t,T,x)\rangle \equiv$$
$$\equiv \langle f_\xi, T_\xi^x G(t,T,\xi)\rangle, \quad f\in(\overset{\circ}{S}_*)', (t,x)\in\Omega.$$

Тоді у просторі $(\overset{\circ}{S}_*)'$ *виконується граничне співвідношення*

$$\mu_1\lim_{t\to+0}\omega(t,\cdot) - \mu_2\lim_{t\to T-0}\omega(t,\cdot) = f.$$

Доведення. Передусім зазначимо, що з властивостей функції $G(t,\xi)$ (див. []) та та властивостей оператора узагальненого зсуву аргументу випливає, що

$$T_\xi^x G(t,\xi)\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}T_\xi^x G(t_0,\xi), \quad t_0>0,$$

за топологією простору $\overset{\circ}{S}$. Тоді, урахувавши властивість неперервності функціоналу f дістанемо, що

$$\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle\underset{t\to T-0}{\longrightarrow}\langle f_\xi, T_\xi^x G(T+kT,\xi)$$

($k\in\mathbb{Z}_+$ – фіксоване);

$$\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle f_\xi, T_\xi^x G(kT,\xi)$$

($k\in\mathbb{N}$ – фіксоване). Крім того [1], $G(t,\cdot)\to\delta$ при $t\to+0$ у просторі $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'\subset(\overset{\circ}{S})'$. Тоді, на підставі властивості неперервності операції згортки твердимо, що

$$\lim_{t\to+0}(f*G)(t,\cdot)\equiv\lim_{t\to+0}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle=f*\delta=f.$$

Урахувавши вигляд функції $G(t,T,\xi)$, а також те, що

$$S_{n,t,T}(\xi):=\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{n}\mu^{-k-1}G(t+kT,\xi)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}G(t,T,\xi)$$

за топологією простору S, прийдемо до наступних співвідношень:

$$\mu_1\lim_{t\to+0}\omega(t,x)-\mu_2\lim_{t\to T-0}\omega(t,x)=$$
$$=\mu_1\lim_{t\to+0}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t,T,\xi)\rangle-$$
$$-\mu_2\lim_{t\to T-0}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t,T,\xi)\rangle=$$
$$=\mu_1\lim_{t\to+0}\Big\langle f_\xi, \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle-$$
$$-\mu_2\lim_{t\to T-0}\Big\langle f_\xi, \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle=$$
$$=\frac{\mu_1}{\mu_2}\lim_{t\to+0}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle-$$
$$-\lim_{t\to T-0}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle=$$
$$=\frac{\mu_1}{\mu_2}\Big(\mu^{-1}\lim_{t\to+0}(f*G)(t,x)+$$
$$+\lim_{t\to+0}(\mu^{-2}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+T,\xi)\rangle+$$
$$+\mu^{-3}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+2T,\xi)\rangle+\ldots)\Big)-$$
$$-\lim_{t\to T-0}\Big(\mu^{-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle+$$
$$+\mu^{-2}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+T,\xi)\rangle+$$
$$+\mu^{-3}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+2T,\xi)\rangle+\ldots\Big)=$$
$$=f*\delta+\Big(\mu^{-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(T,\xi)\rangle+$$
$$+\mu^{-2}\langle f_\xi, T_\xi^x G(2T,\xi)\rangle+\ldots\Big)-\Big(\mu^{-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(T,\xi)\rangle+$$
$$+\mu^{-2}\langle f_\xi, T_\xi^x G(2T,\xi)\rangle+\ldots\Big)=f*\delta=f.$$

Коректність здійсненого граничного переходу по t при $t\to T-0$ під знаком суми відповідного ряду випливає зі співвідношення

$$\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle=$$
$$=\langle f_\xi, T_\xi^x G(t,T,\xi)\rangle\underset{t\to T-0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{t\to T-0}{\longrightarrow}\langle f_\xi T_\xi^x G(T,T,\xi)\rangle=$$
$$=\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(T+kT,\xi)\rangle,$$

яке є наслідком властивості неперервності функції $G(t,T,\xi)$ у точці $t=T$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$ та властивості неперервності функціоналу f. Крім того, функція

$$\tilde G(t,T,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}G(t+kT,\xi), t\in[0,T], \xi\in\mathbb{R},$$

при кожному $t\in[0,T]$ як функція аргументу ξ є елементом простору $\overset{\circ}{S}$ і як абстрактна функція аргументу t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$ є неперервною функцією; зокрема, неперервною і у точці $t=0$ (доведення цих властивостей здійснюється за схемою доведень лем 1, 2). Тоді

$$\lim_{t\to+0}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f, T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f, \lim_{t\to+0}T_\xi^x G(t+kT,\xi)\rangle=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle f_\xi, T_\xi^x G(kT,\xi)\rangle=\langle f_\xi, T_\xi^k\tilde G(0,T,\xi)\rangle.$$

Лема доведена.

3. Коректна розв'язність двоточкової задачі

Із тверджень, доведених у лемах 3, 4 випливає, що для рівняння (2) двоточкову задачу можна ставити так. Для (2) задамо умову

$$\mu_1 u(t,\cdot)\Big|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)\Big|_{t=T} = f, \quad \mu_1 > \mu_2 > 0, \tag{12}$$

де $f \in (\overset{\circ}{S}_*)'$. Під розв'язком задачі (2), (12) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T),\overset{\circ}{S})$, яка задовольняє рівняння (2) та крайову умову (12) у тому сенсі, що

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = f$$

(границі розглядаються у просторі $(\overset{\circ}{S})'$). Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Задача (2), (12) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* $(\overset{\circ}{S}_*)'$. *Розв'язок подається у вигляді згортки:*

$$u(t,x) = (f * G)(t,x), \quad f \in (\overset{\circ}{S}_*)', (t,x) \in \Omega_+,$$

де G *– ФРДЗ для рівняння (2).*

Доведення. З лем 3, 4 випливає, що функція u є розв'язком задачі (2), (12) у вказаному розумінні. Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in (\overset{\circ}{S}_*)'$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності. Залишається переконатися в тому, що задача (2), (12) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -B^* v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+,$$

$$0 \le t < t_0 \le T, \tag{13}$$

$$v(t,\cdot)\Big|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (\overset{\circ}{S}_*)', \tag{14}$$

де $B^* = B$ – звуження спряженого оператора до оператора B на простір $\overset{\circ}{S} \subset (\overset{\circ}{S})'$. Умова (14) розуміється в слабкому сенсі.

Розглянемо функцію

$$G^*(t_0 - t, x) = F^{-1}_{B_\nu}[\exp\{(t_0 - t)A(\xi_0)\}(x).$$

Аналогічно тому, як це зроблено в праці [2] доводимо, що G^*, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$, диференційовна по t; розв'язок задачі Коші (13), (14) дається формулою

$$v(t,x) = (\psi * G^*)(t_0 - t, x), \quad (t,x) \in \Omega'_+,$$

при цьому $v(t,\cdot) \subset \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0,t_0)$, $v(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$, диференційовна по t.

Нехай $Q^t_{t_0} \colon (\overset{\circ}{S}_*)' \to \overset{\circ}{S}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (\overset{\circ}{S}_*)'$ розв'язок $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}$ задачі (13), (14):

$$\forall \psi \in (\overset{\circ}{S}_*)' : \quad Q^t_{t_0}\psi = (\psi * G^*)(t_0 - t, x) \equiv v(t,x),$$

$$(t,x) \in \Omega'_+.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in (\overset{\circ}{S}_*)' : \quad \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} = -B^* Q^{t_0}_{t_0}\psi, \lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}_*)'$).

Розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, задачі (2), (12) трактуватимемо як функціонал з простору $(\overset{\circ}{S})' \supset \overset{\circ}{S}$. Доведемо, що задача (2), (12) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\overset{\circ}{S})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (2) при нульовій крайовій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \overset{\circ}{S} \subset (\overset{\circ}{S}_*)'$, де ψ – довільний елемент з простору $(\overset{\circ}{S}_*)'$. Диференціюючи по t, урахувавши при цьому, що $u(t,\cdot)$ – слабко диференційовна функція параметра $t \in (0,T)$, $Q^t_{t_0}\psi \equiv v(t,\cdot)$ – диференційовна функція параметра $t \in (0,t_0)$,

$t_0 \le T$, як абстрактна функція, використовуючи рівняння (2), (13) знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t} Q^t_{t_0}\psi\Big\rangle + \Big\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\Big\rangle =$$

$$= \langle Bu, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle u, B^* Q^t_{t_0}\psi\rangle = \langle Bu, Q^t_{t_0}\psi\rangle -$$

$$-\langle Bu, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0, \forall \psi \in (\overset{\circ}{\underset{*}{S}})', 0 < t < t_0 \le T.$$

Звідси випливає, що функція

$$g(t) := \langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle, \quad 0 < t < t_0 \le T,$$

є сталою ($g(t) = c = \text{const}$). Функція $G^*(t_0 - t, \cdot)$, як абстрактна функція параметра $t \in [t_0, t)$ із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$, диференційовна по t, тому вона є неперервною абстрактною функцією параметра t, тобто $G^*(t_0 - t, \cdot) \to G^*(t_0, \cdot)$ при $t \to +0$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}$. Оскільки ψ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}$, то $\psi * G^*(t_0 - t, \cdot) \to \psi * G^*(t_0, \cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $\overset{\circ}{S}$. Отже, $Q^t_{t_0}\psi = \psi * G^*(t_0 - t, \cdot) \to Q^t_{t_0}\psi$ при $t \to +0$ у просторі $\overset{\circ}{S}$. Крім того, за доведеним раніше, за умови $f = 0$ маємо, що $u(t,\cdot) \to 0$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{S})'$. Тоді із відповідного твердження про абстрактні функції випливає, що

$$c = \langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle 0, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0.$$

Отже, $c = 0$, тобто

$$\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0, \quad 0 < t < t_0 \le T. \qquad (15)$$

Оскільки $u(t,\cdot)$, $Q^t_{t_0}\psi$ є регулярними узагальненими функціями з простору $(\overset{\circ}{S})'$, то правильними є співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \int_0^\infty u(t,x) Q^t_{t_0}\psi(x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \langle Q^t_{t_0}\psi, u(t,\cdot)\rangle. \qquad (16)$$

Далі скористаємось тим, що $Q^t_{t_0}\psi \to \psi$ при $t \to t_0$ у просторі $(\overset{\circ}{S})'$, $u(t,\cdot) \to u(t_0,\cdot)$ при $t \to t_0$ у просторі $\overset{\circ}{S}$, якщо $t_0 \ne 0$. Перейшовши в (16) до границі при $t \to t_0$, врахувавши при цьому (15), внаслідок відповідного твердження про абстрактні функції [8, с. 95] знайдемо, що

$$0 = \lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \lim_{t\to t_0}\langle Q^t_{t_0}\psi, u(t,\cdot)\rangle =$$

$$= \langle Q^{t_0}_{t_0}\psi, u(t_0,\cdot)\rangle = \langle \psi, u(t_0,\cdot)\rangle = \langle u(t_0,\psi)\rangle.$$

Оскільки t_0 вибране довільним чином між 0 і T, то $u(t,x) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T)$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування // Доповіді НАН України. – 2003. – № 6. – С. 7 – 12.
2. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку // Доповіді НАН України. – 2003. – № 9. – С. 18 – 24.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
4. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.
5. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299 – 310.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
7. *Готинчан Т.I.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 39 – 44.
8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.