УДК 517.9

©2009 р. О. Ю. Теплінський

Інститут математики НАН України

ПОГЛИНАЮЧИЙ ПОЯС ДЛЯ КВАЗІПЕРІОДИЧНО КЕРОВАНОГО ЗСУВУ ЗЛІЧЕННОЇ КІЛЬКОСТІ ВІДРІЗКІВ НА ПРЯМІЙ

Розглянуто динамічну систему з дискретним часом на двовимірному циліндрі, породжену квазіперіодично керованим відображенням зсуву зліченної кількості відрізків зі сталим перекриттям. Доведено існування та єдиність інваріантного граничного поясу, який поглинає всі траєкторії системи; вивчено його властивості.

A discrete-time dynamical system on the two-dimensional cylinder generated by a quasiperiodically driven translation of countable number of intervals with constant overlapping is considered. The existence and uniqueness of an invariant limiting belt that absorbs all trajectories in the system is proven; the properties of this belt are shown.

1^0 **. Основні поняття і результат.** Зсув відрізків — це розривне відображення певного, скінченного чи нескінченного, проміжку дійсної прямої $\mathbb{R}$ в себе, яке полягає в його розбитті на скінченну кількість підпроміжків і жорсткому зсуві кожного з них на певну відстань. Інакше кажучи, це є одновимірне кусково-афінне відображення таке, що кутовий коефіцієнт кожного з його афінних кусків дорівнює 1. Зсув відрізків є природним узагальненням *перекладання відрізків* — добре вивченого класу відображень, що породжує одновимірні динамічні системи з нетривіальними ергодичними властивостями [1]. Динамічні властивості інтервальних зсувів є ще більш складними, і навіть питання про геометрію їхніх граничних множин в загальному вигляді є зовсім нетривіальним [2]. В огляді [3] ми обгрунтували важливість дослідження динаміки інтервальних зсувів і пов'язаних із ними відображень для прикладних задач, які походять з сучасної радіоелектроніки, зокрема вивчення цифрових телекомунікаційних систем таких як мобільний телефонний зв'язок. В недавній роботі [4] ми дослідили динаміку квазіперіодично керованого зсуву двох інтервалів дійсної прямої зі змінною величиною перекриття. У теперішній статті буде розглянуто випадок зсуву зліченної кількості проміжків, але величину перекриття ми припускатимемо сталою, тобто незалежною від квазіперіодично змінного параметру керування.

Отже, нехай на дійсній прямій $\mathbb{R}$ задано спадну двосторонню послідовність точок σ_k, $k \in \mathbb{Z}$, розріджену відповідно до нерівності

$$\sigma_k - \sigma_{k+1} \geq d \tag{1}$$

з фіксованою сталою $d > 0$ (вона і буде величиною перекриття), та однопараметричну сім'ю інтервальних зсувів $\Phi_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з параметром θ, який пробігає коло одиничної довжини $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, задану рівностями

$$\Phi_\theta(x) = x + s_k(\theta) \text{ для } x \in I_k, \tag{2}$$

де $I_k = (\sigma_{k+1}, \sigma_k]$ — це власне проміжки, на які розбито $\mathbb{R}$ точками σ_k, а величини зсувів $s_k(\theta)$ є неперервними функціями на колі $\mathbb{S}$, пов'язані між собою співвідношеннями

$$s_{k+1}(\theta) - s_k(\theta) = d.$$

Зауважимо, що величина перекриття d входить до (1) недарма: ця нерівність унеможливлює перекриття образів проміжків, що не є сусідніми. Позначивши $\nu = \int_0^1 s_0(\theta)d\theta$, $f(\theta) = s_0(\theta) - \nu$, перепишемо (2) у вигляді

$$\Phi_\theta(x) = x + \nu + f(\theta) + kd \text{ для } x \in I_k. \tag{3}$$

Зауважимо очевидну нерівність

$$\Phi_\theta(x_2) - \Phi_\theta(x_1) \le x_2 - x_1 \text{ для всіх } x_1 \le x_2. \tag{4}$$

Предметом розгляду цієї статті є трикутне відображення

$$F : (\theta, x) \mapsto (T\theta, \Phi_{T\theta}(x)) \tag{5}$$

на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$, де однопараметрична сім'я інтервальних зсувів Φ_θ, $\theta \in \mathbb{S}$, задається формулою (3), а базове відображення T є лінійним поворотом кола на ірраціональне число $\rho \in (0,1)$:

$$T : \theta \mapsto \theta + \rho,$$

або ж довільним гомеоморфізмом кола з ірраціональним числом обертання, який є топологічно спряженим із лінійним (в останньому випадку всі інтеграли по колу $\mathbb{S}$, які фігурують у статті, повинні братися не за мірою Лебега, а за імовірнісною інваріантною мірою, що відповідає гомеоморфізму T).

Називатимемо *контуром* на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ графік будь-якої обмеженої функції з $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}$ (оскільки це не призводить до плутанини, контур і відповідна функція позначатимуться однаково). Для двох даних контурів $L \le U$ на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ множину точок, що лежать між ними, будемо називати *поясом* з *межами* L та U. В даній статті будуть розглядатися піввідкриті пояси вигляду

$$(L,U] = \{(\theta,x) | L(\theta) < x \le U(\theta), \theta\in\mathbb{S}\}.$$

Виходячи з функції Φ_θ, означимо її *верхню зрізку* $\hat\Phi_\theta(x)$ та *нижню зрізку* $\check\Phi_\theta(x)$ для $x\in\mathbb{R}$, $\theta\in\mathbb{S}$ наступним чином:

$$\hat\Phi_\theta(x) = \sup_{y\in(-\infty,x]} \Phi_\theta(y),$$

$$\check\Phi_\theta(x) = \inf_{y\in[x,+\infty)} \Phi_\theta(y).$$

Це означення є коректним внаслідок нерівності (1), оскільки з неї випливають такі властивості:

$$x \le \sigma_k \;\;\Rightarrow\;\; \Phi_\theta(x) \le \Phi_\theta(\sigma_k); \tag{6}$$
$$x > \sigma_k \;\;\Rightarrow\;\; \Phi_\theta(x) > \Phi_\theta(\sigma_k+0). \tag{7}$$

Теорема 1. *Щодо відображення (5) припустимо, що число* ν/d *не є цілим, функція* $f:\mathbb{S}\to\mathbb{R}$ *неперервна,* $\int_{\mathbb{S}} f(\theta)d\theta = 0$, *і виконуються нерівності (1). Тоді існує єдиний пояс* $B_{\rm a} = (L_{\rm a}, U_{\rm a}]$ *з неперервними межами, що є інваріантним відносно* F *у сенсі* $F(B_{\rm a}) = B_{\rm a}$. *Цей пояс має наступні властивості:*

1) його межі $U_{\rm a}$ *та* $L_{\rm a}$ *є неперервними контурами, що задовольняють функціональні рівняння*

$$U_{\rm a}(\theta) = \hat\Phi_\theta(U_{\rm a}(T^{-1}\theta)), \tag{8}$$
$$L_{\rm a}(\theta) = \check\Phi_\theta(L_{\rm a}(T^{-1}\theta)) \tag{9}$$

для всіх $\theta\in\mathbb{S}$.

2) його ширина є сталою:

$$\Delta_{\rm a}(\theta) = U_{\rm a}(\theta) - L_{\rm a}(\theta) \equiv d;$$

3) він поглинає всі траєкторії в динамічній системі рівномірно на обмежених множинах початкових даних, тобто для кожного $C>0$ *існує таке натуральне* $N=N(C)$, *що з нерівності* $|x_0|\le C$ *випливає належність* $F^n(\theta_0,x_0)\in B_{\rm a}$ *для всіх* $n\ge N$, $\theta_0\in\mathbb{S}$;

4) його межі задовольняють оцінку

$$\sigma_{k^*} \le L_{\rm a} < U_{\rm a} = L_{\rm a} + d \le \sigma_{k_*},$$

де

$$k_* = [-(\nu + \max_{\theta\in\mathbb{S}} f(\theta))/d], \tag{10}$$
$$k^* = -[(\nu + \min_{\theta\in\mathbb{S}} f(\theta))/d] + 1. \tag{11}$$

5) динаміка траєкторій всередині поясу $B_{\rm a}$, *якщо його зімкнути шляхом ототожнення для кожного* $\theta\in\mathbb{S}$ *відповідних точок його меж* $(\theta, U_{\rm a}(\theta))$ *та* $(\theta, L_{\rm a}(\theta))$ *у двовимірний тор розміру* $1\times d$, *є певним косим зсувом на одержаному торі.*

2^0. Доведення теореми 1.

Спочатку звернемо увагу на деякі властивості визначених вище зрізок $\hat\Phi_\theta$ та $\check\Phi_\theta$. Ці функції неважко виразити у явному вигляді:

$$\hat\Phi_\theta(x) = \begin{cases} x + \nu + f(\theta) + kd \\ \qquad \text{для } x \in [\sigma_{k+1}+d, \sigma_k], \\ \sigma_k + \nu + f(\theta) + kd \\ \qquad \text{для } x\in[\sigma_k, \sigma_k + d]; \end{cases} \tag{12}$$

$$\check{\Phi}_\theta(x) = \begin{cases} x + \nu + f(\theta) + kd \\ \qquad \text{для } x \in [\sigma_{k+1}, \sigma_k - d], \\ \sigma_k + \nu + f(\theta) + kd - d \\ \qquad \text{для } x \in [\sigma_k - d, \sigma_k]; \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, що вирази $\hat{\Phi}_\theta(x)$ та $\check{\Phi}_\theta(x)$ є неперервними за двома змінними $(\theta, x) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$; причому для кожного фіксованого $\theta \in \mathbb{S}$ функції $\hat{\Phi}_\theta$ та $\check{\Phi}_\theta$ є кусково-лінійними, складаючись з кусків нахилу 1 та нахилу 0 почергово, а отже, задовольняють умови неспадання та нерозтягнення

$$\begin{gathered} 0 \le \hat{\Phi}_\theta(x_2) - \hat{\Phi}_\theta(x_1) \le x_2 - x_1, \\ 0 \le \check{\Phi}_\theta(x_2) - \check{\Phi}_\theta(x_1) \le x_2 - x_1 \\ \text{для всіх } x_1 \le x_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Легко переконатися, що з (12) та (13) для довільного $\theta \in \mathbb{S}$ випливають нерівності

$$\begin{gathered} \hat{\Phi}_\theta(x) - d \le \Phi_\theta(x) \le \hat{\Phi}_\theta(x), \\ \check{\Phi}_\theta(x) \le \Phi_\theta(x) \le \check{\Phi}_\theta(x) + d \\ \text{для всіх } x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{15}$$

а також симетрична тотожність

$$\hat{\Phi}_\theta(x+d) = \check{\Phi}_\theta(x) + d \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Виходячи з означень (10) та (11) легко переконатися, що $k_* < k^*$. Отже, розглянемо пояс $B_0 = \mathbb{S} \times (\sigma_{k^*}, \sigma_{k_*}]$. Його ширина $\sigma_{k_*} - \sigma_{k^*} \ge d$ згідно з (1).

Лема 1. *Для довільного поясу $B = (L, U] \subset B_0$ ширини $U - L \ge d$, його образ $F(B)$ також є поясом $B' = (L', U'] \subset B_0$ ширини $U' - L' \ge d$. Межі поясу B' задовольняють рівняння*

$$U'(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U(T^{-1}\theta)), \tag{17}$$

$$L'(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L(T^{-1}\theta)) \tag{18}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Якщо контури L та U неперервні, то L' та U' також неперервні.

Доведення леми 1. Спочатку покажемо, що $F(B_0) \subset B_0$. З рівностей (10) та (11) випливає, що $\nu + \min f + (k^* - 1)d \ge 0$, $\nu + \max f + k_* d \le 0$, а отже, проміжок I_{k^*-1} посувається під дією Φ_θ на недодатну величину (тобто ліворуч або не рухається), а проміжок I_{k_*} — на невід'ємну величину (тобто праворуч або не рухається). Оскільки це має місце для кожного $\theta \in \mathbb{S}$, то, враховуючи (6), (7), дістаємо, що дійсно $F(B_0) \subset B_0$.

Розглянемо довільне $\theta \in \mathbb{S}$. Проміжок $(L(T^{-1}\theta), U(T^{-1}\theta)]$ покриває кілька послідовних точок розриву σ_k, $k_1 \le k \le k_2$, (можливо, не покриває жодної), а отже, поділяється ними на декілька підпроміжків, що зсуваються жорстко під дією Φ_θ на різні відстані. З нерівності (1) та умови $U - L \ge d$ випливає, що спільна довжина будь-яких двох сусідніх таких підпроміжків є не меншою за d. Оскільки ці два сусідні підпроміжки дія Φ_θ зсуває один відносно одного назустріч на величину d, то між їхніми образами не може утворитися щілини, а тому їхнє об'єднання є (піввідкритим) проміжком довжини не меншої за d. Оскільки це вірно для кожної пари сусідніх підпроміжків, то це вірно і для усього їхнього набору вцілому, отже

$$F\Big(\{T^{-1}\theta\} \times \big(L(T^{-1}\theta), U(T^{-1}\theta)\big]\Big) = \\ = \{\theta\} \times \big(L'(\theta), U'(\theta)\big]$$

для певних значень $U'(\theta)$, $L'(\theta)$ таких, що $U'(\theta) - L'(\theta) \ge d$. Рівняння (17) та (18) випливають з означень верхньої та нижньої зрізок $\hat{\Phi}_\theta$ та $\check{\Phi}_\theta$. Твердження щодо неперервності випливає з рівнянь (17), (18) та неперервності $\hat{\Phi}_\theta(x)$ і $\check{\Phi}_\theta(x)$ за двома змінними. Лему доведено.

З леми 1 випливає (шляхом простої індукції за $n \ge 1$), що рекурентна формула $B_n = F(B_{n-1})$ з базою B_0 генерує послідовність $B_n = (L_n, U_n]$, $n \ge 0$, поясів з неперервними межами, які є послідовно вкладеними один в один: $B_n \subset B_{n-1}$, $n \ge 1$, причому межові контури поясів задовольняють для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ співвідношення

$$U_n(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U_{n-1}(T^{-1}\theta)), \tag{19}$$

$$L_n(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_{n-1}(T^{-1}\theta)) \tag{20}$$

і обмеження знизу на ширину

$$\Delta_n(\theta) = U_n(\theta) - L_n(\theta) \ge d. \tag{21}$$

Монотонні обмежені послідовності контурів $U_n \downarrow$, $n \ge 0$, та $L_n \uparrow$, $n \ge 0$, мають поточкові границі — контури U_{a} та L_{a} відповідно. Таким чином побудовано граничний пояс $B_{\text{a}} = (L_{\text{a}}, U_{\text{a}}] \subset B_0$. Граничний перехід у (19), (20) та (21) дає для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ рівності

$$U_{\text{a}}(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U_{\text{a}}(T^{-1}\theta)), \qquad (22)$$
$$L_{\text{a}}(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)) \qquad (23)$$

та оцінку знизу на ширину

$$\Delta_{\text{a}}(\theta) = U_{\text{a}}(\theta) - L_{\text{a}}(\theta) \geq d.$$

Згідно з лемою 1, з тотожностей (22), (23) випливає, що $F(B_{\text{a}}) = B_{\text{a}}$ тобто пояс B_{a} є інваріантним. Доведемо неперервність його меж. Стрибок функції U_{a} в точці θ — це значення границі

$$\operatorname{jmp} U_{\text{a}}(\theta) = \limsup_{\theta_1,\theta_2\to\theta} (U_{\text{a}}(\theta_2) - U_{\text{a}}(\theta_1)).$$

Нехай $\inf U_{\text{a}} = \inf_{\theta\in\mathbb{S}} U_{\text{a}}(\theta)$. Для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдуться $n \geq 1$ та $\theta_* \in \mathbb{S}$ такі, що $U_n(\theta_*) < \inf U_{\text{a}} + \varepsilon$. Оскільки контур U_n неперервний, існує певний (відкритий) окіл $I \subset \mathbb{S}$ точки θ_* такий, що $U_n(\theta) < \inf U_{\text{a}} + \varepsilon$ для всіх $\theta \in I$. Таким чином, маємо $\inf U_{\text{a}} \leq U_{\text{a}}(\theta) < \inf U_{\text{a}} + \varepsilon$, і отже $\operatorname{jmp} U_{\text{a}}(\theta) \leq \varepsilon$ для всіх $\theta \in I$. З (22) та (14) випливає, що $\operatorname{jmp} U_{\text{a}}(T\theta) \leq \operatorname{jmp} U_{\text{a}}(\theta)$ для кожного $\theta \in \mathbb{S}$. Внаслідок властивостей відображення T, множина точок $\{T^m\theta \,|\, m \geq 0, \theta \in I\}$ являє собою суцільне коло $\mathbb{S}$. Отже, $\operatorname{jmp} U_{\text{a}}(\theta) \leq \varepsilon$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Але $\varepsilon > 0$ ми взяли довільне, тому насправді $\operatorname{jmp} U_{\text{a}}(\theta) \equiv 0$, тобто контур U_{a} неперервний. Неперервність контуру L_{a} доводиться аналогічно.

Послідовно застосувавши (22), (23), (16) та (14), одержимо

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{a}}(\theta) &= \hat{\Phi}_\theta(U_{\text{a}}(T^{-1}\theta)) - \check{\Phi}_\theta(L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)) = \\ &= d + \check{\Phi}_\theta(U_{\text{a}}(T^{-1}\theta) - d) - \check{\Phi}_\theta(L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)) \leq \\ &\leq \Delta_{\text{a}}(T^{-1}\theta) \qquad (24)\end{aligned}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Нехай $\theta^* \in \mathbb{S}$ — це точка максимуму (неперервної та обмеженої) функції Δ_{a}. Внаслідок нерівності (24), маємо $\Delta_{\text{a}}(T^{-m}\theta^*) = \max_{\theta\in\mathbb{S}} \Delta_{\text{a}}(\theta) = \Delta(\theta*)$ для всіх $m \geq 0$. Оскільки множина точок $\{T^{-m}\theta^* | m \geq 0\}$ є щільною в $\mathbb{S}$, то ширина Δ_{a} поясу B_{a} є сталою.

З цього факту випливає, що нерівність (24) насправді є рівністю, отже

$$\begin{aligned}&\check{\Phi}_\theta(U_{\text{a}}(T^{-1}\theta) - d) - \check{\Phi}_\theta(L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)) = \\ &\qquad = (U_{\text{a}}(T^{-1}\theta) - d) - L_{\text{a}}(T^{-1}\theta) \qquad (25)\end{aligned}$$

для кожного $\theta \in \mathbb{S}$. Якщо ми на мить припустимо, що $\Delta_{\text{a}} > d$, тоді для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ матимемо $U_{\text{a}}(T^{-1}\theta) - d > L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)$, і з огляду на (13) рівність (25) може виконуватися лише в тому разі, якщо обидві величини $U_{\text{a}}(T^{-1}\theta) - d$ та $L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)$ належать одному й тому ж самому лінійному кускові функції $\check{\Phi}_\theta$ з нахилом 1. Внаслідок неперервності $\check{\Phi}_\theta$, U_{a} та L_{a} за θ, цей лінійний кусок є одним і тим самим для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, отже $L_{\text{a}}(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_{\text{a}}(T^{-1}\theta)) = L_{\text{a}}(T^{-1}\theta) + \nu + f(\theta) + kd$ з одним і тим самим k для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Проінтегрувавши останню рівність по $\mathbb{S}$, одержимо $\nu + kd = 0$, що протирічить припущенню теореми про нецілість ν/d. Це протиріччя доводить, що $\Delta_{\text{a}} = d$ на всьому колі, тобто

$$U_{\text{a}}(\theta) = L_{\text{a}}(\theta) + d, \quad \theta \in \mathbb{S}. \qquad (26)$$

Тепер покажемо, що інваріантний пояс B_{a} рівномірно поглинає усі траєкторії з поясу B_0, тобто існує таке натуральне N_0, що кожна траєкторія з початковою точкою в B_0 за не більше ніж N_0 кроків потрапить до B_{a}. Для цього розглянемо динаміку траєкторій відносно меж B_{a}. Першим чином зауважимо, що якби жодна з ліній розриву $\mathbb{S} \times \{\sigma_k\}$ не перетинала внутрішність поясу B_{a}, то з (23) та (13) випливало б, що $L_{\text{a}}(\theta) = L_{\text{a}}(T^{-1}\theta) + \nu + f(\theta) + kd$ з одним і тим самим k для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, неможливість чого було нами доведено в попередньому абзаці. Отже, існує k_0 та замкнений відрізок $I_0 \subset \mathbb{S}$ ненульової довжини такий, що $\sigma_{k_0} \in \big(L_{\text{a}}(\theta), L_{\text{a}}(\theta) + d\big)$ для всіх $\theta \in I_0$. Згідно з (1), жодна з інших точок розриву, відмінних від σ_{k_0}, відрізку $[L_{\text{a}}(\theta), U_{\text{a}}(\theta)]$ для $\theta \in I_0$ належати не може. Позначимо $d_0 = \min_{\theta\in I_0}\{\sigma_{k_0} - L_{\text{a}}(\theta), U_{\text{a}}(\theta) - \sigma_{k_0}\} > 0$.

Нехай $x \le L_{\mathrm{a}}(\theta)$ для деякого $\theta \in \mathbb{S}$. Послідовне застосування (26), (15), (23) та (14) дає $U_{\mathrm{a}}(T\theta) - \Phi_{T\theta}(x) = L_{\mathrm{a}}(T\theta) - (\Phi_{T\theta}(x) - d) \ge L_{\mathrm{a}}(T\theta) - \check{\Phi}_{T\theta}(x) = \check{\Phi}_{T\theta}(L_{\mathrm{a}}(\theta)) - \check{\Phi}_{T\theta}(x) \ge 0$. З іншого боку, зі вказаних формул випливає, що $U_{\mathrm{a}}(T\theta) - \Phi_{T\theta}(x) = d + L_{\mathrm{a}}(T\theta) - \Phi_{T\theta}(x) \le d + \check{\Phi}_{T\theta}(L_{\mathrm{a}}(\theta)) - \check{\Phi}_{T\theta}(x) \le d + L_{\mathrm{a}}(\theta) - x = U_{\mathrm{a}}(\theta) - x$. В підсумку маємо: $0 \le U_{\mathrm{a}}(T\theta) - \Phi_{T\theta}(x) \le U_{\mathrm{a}}(\theta) - x$, а це означає, що якщо точка (θ, x) лежить лівіше за інваріантний пояс B_{a}, то її образ $F(\theta, x) = (T\theta, \Phi_{T\theta}(x))$ не може ані віддалитися від B_{a}, ані перестрибнути через нього праворуч.

Нехай тепер $x \le L_{\mathrm{a}}(\theta)$ для деякого $\theta \in I_0$. Згідно з (23) та (13), маємо $L_{\mathrm{a}}(T\theta) = \check{\Phi}_{T\theta}(L_{\mathrm{a}}(\theta)) = \sigma_{k_0} + \nu + f(T\theta) + k_0 d - d = \Phi_{T\theta}(\sigma_{k_0}) - d$. Тому, враховуючи, що $x \le L_{\mathrm{a}}(\theta) < \sigma_{k_0}$, внаслідок (4) отримуємо нерівність $L_{\mathrm{a}}(T\theta) - \Phi_{T\theta}(x) = \Phi_{T\theta}(\sigma_{k_0}) - \Phi_{T\theta}(x) - d \le \sigma_{k_0} - x - d = (L_{\mathrm{a}}(\theta) - x) - (U_{\mathrm{a}}(\theta) - \sigma_{k_0}) \le (L_{\mathrm{a}}(\theta) - x) - d_0$, яка означає, що якщо точка (θ, x) лежить лівіше за інваріантний пояс B_{a}, причому $\theta \in I_0$, то її образ $F(\theta, x) = (T\theta, \Phi_{T\theta}(x))$ або потрапляє до B_{a}, або наближається до нього принаймні на $d_0 > 0$.

Аналогічні міркування доводять, що якщо точка (θ, x) лежить правіше за B_{a}, то її образ $F(\theta, x)$ не може ані віддалитися від B_{a}, ані перестрибнути через нього ліворуч, а якщо додатково відомо, що $\theta \in I_0$, то цей образ або потрапляє до B_{a}, або наближається до нього принаймні на $d_0 > 0$.

Внаслідок властивостей відображення T існує таке $m_0 \ge 1$, що $\bigcup_{m=1}^{m_0}(T^{-m} I_0) = \mathbb{S}$, отже серед кожних послідовних m_0 точок довільної траєкторії знайдеться принаймні одна, θ-координата якої належить відрізку I_0. Тому протягом m_0 послідовних кроків будь-яка траєкторія на циліндрі $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ або потрапить до інваріантного поясу B_{a}, або наблизиться до нього принаймні на величину $d_0 > 0$. Отже, за $N_0 = ([(\sigma_{k_*} - \sigma_{k^*})/d_0] + 1)m_0$ кроків будь-яка траєкторія з початковою точкою в B_0 напевно потрапить до B_{a}, де і залишатиметься назавжди. Зокрема, звідси випливає, що побудована нами послідовність поясів B_n, $n \ge 0$, насправді є фінітною: $B_n = B_{\mathrm{a}}$ для всіх $n \ge N_0$.

З рівностей (10) та (11) випливає, що $\nu + \min f + k^* d \ge d$, $\nu + \max f + (k_* - 1)d \le -d$, а тому кожна точка з координатою $x \le \sigma_{k^*}$ під дією Φ_θ посувається праворуч принаймні на відстань d, а кожна точка з координатою $x > \sigma_{k_*}$ — ліворуч принаймні на відстань d. Отже, якщо якась точка не належить поясу B_0, то її образ або належить B_0, або лежить ближче до B_0 принаймні на d. Легко порахувати, що точка з початковою координатою $|x_0| \le C$ потрапить до B_0 принаймні за $N_1(C) = [(C + \min\{|\sigma_{k_*}|, |\sigma_{k^*}|\})/d] + 1$ кроків. Таким чином, усю смугу $\mathbb{S} \times [-C, C]$ буде поглинуто поясом B_{a} за $N(C) = N_1(C) + N_0$ кроків. Єдиність поясу B_{a} випливає з його інваріантності і поглинання усіх траєкторій.

Поклавши $\xi(\theta, x) = (x - L_{\mathrm{a}}(\theta))/d$, легко побачити, що в координатах (θ, ξ) обмеження відображення F на інваріантний поглинаючий пояс B_{a} дійсно є косим зсувом на двовимірному торі $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S} \times (\mathbb{S})$ вигляду $(\theta, \xi) \mapsto (T\theta, \xi + \phi(\theta))$ з неперервною функцією $\phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S})$, яку можна описати наступним чином. Якщо для даного $\theta \in \mathbb{S}$ на інтервалі $(L_{\mathrm{a}}(\theta), L_{\mathrm{a}}(\theta) + d)$ лежить якесь σ_k (а воно тоді єдине внаслідок (1)), то $\phi(\theta) = (L_{\mathrm{a}}(\theta) + d - \sigma_k)/d$, якщо ж не лежить жодного, то $\phi(\theta) = 0$. Теорему доведено.

Зауваження 1. Можна показати, що загальні розв'язки функціональних рівнянь (8), (9) або не є вимірними, або співпадають з побудованими U_{a}, L_{a} майже скрізь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 383 с.

2. *Boshernitzan M., Kornfeld I.* Interval translation mappings // Erg. Theory and Dyn. Sys. — 1995. — **15**, no. 5. — P. 821–832.

3. *Теплінський О. Ю.* Відображення зсуву інтервалів як об'єднавчий підхід до вивчення динаміки ряду моделей дискретизованих електронних пристроїв // Доповіді НАН України. — 2008. — №12. — С. 40–45.

4. *Теплінський О. Ю.* Граничний абсорбуючий пояс для квазіперіодично керованого відображення зсуву відрізків // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №3. — С. 408–417.