УДК 517.9

©2009 р. Ю.В. Теплінський, К.В. Пасюк

Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка,
Буковинська державна фінансова академія, Чернівці

ПРО ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЗЛІЧЕННИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО–РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Знайдено достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей ліпшицевих та гельдерових інваріантних торів лінійних злічених систем диференціально-різницевих рівнянь загального виду, що визначені на нескінченновимірних торах.

We find sufficient conditions for the existence of Lipschitz and Hölder invariant tori for linear countable systems of differential-difference equations of general form defined on infinite dimensional tori in the space of bounded numerical sequences.

1^0. **Постановка задачі та об'єкт дослідження.** У цій статті продовжено дослідження проблеми існування у банаховому просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$ інваріантного тору системи рівнянь (1) з [1] за допомогою методу функції Гріна-Самойленка [2]. Тут значно покращено основний результат роботи [1]; вивчено можливість побудови інваріантного тору вказаної системи у випадку, коли про існування функції Гріна-Самойленка відповідної однорідної системи рівнянь нічого не відомо; наведено нетривіальні ілюстративні приклади. Доведені твердження добре узгоджуються з результатами, одержаними в монографіях [3 – 5], що стосуються існування інваріантних торів злічених систем диференціальних та різницевих рівнянь, визначених на торах. Для значного зменшення обсягу статті в ній збережено всі позначення, символи та твердження з [1] без докладних додаткових пояснень, зокрема, збережено позначення потрібних констант.

Розглянемо систему рівнянь (1) з [1]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t)+$$
$$+B(\varphi,t)x(t+\Delta) + c(\varphi,t) \tag{1}$$

і вважатимемо, що виконуються умови 1 — 4 та умови $(\mathbf{A})$ з [1], які повністю визначають цю систему.

Будемо вважати, що рівняння

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x \tag{2}$$

задовольняє умови $(\mathbf{\Gamma})$, якщо воно не має обмежених на R^1 розв'язків, крім нульового, та має ФГС (функцію Гріна-Самойленка) $G_t(\tau,\varphi)$, що задовольняє нерівність

$$\|G_t(\tau,\varphi)\| \le K\exp\{-\gamma|t-\tau|\} \tag{3}$$

для всіх $\{t,\tau\} \subset R^1$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, де K і γ — додатні сталі, $\mathcal{T}_\infty$ — нескінченновимірний тор. Зображення цієї функції, означення інваріантного тору системи (1) та матричної норми подано в роботі [1].

Наступні вимоги, що накладаються на коефіцієнти системи рівнянь (1), назвемо умовами $(\mathbf{K})$:

1) матриці $P(\varphi)$, $B(y)$ та функції $a(\varphi)$, $c(\varphi,t)$ обмежені за матричною та векторною нормами на множинах $\mathcal{T}_\infty$, $\mathcal{T}_\infty^\infty$ та $\mathcal{T}_\infty$, $\mathcal{T}_\infty^\infty$ відповідно константами P^0, B^0 та A, C^0 і задовольняють на цих множинах умови Ліпшіца з коефіцієнтами p^0, β та α, η;

2) множини Δ_{ij}, Γ_{ij} та Δ_i відхилень аргументу t, визначені в умовах 1 — 4 з [1], обмежені, тобто $|\Delta_{ij}| \le$ $\le \Delta^* = const < \infty$, $|\Gamma_{ij}| \le \Gamma^* = const < \infty$

та $|\Delta_i| \leq \Delta_* = const < \infty \ \ \forall \{i,j\} \subset N$, N — множина натуральних чисел.

Введемо такі позначення: $u(\varphi, t+\Delta) = (u_1(\varphi_{t+\Delta_1}(\varphi)), u_2(\varphi_{t+\Delta_2}(\varphi)), \dots)$, $u^0(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi)c(\varphi,\tau)d\tau$, і сформулюємо наступну теорему, що значно покращує основний результат роботи [1].

2^0. Основний результат щодо існування інваріантного тору системи (1).

Теорема. *Нехай для системи рівнянь (1) виконуються умови* $(\mathbf{\Gamma})$ *та* $(\mathbf{K})$. *Тоді для будь-якого* $k \in N\bigcup\{0\}$ *індуктивне рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + $$
$$+ B(\varphi,t)u^k(\varphi, t+\Delta) + c(\varphi,t) \qquad (4)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ *інваріантний тор* $\mathcal{T}^{k+1}$, *породжений функцією*

$$x = u^{k+1}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi)c^{k+1}(\varphi,\tau)d\tau,$$

де $c^{k+1}(\varphi,\tau) = B(\varphi,\tau)u^k(\varphi,\tau+\Delta) + c(\varphi,\tau)$.

При цьому справджуються твердження:

1) якщо $2KB^0 < \gamma$, *то послідовність* $\{u^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$ *рівномірно відносно* $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ *збігається за нормою простору* $\mathfrak{M}$ *до неперервної на* $\mathcal{T}_\infty$ *функціїї* $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, *що визначає інваріантний тор* $\mathcal{T}$ *системи рівнянь (1);*

2) якщо $\gamma > 2KB^0\exp\{\alpha\Delta_*\}$, *то ця функція задовольняє умову Гельдера, тобто* $\forall \{\varphi, \bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u(\varphi) - u(\bar\varphi)\| \leq U\|\varphi - \bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \qquad (5)$$

де $U = const > 0$, ν *— довільне дійсне число, що задовольняє нерівність*

$$\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1} > 2KB^0\exp\{\alpha\Delta_*\};$$

3) якщо $\gamma > \alpha + 2KB^0\exp\{\alpha\Delta_*\}$, *то ця функція задовольняє умову Ліпшиця на* $\mathcal{T}_\infty$.

Доведення. Неважко обгрунтуватити, що і при відсутності вимоги $\gamma > \alpha$, яка входила до умов основної теореми з [1], послідовність $\{u^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$ існує, причому кожен її елемент задовольняє умову Гельдера, тобто $\forall\{\varphi,\bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u^k(\varphi) - u^k(\bar\varphi)\| \leq \Gamma^k\|\varphi - \bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \qquad (6)$$

де Γ^k — додатні сталі, ν — довільне додатне число, що задовольняє нерівність

$$\gamma > \frac{\alpha\nu}{\nu+1}.$$

Твердження 1 сформульованої теореми доводиться аналогічно до доведення теореми з [1] без суттєвих змін.

Доведемо друге твердження теореми. При умові, що $\Gamma^k \leq U \ \forall k \in N$, для доведення нерівності (5) достатньо перейти до границі при $k \to \infty$ у нерівності, що одержується з (6) заміною у ній Γ^k на U. Покладемо

$$\tilde\Gamma^k = \frac{4}{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1}}K^3(2P^0(p^0)^\nu)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times\frac{C^0\gamma}{\gamma - 2KB^0} +$$
$$+K\{K_\nu + B^0\tilde\Gamma^{k-1}\exp\{\alpha\Delta_*\} + \frac{2KC^0S_\nu}{\gamma - 2KB^0}\}\times$$
$$\times\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}, \quad k = 0,1,2,3,\dots,$$

де $\tilde\Gamma^{-1} = 0$, а числа

$$K_\nu = \left\{2C^0\left[2C^0(\eta\exp\{\alpha\Delta^*\})^\nu\right]^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

та

$$S_\nu = \left\{2B^0\left[2B^0(\beta\exp\{\alpha\Gamma^*\})^\nu\right]^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

не залежать від k. Після достатньо громіздких перетворень переконуємося, що $\Gamma^k < \tilde\Gamma^k$ при всіх $k = 0,1,2,3,\dots$, а обмеженість множини $\{\tilde\Gamma^k\}_{k=0}^{\infty}$ випливає з індуктивної рівності

$$\tilde{\Gamma}^{k+1} - \tilde{\Gamma}^{k} =$$
$$= KB^0 \exp\{\alpha\Delta_*\} \frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}} (\tilde{\Gamma}^{k} - \tilde{\Gamma}^{k-1}),$$

оскільки за умовою другого твердження теореми стала $KB^0 \exp\{\alpha\Delta_*\}\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}$ менша за одиницю. Отже, потрібне число U існує.

Третє твердження теореми обгрунтуємо аналогічно.

Тут уже виконується нерівність $\gamma > \alpha$, а отже має місце теорема з [1], яка гарантує ліпшіцевість на торі $\mathcal{T}_\infty$ функцій $u^k(\phi)$ при будь-якому $k \in N\bigcup\{0\}$, тобто функція $u^k(\varphi)$ задовольняє на торі $\mathcal{T}_\infty$ умову Ліпшіця

$$\|u^k(\varphi) - u^k(\bar{\varphi})\| \le \bar{\Gamma}^k \|\varphi - \bar{\varphi}\|$$

з коефіцієнтом $\bar{\Gamma}^k = const > 0$. Якщо при цьому множина чисел $\bar{\Gamma}^k$ $(k \in N)$ обмежена, то функція $u(\varphi)$ задовольняє умову Ліпшіця.

Покладемо

$$\Gamma_L^k = \frac{C^0\gamma H_1^0}{\gamma - 2KB^0} +$$
$$+\{B^0\Gamma_L^{k-1}\exp\{\alpha\Delta_*\} + \frac{2KC^0\beta}{\gamma - 2KB^0}\exp\{\alpha\Gamma^*\} +$$
$$+\eta\exp\{\alpha\Delta_*\}\}\,\frac{2K}{\gamma - \alpha}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

де

$$\Gamma_L^{-1} = 0, \quad H_1^0 = 2K^2p^0\frac{2\gamma^2 + \alpha\gamma - \alpha^2}{\alpha\gamma(\gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha)}.$$

Не становить особливих труднощів пересвідчитися у тому, що $\bar{\Gamma}^k < \Gamma_L^k$ при всіх $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, а обмеженість множини $\{\Gamma_L^k\}_{k=0}^\infty$ випливає з індуктивної рівності

$$\Gamma_L^{k+1} - \Gamma_L^k = \frac{2KB^0\exp\{\alpha\Delta_*\}}{\gamma - \alpha}(\Gamma_L^k - \Gamma_L^{k-1}),$$

оскільки за умовою третього твердження теореми стала $\frac{2KB^0\exp\{\alpha\Delta_*\}}{\gamma-\alpha}$ менша за одиницю. Теорему доведено.

Зауваження 1. Оберемо будь-яку функцію $\rho(\varphi) = (\rho_1(\varphi), \rho_2(\varphi), \ldots)$, що задовольняє наступні умови:

1) є 2π-періодичною відносно φ_i $\forall i \in N$;

2) на торі $\mathcal{T}_\infty$ задовольняє умову Гельдера з показником $\frac{\nu}{2(\nu+1)}$, де ν обрано так, як вказано раніше, і $\|\rho(\varphi)\| \le \frac{2KC^0}{\gamma}$.

Очевидно, такі функціїї існують (наприклад, ці властивості має кожна з функцій $u^k(\varphi)$ $(k \in N\bigcup\{0\})$. Поклавши у рівняння (4) замість $u^0(\varphi, t+\Delta)$ функцію $\rho(\varphi, t+\Delta)$, неважко переконатися, що твердження теореми, крім третього, залишаються в силі, причому функція $u(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи (1), при цьому не змінюється.

Дійсно, для всіх натуральних k справджується рівність $u^k(\varphi) = u^{k-1}(\varphi) + R_k(\varphi)$. Використовуючи функцію $\rho(\varphi, t+\Delta)$, одержимо відповідну послідовність $u_\rho^k(\varphi) = u^{k-1}(\varphi) + \bar{R}_k(\varphi)$, $k \in N$. Очевидно, що $\|u^k(\varphi) - u_\rho^k(\varphi)\| = \|R_k(\varphi) - \bar{R}_k(\varphi)\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Якщо ж функція $\rho(\varphi)$ є ліпшіцевою, то має місце і третє твердження теореми, причому функція $u(\varphi)$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ системи (1), при цьому теж не змінюється.

3^0. **Наслідки з теореми.** Припустимо, що про існування ФГС рівняння (2) нічого не відомо. Запишемо спочатку систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + c(\varphi, t), \qquad (7)$$

яка є частковим випадком системи (1) з нульовою матрицею $B(\varphi, t)$, і введемо позначення

$$\|u(\varphi)\|_0 = \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} \|u(\varphi)\|.$$

Достатні умови існування інваріантного тору системи (7) надає наступне твердження, в якому застосовано позначення $C_\varphi(\mathcal{T}_\infty)$ матричного простору, розглянутого у роботі [1].

Наслідок 1. *Нехай виконуються всі умови теореми, крім умов* $(\mathbf{\Gamma})$ *і умов, що стосуються матриці* $B(\varphi, t)$. *Якщо існує* *така матриця $\mathcal{P}(\varphi) \in C_\varphi(\mathcal{T}_\infty)$, що рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(\varphi_t(\varphi))x \tag{8}$$

має єдиний обмежений на всій числовій осі розв'язок $x = 0$ та ФГС, яка задовольняє нерівність (3), причому $\forall\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ справджуються оцінки

$$\|\mathcal{P}(\varphi) - \mathcal{P}(\bar{\varphi})\| \le p_1^0\|\varphi - \bar{\varphi}\|,$$

$$2K\|P(\varphi) - \mathcal{P}(\varphi)\|_0 < \gamma,$$

де p_1^0 — додатна стала, то система рівнянь (7) має гельдеровий інваріантний тор. При умові, що $2K\|P(\varphi)-\mathcal{P}(\varphi)\|_0+\alpha < \gamma$, інваріантний тор цього рівняння є ліпшіцевим на $\mathcal{T}_\infty$.

Доведення. Систему рівнянь (7) запишемо у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{P}(\varphi_t(\varphi))x(t) + \mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))x(t) + $$
$$+ c(\varphi, t), \tag{9}$$

де $\mathfrak{B}(\varphi) = P(\varphi) - \mathcal{P}(\varphi)$. Очевидно, що рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{P}(\varphi_t(\varphi))x + c(\varphi, t)$$

має інваріантний тор $\mathfrak{T}^0$, породжуюча функція якого $\mathfrak{u}^0(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Гельдера відносно φ.

Легко переконатися, що рівняння (9) є частковим випадком системи (1), в якій $\Delta_i = 0$, $\Gamma_{ij} = 0$ $\forall\{i,j\} \subset N$, матриця $\mathfrak{B}(\varphi)$ визначена на торі $\mathcal{T}_\infty$, причому $\forall\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ справджується нерівність $\|\mathfrak{B}(\varphi) - \mathfrak{B}(\bar{\varphi})\| \le \le (p^0 + p_1^0)\|\varphi - \bar{\varphi}\|$.

Тоді $\forall k \in N \bigcup\{0\}$ індуктивне рівняння виду (4)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{P}(\varphi_t(\varphi))x(t) +$$
$$+\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi)) + c(\varphi, t)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathfrak{T}^{k+1}$, породжений функцією

$$x = \mathfrak{u}^{k+1}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi)\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi, \tau)d\tau,$$

де $\mathfrak{c}^{k+1}(\varphi, t) = \mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi)) + c(\varphi, t)$, причому функція $\mathfrak{u}^k(\varphi)$ задовольняє умову Гельдера, а функцію $\mathfrak{u}^0(\varphi)$ означено вище.

Доведення рівномірної відносно $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ збіжності послідовності $\{\mathfrak{u}^k(\varphi)\}_{k=1}^\infty$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функціїї $\mathfrak{u}(\varphi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає гельдеровий інваріантний тор $\mathfrak{T}$ системи рівнянь (7), проводиться аналогічно до доведення теореми з незначними змінами. Зрозуміло, що при умові $\gamma > \alpha + +2K\|\mathfrak{B}(\varphi)\|_0$ цей тор є ліпшіцевим.

Звичайно, якщо за матрицю $\mathcal{P}(\varphi)$ взяти $(-E)$, де E — нескінченна одинична матриця, то умови наслідку 1 значно спрощуються. Сформулюємо їх у вигляді наступного твердження.

Наслідок 2. *Нехай виконуються всі умови теореми, крім умов* $(\mathbf{\Gamma})$ *і умов, що стосуються матриці $B(\varphi, t)$.*

Якщо при цьому справджується нерівність $\|P(\varphi)+E\|_0 < 1$, то система (7) має інваріантний тор $\mathfrak{T}$, породжуюча функція якого $\mathfrak{u}(\phi)$ задовольняє умову Гельдера на торі $\mathcal{T}_\infty$. При умові, що $\alpha < 1 - \|P(\varphi) + E\|_0$, функція $\mathfrak{u}(\varphi)$ є ліпшіцевою на цій множині.

Доведення випливає з обгрунтування наслідку 1, оскільки в цьому разі $\mathcal{P}(\varphi_t(\varphi)) = = -E$, рівняння виду (8) має ФГС, для якої у нерівності (3) $K = \gamma = 1$, і $\|\mathfrak{B}(\varphi)\|_0 < 1$.

Достатньо громіздкі індуктивні міркування $\forall k \in N$ і $\forall\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ приводять до оцінок:

$$\|\mathfrak{u}^0\| \le C^0,\ \|\mathfrak{u}^0(\varphi) - \mathfrak{u}^0(\bar{\varphi})\| \le K_\nu^1\|\varphi - \bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$\|\mathfrak{u}^k\| \le \frac{C^0}{1 - \|\mathfrak{B}\|_0};$$

$$\|\mathfrak{u}^k(\varphi) - \mathfrak{u}^k(\bar{\varphi})\| \le \left\{ K_\nu^1 \sum_{i=0}^{k} \frac{\|\mathfrak{B}\|_0^i}{(1 - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)})^i} + \right.$$

$$\left. + K_\nu^2 \frac{C^0}{1 - \|\mathfrak{B}\|_0} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\|\mathfrak{B}\|_0^i}{(1 - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)})^i} \right\} \times$$

$$\times\|\varphi-\bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \leq \left(K_\nu^1+\frac{K_\nu^2 C^0}{1-\|\mathfrak{B}\|_0}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{1-\frac{\|\mathfrak{B}\|_0}{1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}}\|\varphi-\bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де права частина останньої нерівності не залежить від $k \in N$,

$$K_\nu^1=\frac{K_\nu}{1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$K_\nu^2=\left\{2P^0\left[2(p^0)^\nu P^0\right]^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}},$$

а ν — довільне дійсне число, що задовольняє нерівність $\|\mathfrak{B}\|_0 < 1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}$. Останнє свідчить про гельдеровість інваріантного тору $\mathfrak{T}$ системи рівнянь (7).

Якщо ж $\alpha < 1-\|P(\varphi)+E\|_0$, то $\forall k \in N$ і $\forall\{\varphi,\bar{\varphi}\}\subset \mathcal{T}_\infty$ маємо, що

$$\|\mathfrak{u}^0(\varphi)-\mathfrak{u}^0(\bar{\varphi})\| \leq \bar{K}_\nu^1\|\varphi-\bar{\varphi}\|,$$

$$\|\mathfrak{u}^k(\varphi)-\mathfrak{u}^k(\bar{\varphi})\| \leq \left(\bar{K}_\nu^1+\frac{\bar{K}_\nu^2 C^0}{1-\|\mathfrak{B}\|_0}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{1-\frac{\|\mathfrak{B}\|_0}{1-\alpha}}\|\varphi-\bar{\varphi}\|,$$

де

$$\bar{K}_\nu^1=\frac{\eta\exp\{\alpha\Delta^*\}}{1-\alpha}, \quad \bar{K}_\nu^2=\frac{p^0}{1-\alpha},$$

що завершує доведення.

Наслідок 3. *Нехай виконуються всі умови теореми, крім умов* $(\mathbf{\Gamma})$. *Тоді справджуються такі твердження:*

1) якщо $B^0+\|P(\varphi)+E\|_0<1$, *то існує неперервна на* $\mathcal{T}_\infty$ *функція* $u(\varphi):\mathcal{T}_\infty\to\mathfrak{M}$, *що визначає інваріантний тор системи рівнянь (1);*

2) якщо $1>B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|P(\varphi)+E\|_0$, *то ця функція задовольняє умову Гельдера, тобто* $\forall\{\varphi,\bar{\varphi}\}\subset\mathcal{T}_\infty$

$$\|u(\varphi)-u(\bar{\varphi})\| \leq U\|\varphi-\bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $U=const>0$, *а* ν *— довільне дійсне число, що задовольняє нерівність*

$$1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)} > B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|P(\varphi)+E\|_0;$$

3) якщо $1>\alpha+B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|P(\varphi)+E\|_0$, *то ця функція задовольняє умову Ліпшиця на торі* $\mathcal{T}_\infty$.

Доведення. Систему рівнянь (1) запишемо у вигляді рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=-Ex(t)+\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))x(t)+$$

$$+B(\varphi,t)x(t+\Delta)+c(\varphi,t),$$

де $\mathfrak{B}(\varphi)=P(\varphi)+E$, E — одинична матриця.

Легко переконатися, що $\forall k \in N\bigcup\{0\}$ рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=-Ex(t)+\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi))+$$

$$+B(\varphi,t)\mathfrak{u}^k(\varphi,t+\Delta)+c(\varphi,t)$$

визначає в просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathfrak{T}^{k+1}$, породжений функцією

$$x=\mathfrak{u}^{k+1}(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0\ \mathfrak{c}^{k+1}(\varphi,\tau)d\tau,$$

де $\Omega_\tau^0=diag\{\exp\{\tau\},\exp\{\tau\},\ldots\}$ — діагональна матриця,

$$\mathfrak{c}^{k+1}(\phi,t)=\mathfrak{B}(\varphi_t(\varphi))\mathfrak{u}^k(\varphi_t(\varphi))+$$

$$+B(\varphi,t)\mathfrak{u}^k(\varphi,t+\Delta)+c(\varphi,t),$$

а $\mathfrak{u}^0(\varphi)$ визначено рівністю

$$\mathfrak{u}^0(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0\ c(\varphi,\tau)d\tau.$$

При цьому $\forall k\in N$ і $\forall\{\varphi,\bar{\varphi}\}\subset\mathcal{T}_\infty$ мають місце оцінки:

$$\|\mathfrak{u}^0\|\leq C^0,\ \|\mathfrak{u}^0(\varphi)-\mathfrak{u}^0(\bar{\varphi})\|\leq K_\nu^1\|\varphi-\bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$\|\mathfrak{u}^k\|\leq\frac{C^0}{1-(\|\mathfrak{B}\|_0+B^0)};$$

$$\|\mathfrak{u}^k(\varphi)-\mathfrak{u}^k(\bar\varphi)\|\le \breve\Gamma^k\|\varphi-\bar\varphi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де

$$\breve\Gamma^k=\{K_\nu+\breve\Gamma^{k-1}[B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|\mathfrak{B}\|_0]+$$
$$+\frac{C^0S_\nu}{1-(B^0+\|\mathfrak{B}\|_0)}+$$
$$+\frac{C^0\left\{2P^0[2P^0(p^0)^\nu]^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac12}}{1-(B^0+\|\mathfrak{B}\|_0)}\}\frac{1}{1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Обмеженість множини $\{\breve\Gamma^k\}_{k=0}^\infty$ випливає з індуктивної рівності

$$\breve\Gamma^{k+1}-\breve\Gamma^k=\frac{B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|\mathfrak{B}\|_0}{1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}\,(\breve\Gamma^k-\breve\Gamma^{k-1}),$$

оскільки за умовою другого твердження наслідку 3 стала $\frac{B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|\mathfrak{B}\|_0}{1-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}$ менша за одиницю.

Доведення рівномірної відносно $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ збіжності послідовності $\{\mathfrak{u}^k(\varphi)\}_{k=1}^\infty$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функції $\mathfrak{u}(\varphi):\mathcal{T}_\infty\to\mathfrak{M}$, що визначає гельдеровий інваріантний тор $\mathfrak{T}$ системи рівнянь (1), проводиться аналогічно до доведення теореми. Якщо ж виконується умова третього твердження наслідку 3, то $\forall k\in N$ і $\forall\{\varphi,\bar\varphi\}\subset\mathcal{T}_\infty$ індуктивні міркування приводять до нерівності

$$\|\mathfrak{u}^k(\varphi)-\mathfrak{u}^k(\bar\varphi)\|\le\hat\Gamma^k\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

де

$$\hat\Gamma^0=\frac{\eta\exp\{\alpha\Delta^*\}}{1-\alpha};$$
$$\hat\Gamma^k=\{\eta\exp\{\alpha\Delta^*\}+\hat\Gamma^{k-1}[B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+$$
$$+\|\mathfrak{B}\|_0]+\frac{C^0(p^0+\beta\exp\{\alpha\Gamma^*\})}{1-(B^0+\|\mathfrak{B}\|_0)}\}\frac{1}{1-\alpha}.$$

Обмеженість множини $\{\hat\Gamma^k\}_{k=0}^\infty$ випливає з індуктивної рівності

$$\hat\Gamma^{k+1}-\hat\Gamma^k=\frac{B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|\mathfrak{B}\|_0}{1-\alpha}\,(\hat\Gamma^k-\hat\Gamma^{k-1}),$$

оскільки за умовою третього твердження наслідку 3 стала $\frac{B^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\|\mathfrak{B}\|_0}{1-\alpha}$ менша за одиницю. Доведення наслідку 3 завершено.

Приклад 1. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi_i}{dt}=trig\ (\varphi_i+\varphi_{i+1});\\ \dfrac{dx_i}{dt}=\displaystyle\sum_{j=1}^\infty p_{ij}(\varphi)x_i(t)+\\ +\displaystyle\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{2^{j+2}}\,trig\left(\varphi_{s^{ij}{}_{t+c_{ij}}}(\varphi)\right)x_j(t+\Delta_j)+\\ +\,trig\ \left(\varphi_{s^i{}_{t+a_{is}}}(\varphi)+\varphi_{k^i{}_{t+a_{ik}}}(\varphi)\right),\end{cases}$$

де $i=1,2,3,\dots$, символом $trig$ позначено функції синус або косинус, s^{ij},s^i,k^i — довільні натуральні числа, серед яких може бути скільки завгодно однакових, c_{ij},a_{is},a_{ik}, Δ_j — довільні дійсні числа з обмеженого відрізку числової осі, серед яких також може бути скільки завгодно однакових; через $P(\varphi)$ позначено матрицю

$$\begin{pmatrix}-1&\frac{trig(\varphi_{12})}{4}&\frac{trig(\varphi_{13})}{8}&\frac{trig(\varphi_{14})}{16}&\dots\\ \frac{trig(\varphi_{21})}{4}&-1&\frac{trig(\varphi_{23})}{8}&\frac{trig(\varphi_{24})}{16}&\dots\\ \frac{trig(\varphi_{31})}{4}&\frac{trig(\varphi_{32})}{8}&-1&\frac{trig(\varphi_{34})}{16}&\dots\\ \frac{trig(\varphi_{41})}{4}&\frac{trig(\varphi_{42})}{8}&\frac{trig(\varphi_{43})}{16}&-1&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix},$$

а символом φ_{sl}, $\{s,l\}\subset N$ позначено будь-яку координату φ_i вектора φ.

Очевидно, що $\|P(\varphi)+E\|_0=\frac12$, коефіцієнт Ліпшіця α функції $a(\varphi)$ дорівнює 2, $\|B(\varphi,t)\|\le B^0=\frac14$. При цьому

$$B^0+\|P(\varphi)++E\|_0=\frac14+\frac12<1,$$

тобто за умовами наслідку 3 в просторі $\mathfrak{M}$ існує неперервний на $\mathcal{T}_\infty$ інваріантний тор заданої системи рівнянь. Легко перевірити, що при виконанні нерівності $\Delta_*<\frac{\ln 2}{2}$ цей тор задовольняє умову Гельдера, а третя умова наслідку 3 взагалі виконуватися не може, тобто ліпшіцевість інваріантного тору не гарантована. Якщо перше рівняння вихідної системи замінити на $\frac{d\varphi_i}{dt}=\frac{1}{16}\,trig\ (\varphi_i+\varphi_{i+1})$ і накласти умову $\Delta_*<8\ln\frac32$, то $\alpha=\frac18$ і третя умова наслідку 3 виконується, тобто інваріантний тор одержаної системи є ліпшіцевим на $\mathcal{T}_\infty$.

Цей приклад свідчить про несуперечливість умов теореми та наслідків з неї. Зрозуміло, що аналітичний вираз породжуючої інваріантний тор функції записати важко.

На завершення вкажемо на те, що одержані результати є новими і для випадку, коли задані системи рівнянь розглядаються у скінченновимірному просторі і визначені на скінченновимірних торах. У цьому разі часто вдається знайти аналітичні вирази функцій, породжуючих інваріантні тори цих рівнянь, про що свідчить наступний приклад.

Приклад 2. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt}=1;\ \dfrac{d\varphi_2}{dt}=1;\\ \dfrac{dx_1(t)}{dt}=-x_1(t)+\dfrac{1}{4}\,x_2(t-1)+\\ +\sin(\varphi_{1_{t+2}}(\varphi));\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-x_2(t)+\dfrac{1}{4}\,x_1(t+1)+\\ +\cos(\varphi_{2_{t-2}}(\varphi)),\end{cases}$$

де $\varphi_{1_t}(\varphi)=t+\varphi_1$, $\varphi_{2_t}(\varphi)=t+\varphi_2$, $\{\varphi_1,\varphi_2\}\subset\subset\mathcal{T}_2$, і запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=-x_1(t)+\dfrac{1}{4}\,x_2(t-1)+\\ +\sin(t+2+\varphi_1);\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-x_2(t)+\dfrac{1}{4}\,x_1(t+1)+\\ +\cos(t-2+\varphi_2).\end{cases}$$

Очевидно, що в просторі R^2 ця система рівнянь визначає неперервний інваріантний тор. Знайдемо породжуючу його функцію, побудувавши послідовність $\{u^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$. Цей процес вимагає громіздких обчислень, тому наведемо тут лише його схему. Отже, маємо:

$$u^0(\varphi)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix} e^{\tau} & 0\\ 0 & e^{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(\tau+2+\varphi_1)\\ \cos(\tau-2+\varphi_2)\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin(2+\varphi_1)-\cos(2+\varphi_1)\\ \sin(-2+\varphi_2)+\cos(-2+\varphi_2)\end{pmatrix};$$

$$c^1(\varphi,t)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^0(\varphi_{t+1}(\varphi))\\ u_2^0(\varphi_{t-1}(\varphi))\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\sin(t+2+\varphi_1)\\ \cos(t-2+\varphi_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sin(t+2+\varphi_1)\\ \cos(t-2+\varphi_2)\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{8}\begin{pmatrix}\sin(-3+t+\varphi_2)+\cos(t-3+\varphi_2)\\ \sin(3+t+\varphi_1)-\cos(t+3+\varphi_1)\end{pmatrix};$$

$$u^1(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix}e^{\tau} & 0\\ 0 & e^{\tau}\end{pmatrix}c^1(\varphi,\tau)d\tau=$$

$$=u^0(\varphi)+\frac{1}{8}\begin{pmatrix}\sin(-3+\varphi_2)\\ -\cos(3+\varphi_1)\end{pmatrix}.$$

Продовжуючи аналогічні розрахунки, одержуємо:

$$u^2(\varphi)=u^1(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{64}\begin{pmatrix}-\sin(2+\varphi_1)-\cos(2+\varphi_1)\\ \sin(-2+\varphi_2)-\cos(-2+\varphi_2)\end{pmatrix};$$

$$u^3(\varphi)=u^2(\varphi)+\frac{1}{256}\begin{pmatrix}-\cos(-3+\varphi_2)\\ -\sin(3+\varphi_1)\end{pmatrix};$$

$$u^4(\varphi)=u^3(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2^{11}}\begin{pmatrix}-\sin(2+\varphi_1)+\cos(2+\varphi_1)\\ -\sin(-2+\varphi_2)-\cos(-2+\varphi_2)\end{pmatrix};$$

$$u^5(\varphi)=u^4(\varphi)+\frac{1}{2^{13}}\begin{pmatrix}-\sin(-3+\varphi_2)\\ \cos(3+\varphi_1)\end{pmatrix};$$

$$u^6(\varphi)=u^5(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2^{16}}\begin{pmatrix}\sin(2+\varphi_1)+\cos(2+\varphi_1)\\ -\sin(-2+\varphi_2)+\cos(-2+\varphi_2)\end{pmatrix};$$

$$u^7(\varphi) = u^6(\varphi) + \frac{1}{2^{18}} \begin{pmatrix} \cos(-3+\varphi_2) \\ \sin(3+\varphi_1) \end{pmatrix};$$

$$u^8(\varphi) = u^7(\varphi) +$$

$$+\frac{1}{2^{21}} \begin{pmatrix} \sin(2+\varphi_1) - \cos(2+\varphi_1) \\ \sin(-2+\varphi_2) + \cos(-2+\varphi_2) \end{pmatrix};$$

$$u^9(\varphi) = u^8(\varphi) + \frac{1}{2^{23}} \begin{pmatrix} \sin(-3+\varphi_2) \\ -\cos(3+\varphi_1) \end{pmatrix}$$

і так далі. У послідовності $\{u^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$ легко помітити закономірність, використавши яку приходимо до рівності

$$u(\varphi) = \frac{2^{19}-2^9}{2^{20}-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin(2+\varphi_1) - \cos(2+\varphi_1) \\ \sin(-2+\varphi_2) + \cos(-2+\varphi_2) \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{2^{17}-2^7}{2^{20}-1} \begin{pmatrix} \sin(-3+\varphi_2) \\ -\cos(3+\varphi_1) \end{pmatrix} + \frac{2^{14}-2^4}{2^{20}-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\sin(2+\varphi_1) - \cos(2+\varphi_1) \\ \sin(-2+\varphi_2) - \cos(-2+\varphi_2) \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{2^{12}-2^2}{2^{20}-1} \begin{pmatrix} -\cos(-3+\varphi_2) \\ -\sin(3+\varphi_1) \end{pmatrix},$$

або остаточно

$$u(\varphi) = \frac{1}{2^{20}-1} \times$$

$$\times \left\{ 2^9 \begin{pmatrix} \sin(2+\varphi_1) - \cos(2+\varphi_1) \\ \sin(-2+\varphi_2) + \cos(-2+\varphi_2) \end{pmatrix} + \right.$$

$$+2^7 \begin{pmatrix} \sin(-3+\varphi_2) \\ -\cos(3+\varphi_1) \end{pmatrix} +$$

$$+2^4 \begin{pmatrix} -\sin(2+\varphi_1) - \cos(2+\varphi_1) \\ \sin(-2+\varphi_2) - \cos(-2+\varphi_2) \end{pmatrix} +$$

$$\left. +2^2 \begin{pmatrix} -\cos(-3+\varphi_2) \\ -\sin(3+\varphi_1) \end{pmatrix} \right\}.$$

Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція дійсно визначає ліпшицевий інваріантний тор заданої системи рівнянь.

Оберемо тепер замість $u^0(\varphi)$ іншу функцію

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

і аналогічно до попереднього побудуємо відповідну послідовність $\{u_\rho^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$. З послідовністю $\{u^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$ вона пов'язана так:

$$u_\rho^1(\varphi) = u^0(\varphi) +$$

$$+\frac{1}{8} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2-1) + \cos(\varphi_2-1) \\ \sin(\varphi_1+1) - \cos(\varphi_1+1) \end{pmatrix};$$

$$u_\rho^2(\varphi) = u^1(\varphi) + \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix};$$

$$u_\rho^3(\varphi) = u^2(\varphi) +$$

$$+\frac{1}{2^8} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_2-1) - \cos(\varphi_2-1) \\ -\sin(\varphi_1+1) - \cos(\varphi_1+1) \end{pmatrix}$$

і так далі. Легко побачити, що $\forall k \in N$ функції $u_\rho^k(\varphi)$ і $u^k(\varphi)$ відрізняються лише останніми доданками в правих частинах рівностей, що їх зображують. Позначимо ці доданки через R_k та $\bar{R}_k$ відповідно. Оскільки $\|R_k - \bar{R}_k\| \to 0$ при $k \to \infty$, то послідовність $\{u_\rho^k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty}$ теж прямує до функції $u(\varphi)$ при $k \to \infty$, що ілюструє наведене вище зауваження 1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пасюк К.В.* Про існування ліпшіцевих інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь, що містять нескінченну кількість відхилень скалярного аргументу // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. — Випуск 421.— С. 75 - 79.

2. *Самойленко А.М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. — Т. I: Аналитические методы. — Киев: ИМ АНУССР, 1970. — С. 495 - 499.

3. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.* Счётные системы дифференциальных уравнений.— Киев: Издательство Института математики НАН Украины, 1993. — 308 с.

4. *Samoilenko A.M., Teplinskiy Yu.V.* Countable Systems of Differential Equations.—VSP, Utrecht-Boston, 2003. — 287 p.

5. *Самойленко А.М., Теплінський Ю.В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. — Київ: Видавництво Інституту математики НАН України, 2008. — 496 с.