УДК 512.53

©2009 р. М.І. Сумарюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ВІЛЬНІ ПІДНАПІВГРУПИ В ГРУПІ ЛІНІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЧИСЛОВИХ ПОЛІВ

Наводяться нові достатні умови при виконанні яких напівгрупа, породжена двома лінійними перетвоеннями числових полів, буде вільною напівгрупою.

We find new sufficient conditions under which the semigroup generated by two linear translations of number fields is a free semigroup

Вступ. Серед усіх типів задач про вільні групи (напівгрупи) особливе місце посідають задачі побудови конкретних зображень таких груп (напівгруп) за допомогою різноманітних алгебро-комбінаторних об'єктів. Добре відомі, наприклад, зображення Магнуса вільної групи скінченного рангу формальними степеневими рядами від некомутативних змінних за допомогою якого охарактеризовано її нижній центральний ряд [1], матричне зображення Санова, яке дозволило встановити, що вільні групи апроксимуються скінченними p-групами для довільного простого числа [5], також побудовані зображення вільних груп у вінцевих добутках [3], зображення унітрикутними матрицями нескінченного порядку над полем із двох елементів [2], зображення вільних напівгруп автоматними перетвореннями [4] і т. ін., які нині широко використовуються у різноманітних розділах сучасної алгебри і на даному етапі інтерес до таких конструкцій неухильно зростає.

Оскільки вільна група (напівгрупа) рангу 2 містить вільну підгрупу (піднапівгрупу) будь-якого скінченного або зліченного рангів, то, як правило розглядають зображення тими чи іншими об'єктами саме вільної групи (напівгрупи) рангу 2.

У даній роботі досліджуються вільні піднапівгрупи метабелевої групи лінійних перетворень числових полів. Наведено ряд достатніх умов, при виконанні яких 2-породжена напівгрупа лінійними перетвореннями довільного числового поля, є вільною напівгрупою рангу 2. Умови теорем легко перевіряються у конкретних випадках, що дозволило побудувати окремі зображення відповідних вільних напівгруп рангу 2, породжених лінійними перетвореннями.

1. Допоміжні відомості. Нехай $\mathbb{P}$ – деяке числове поле. Має місце наступне твердження.

Лема 1. *Для довільних чисел a_1, a_2, b_1, b_2 поля $\mathbb{P}$ виконується нерівність*

$$|a_1b_1 - a_2b_2| \geq \min\{|a_1|, |a_2|\}||b_1| - |b_2||. \quad (1)$$

Доведення. Оскільки для довільних чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{P}$ правильною є нерівність $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, то для довільних чисел $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{P}$ отримуємо наступні перетворення:

$$|a_1b_1 - a_2b_2| \geq ||a_1b_1| - |a_2b_2|| = ||a_1||b_1| - |a_2||b_2||.$$

Розглянемо декілька випадків.

1) Нехай $|a_1| \leq |a_2|$ та $|b_1| \leq |b_2|$. Тоді маємо

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_2||b_2| - |a_1||b_1| \geq$$
$$\geq |a_1|\left(|b_2| - |b_1|\right) = |a_1|||b_1| - |b_2||.$$

2) Нехай $|a_1| \geq |a_2|$ та $|b_1| \geq |b_2|$. Тоді маємо

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_1||b_1| - |a_2||b_2| \geq$$
$$\geq |a_2|\left(|b_1| - |b_2|\right) = |a_2|||b_1| - |b_2||.$$

3) Нехай $|a_1| \leq |a_2|$ та $|b_1| \geq |b_2|$. Тоді,

якщо $|a_1||b_1| \le |a_2||b_2|$, то матимемо

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_2||b_2| - |a_1||b_1| \ge$$
$$\ge |b_2|\,(|a_2| - |a_1|) = |b_2|||a_1| - |a_2||,$$

а якщо $|a_1||b_1| \ge |a_2||b_2|$, то матимемо

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_1||b_1| - |a_2||b_2| \ge$$
$$\ge |a_1|\,(|b_1| - |b_2|) = |a_1|\,||b_1| - |b_2||.$$

4) Нехай $|a_1| \ge |a_2|$ та $|b_1| \le |b_2|$. Тоді, якщо $|a_1||b_1| \le |a_2||b_2|$, то матимемо

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_2||b_2| - |a_1||b_1| \ge$$
$$\ge |a_2|\,(|b_2| - |b_1|) = |a_2|||b_1| - |b_2||,$$

а якщо $|a_1||b_1| \ge |a_2||b_2|$, то матимемо

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_1||b_1| - |a_2||b_2| \ge$$
$$\ge |b_1|\,(|a_1| - |a_2|) = |b_1|\,||a_1| - |a_2||.$$

З іншого боку, в першій частині випадку 3) та другій частині випадку 4) здійснимо перепозначення, а саме, замість a_j запишемо b_j, а відповідно замість b_j запишемо a_j $(j \in \{1,2\})$. У результаті, коли $|b_1| \le |b_2|$, $|a_1| \ge |a_2|$ та $|a_1||b_1| \le |a_2||b_2|$ одержимо, що

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_2||b_2| - |a_1||b_1| \ge$$
$$\ge |a_2|\,(|b_2| - |b_1|) = |a_2|||b_1| - |b_2||;$$

у випадку, коли $|a_1| \ge |a_2|$, $|b_1| \le |b_2|$ та $|a_1||b_1| \ge |a_2||b_2|$ одержимо, що

$$||a_1||b_1| - |a_2||b_2|| = |a_1||b_1| - |a_2||b_2| \ge$$
$$\ge |a_1|\,(|b_1| - |b_2|) = |a_1|\,||b_1| - |b_2||.$$

Таким чином, підсумовуючи розглянуті випадки 1)-4) та відповідні наслідки, пов'язані з ними, приходимо до висновку, що для довільних комплексних чисел $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{P}$ виконується нерівність

$$|a_1 b_1 - a_2 b_2| \ge \min\{|a_1|, |a_2|\}||b_1| - |b_2||,$$

що й доводить сформульоване твердження. $\square$

Розглянемо групу G, породжену множиною усіх цілих лінійних функцій виду

$$az + b, z \in \mathbb{P},\ a \ne 0,\ a, b \in \mathbb{P},$$

відносно дії їх суперпозиції. Візьмемо довільні лінійні функції $f_1, f_2 \in G$. Нехай X, $|X| > 1$, – обмежена підмножина в $\mathbb{P}$, тобто існує деяка стала c така, що для кожного $x \in X$ виконується нерівність $|z| < c$. Тоді, віддаль між функціями f_1 та f_2 на множині X визначимо за правилом:

$$d_X(f_1, f_2) = \sup_{z \in X} |f_1(z) - f_2(z)|. \qquad (2)$$

Таким чином, для кожної фіксованої непорожньої та обмеженої підмножини X, $|X| > 1$, в $\mathbb{P}$, група G перетворюється у метричний простір відносно метрики d_X, визначеної рівністю (2).

2. Основні результати. З'ясуємо чи група G містить вільні 2-породжені піднапівгрупи лінійних перетворень. Отже, доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай дано $f_j = a_j z + b_j$, $z \in \mathbb{P}$, $j \in \{1,2\}$, – цілі лінійні перетворення, де їх комплексні коефіцієнти задовольняють наступні умови: 1) при всіх $n, m \in \in \mathbb{Z}$ таких, що одночасно не дорівнюють нулеві, маємо $a_1^n \ne a_2^m$; 2) $\min\{|a_1|, |a_2|\} \ge 2$; 3)$|b_1 - b_2| \le 2||b_1| - |b_2||, |b_1| \ne |b_2|$.*

Тоді напівгрупа S, породжена перетвореннями f_1 та f_2, є вільною напівгрупою рангу 2 з вільною базою $\{f_1, f_2\}$.

Доведення. Нехай X, $|X| > 1$, – довільна обмежена підмножина поля $\mathbb{P}$ така, що $0 \in \mathbb{P}$. Оцінимо знизу віддаль між перетвореннями f_1 та f_2 на відрізку X. Отже, маємо

$$d_X(f_1, f_2) = \sup_{z \in X} |a_1 z + b_1 - a_2 z - b_2| =$$
$$= \sup_{z \in X} |(a_1 - a_2)z + b_1 - b_2| \ge$$
$$\ge |(a_1 - a_2)z + b_1 - b_2|_{|z=0} =$$
$$= |b_1 - b_2| \ge ||b_1| - |b_2||.$$

Отже, одержано нерівність $d_X(f_1, f_2) \ge \ge ||b_1| - |b_2||$, причому число $||b_1| - |b_2||$ є додатним, бо $|b_1| \ne |b_2|$.

Нехай $\{x_1, x_2\}$ – алфавіт з двох символів. Розглянемо два напівгрупові слова $u \equiv u(x_1, x_2)$ та $v \equiv v(x_1, x_2)$ над даним алфавітом, які відрізняються у розумінні графічного порівняння слів. Знайдемо значення напівгрупових слів u та v на перетвореннях f_1 та f_2 відносно операції суперпозиції функцій, поклавши замість x_1 перетворення f_1, а замість x_2 перетворення f_2. У результаті, одержимо нові лінійні функції $u(f_1, f_2)$ та $v(f_1, f_2)$.

Покажемо далі, що напівгрупові слова $u(f_1, f_2)$, $v(f_1, f_2)$ над множиною перетворень $\{f_1, f_2\}$ є незвідними. Отже, враховуючи нерівність $\min\{|a_1|, |a_2|\} \geq 2$ (умова 2) матимемо, що будь-яка n-кратна суперпозиція функцій f_j, $j \in \{1, 2\}$, має вигляд

$$f_j^{(n)} = a_j^n z + c_{j,n}, \ z \in \mathbb{P}, \ j \in \{1, 2\}, \qquad (3)$$

а модулі коефіцієнтів a_j^n, $j \in \{1, 2\}$, не менші числа 2^n, тобто відмінні від 1. Звідси випливає, що жодне з перетворень $f_j^{(n)}$, $j \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$, не є тотожним перетворенням поля $\mathbb{P}$. Також моногенні напівгрупи $< f_1 >, < f_2 >$, породжені відповідно перетвореннями f_1 та f_2 не мають спільних елементів, що випливає з умови 1 сформульованої теореми та вигляду (3) елементів цих напівгруп, оскільки коефіцієнти усіх перетворень напівгрупи $< f_1 >$ відрізняються від аналогічних коефіцієнтів усіх перетворень напівгрупи $< f_2 >$.

Отже, доведено незвідність напівгрупових слів $u(f_1, f_2)$ та $v(f_1, f_2)$ над множиною перетворень $\{f_1, f_2\}$. Тому для доведення теореми слід показати, що із нерівності незвідних напівгрупових слів $u(f_1, f_2)$, $v(f_1, f_2)$ над множиною двох літер $\{f_1, f_2\}$ у розумінні їх графічного порівняння, випливає їх нерівність над множиною функцій $\{f_1, f_2\}$. Іншими словами, потрібно довести, що тотожність

$$u(f_1(z), f_2(z)) \equiv v(f_1(z), f_2(z)), \ z \in \mathbb{P}, \quad (4)$$

є невірною. Тому припустимо навпаки, що тотожність (4) є правильною.

Нехай α_j – сума показників, з якими перетворення f_j входить у запис слова u; аналогічно символом β_j позначимо суму показників, з якими перетворення f_j входить у запис слова v ($j \in \{1, 2\}$). Тоді прирівнявши коефіцієнти лівої та правої частини тотожності (4) при змінній z, прийдемо до числової рівності $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2}$ або $a_1^{\alpha_1 - \beta_1} = a_2^{\alpha_2 - \beta_2}$. Враховуючи умову 1 сформульованої теореми одержимо, що $\alpha_1 = \beta_1$ та $\alpha_2 = \beta_2$.

Таким чином, доведено рівність довжин напівгрупових слів u та v.

Оскільки напівгрупа S, породжена перетвореннями f_1 та f_2, є напівгрупою із скороченням, то можемо вважати, що слова u та v мають різні початки та різні закінчення у графічному розумінні їх порівняння. У іншому випадку, скориставшись властивістю скорочення у напівгрупі S у тотожності (4) слова u та v можна скоротити, відкинувши спільні початки та спільні закінчення.

Доведемо тепер нерівність

$$d_X(u(f_1, f_2), v(f_1, f_2)) \geq ||b_1| - |b_2||. \qquad (5)$$

Для цього використаємо метод доведення індукцією по довжині слів u та v, яку позначатимемо операцією $l(\cdot)$.

Отже, якщо $l(u) = l(v) = 1$, то нерівність (5) одержано раніше. Припустимо, що у випадку, коли $l(u) = l(v) = k$, $k \in \mathbb{N}$, нерівність (5) є правильною і доведемо цю нерівність при умові, що $l(u) = l(v) = k + 1$.

Таким чином, достатньо довести нерівності для віддалі між словами з різними початками такого вигляду:

$$d_1 \equiv d_X(f_1 \circ u, f_2 \circ u) \geq ||b_1| - |b_2||,$$

$$d_2 \equiv d_X(f_2 \circ u, f_1 \circ u) \geq ||b_1| - |b_2||,$$

де $l(u) = l(v) = k$, $u \equiv u(z)$, $v \equiv v(z)$, $z \in X$. Встановимо, наприклад, першу нерівність. Тому матимемо оцінку:

$$d_1 = \sup_{z \in X} |a_1 u(z) + b_1 - a_2 v(z) - b_2| \geq$$
$$\geq \sup_{z \in X} ||a_1 u(z) - a_2 v(z)| - |b_1 - b_2||.$$

Використовуючи нерівність (1), одержану в лемі 1 попереднього пункту, матимемо нерівність

$$\sup_{z\in X}|a_1u(z)-a_2v(z)|\geq$$
$$\geq\sup_{z\in X} min\{|a_1|,|a_2|\}|u(z)-v(z)|\geq$$
$$\geq\sup_{z\in X}2|u(z)-v(z)|\geq 2||b_1|-|b_2||.$$

Оскільки мають місце нерівності

$$||b_1|-|b_2||\leq|b_1-b_2|\leq 2||b_1|-|b_2||,$$

то продовживши оцінювання знизу величини d_1 одержимо, що

$$d_1\geq||b_1|-|b_2||,$$

яка доводить одну із потрібних нерівностей. Інша нерівність доводиться цілком аналогічно.

Отже, згідно принципу математичної індукції встановлено, що для довільного натурального числа n, яке задовольняє рівність $l(u)=l(v)=n$, має місце нерівність $d_X(u,v)\geq||b_1|-|b_2||$, яка суперечить тотожності (4). Тому, припущення щодо виконання тотожності (4) є невірним і, як наслідок, напівгрупа S, породжена перетвореннями f_1 та f_2, є вільною напівгрупою рангу 2 з вільною базою $\{f_1,f_2\}$. □

Наведемо ще деякі твердження, які дають достатні умови вільності напівгруп, породжених парою лінійних перетворень поля $\mathbb{P}$ з дійсними коефіцієнтами.

Отже, мають місце наступні твердження.

Теорема 2. *Нехай дано $f_j=a_jz+b$, $z\in\mathbb{P}$, $j\in\{1,2\}$, – лінійні перетворення, де їх дійсні коефіцієнти задовольняють наступні умови: 1) $a_1,a_2\in(2;+\infty)$; 2) при всіх $n,m\in\mathbb{Z}$ таких, що $|n|+|m|\neq 0$ маємо $a_1^n\neq a_2^m$; 3) $b\neq 0$.*

Тоді напівгрупа S, породжена перетвореннями f_1 та f_2 є вільною напівгрупою рангу 2 з вільною базою $\{f_1,f_2\}$.

Доведення. Побудуємо лінійні функції $u(f_1,f_2)$ та $v(f_1,f_2)$, які подані у вигляді різних напівгрупових слів у розумінні їх графічного порівняння, від перетворень f_1 та f_2 відносно дії суперпозиції так само, як і при доведенні теореми 1.

Враховуючи вигляд (3) для довільної n-кратної суперпозиції перетворень f_j, $j\in\{1,2\}$, а також умови 1 та 2 сформульованої теореми приходимо до висновку, що напівгрупові слова $u(f_1,f_2)$, $v(f_1,f_2)$ є незвідними над множиною функцій $\{f_1,f_2\}$. Справді, довільна n-кратна суперпозиція $f_j^{(n)}(z)$, $z\in\mathbb{P}$, $j\in\{1,2\}$, при змінній z має коефіцієнт, що дорівнює a_j^n, $j\in\{1,2\}$, тобто відмінний від 1 (це випливає з умови 1), тому всі такі лінійні перетворення не дорівнюють тотожному перетворенню поля $\mathbb{P}$; також моногенні напівгрупи $<f_1>$ та $<f_2>$, породжені відповідно перетвореннями f_1 та f_2 не мають спільних елементів, бо згідно із умовою 2 сформульованого твердження, коефіцієнти перетворень із напівгрупи $<f_1>$ при змінній $z\in\mathbb{P}$ та аналогічні коефіцієнти перетворень напівгрупи $<f_2>$ нерівні.

Отже, для доведення теореми слід показати, що із нерівності незвідних напівгрупових слів $u(f_1,f_2)$, $v(f_1,f_2)$ над множиною двох літер $\{f_1,f_2\}$ у розумінні їх графічного порівняння, випливає хибність тотожності

$$u(f_1(z),f_2(z))\equiv v(f_1(z),f_2(z)),\ z\in\mathbb{P}. \quad (6)$$

Для перевірки тотожності (6) використаємо метод доведення від супротивного. Тому припускаємо, що тотожність (6) є правильною. Тоді на основі умови 2 сформульованої теореми так само, як і при доведенні теореми 1 доводимо, що напівгрупові слова u та v мають однакову довжину. Крім того, встановлюємо, що кількість входжень літери f_j у слова u та v є однаковою ($j\in\{1,2\}$).

Тотожність (6) можемо записати у рівносильній формі таким чином:

$$(u(f_1,f_2)\circ v^{-1}(f_1,f_2))(z)\equiv z,\ z\in\mathbb{P}. \quad (7)$$

При цьому слово $v^{-1}(f_1,f_2)$ подається у вигляді суперпозиції таких лінійних перетворень:

$$f_j^{-1}=\frac{1}{a_j}(z-b),\ z\in\mathbb{P},\ j\in\{1,2\}.$$

Ліву частину тотожності (7) позначимо символом $w(f_1,f_2)$ і нехай дане слово над множиною функцій $\{f_1^{\pm1}, f_2^{\pm1}\}$ у загальному вигляді подається так:

$$w(f_1,f_2)=g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_{2l},\ l\in\mathbb{N},$$

де перші l функцій визначають формальний запис слова $u(f_1,f_2)$, а наступні l функцій відповідно визначають формальний запис слова $v^{-1}(f_1,f_2)$, при цьому

$$g_1,g_2,\ldots,g_l\in\{f_1,f_2\},$$
$$g_{l+1},g_{l+2},\ldots,g_{2l}\in\{f_1^{-1},f_2^{-1}\}.$$

Нехай

$$\begin{gathered} g_r\equiv c_rz+d_r, z\in\mathbb{P},\\ c_r\neq 0, d_r\in\mathbb{R}, r=\overline{1,2l}. \end{gathered} \tag{8}$$

Тоді врахувавши зроблені формальні позначення, над тотожністю

$$w(f_1,f_2)(z)\equiv z,\ z\in\mathbb{P}, \tag{9}$$

виконаємо ряд таких перетворень.

1) Записуємо її у вигляді

$$g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_{2l-1}\circ c_{2l}\left(z+\frac{d_{2l}}{c_{2l}}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(z+\frac{d_{2l}}{c_{2l}}\right)-\frac{d_{2l}}{c_{2l}},\ z\in\mathbb{P};$$

в одержаній тотожності виконаємо заміну змінної $z_1=z+\dfrac{d_{2l}}{c_{2l}}$, тоді відносно цієї змінної матимемо тотожність

$$\begin{gathered} g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_{2l-2}\circ(c_{2l-1}c_{2l}z_1+\\ +d_{2l-1})\equiv z_1-\frac{d_{2l}}{c_{2l}},\ z_1\in\mathbb{P}. \end{gathered} \tag{10}$$

2) Тотожність (10) запишемо у вигляді

$$g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_{2l-2}\circ\left(c_{2l-1}c_{2l}\left(z_1+\tfrac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}}\right)\right)\equiv$$
$$\equiv\left(z_1+\frac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}}\right)-\frac{d_{2l}}{c_{2l}}-\frac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}},\ z_1\in\mathbb{P}.$$

Тоді у цій тотожності здійснимо заміну змінної, поклавши $z_2=z_1+\dfrac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}}$, відносно якої одержимо тотожність

$$g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_{2l-2}\circ(c_{2l-1}c_{2l}z_2)\equiv$$
$$\equiv z_2-\frac{d_{2l}}{c_{2l}}-\frac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}},\ z_2\in\mathbb{P}.$$

3) Продовживши процес аналогічних перетворень декілька разів, одержимо тотожність виду

$$g_1\circ(c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{2l}z_{2l-1}+d_2)\equiv$$
$$\equiv\left(z_{2l-1}+\frac{d_2}{c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{2l}}\right)-\frac{d_{2l}}{c_{2l}}-\frac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}}-$$
$$-\ldots-\frac{d_2}{c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{2l}},\ z_{2l-1}\in\mathbb{P}.$$

4) У останній тотожності знову проведемо заміну

$$z_{2l}=z_{2l-1}+\frac{d_2}{c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{2l}}$$

і одержимо тотожність

$$c_1c_2\cdot\ldots\cdot c_{2l}z_{2l}+d_1\equiv z_{2l}-\frac{d_{2l}}{c_{2l}}-\frac{d_{2l-1}}{c_{2l-1}c_{2l}}-$$
$$-\ldots-\frac{d_2}{c_2c_3\cdot\ldots\cdot c_{2l}},\ z_{2l}\in\mathbb{P}.$$

Таким чином, правильними є числові рівності

$$c_1c_2\cdot\ldots\cdot c_{2l}=1,\quad \sigma=\sum_{r=1}^{2l}\frac{d_r}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_{2l}}=0.$$

Покажемо, що остання рівність є носієм протиріччя, тому розглянемо її детальніше.

Отже, згідно із позначеннями (8) та умовами сформульованої теореми, маємо:

$$c_r\in(2;+\infty),\ d_r=b,\ r=\overline{1,l},$$

$$c_r\in\left(0;\frac{1}{2}\right),\ d_r=-\frac{b}{c_r},\ r=\overline{l+1,2l}.$$

У зв'язку з цим, враховуючи також рівність $c_1c_2\cdot\ldots\cdot c_{2l}=1$ отримуємо наступні перетворення:

$$\sigma=\sum_{r=1}^{l}\frac{d_r}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_{2l}}+\sum_{r=l+1}^{2l}\frac{d_r}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_{2l}}=$$

$$=b\sum_{r=1}^{l}\frac{c_1c_2\cdot\ldots\cdot c_l}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_l}-b\sum_{r=l+1}^{2l}\frac{c_1c_2\cdot\ldots\cdot c_{r-1}}{c_r}=$$

$$= bc_1c_2\cdot\ldots\cdot c_l\left(\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_l}-\frac{1}{c_{l+1}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{r=l+2}^{2l}\frac{c_{l+1}c_{l+2}\cdot\ldots\cdot c_{r-1}}{c_r}\right)=0,$$

звідки врахувавши, що $bc_1c_2\cdot\ldots\cdot c_l\neq 0$ випливає рівність

$$\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_l}=\frac{1}{c_{l+1}}+$$

$$+\sum_{r=l+2}^{2l}\frac{c_{l+1}c_{l+2}\cdot\ldots\cdot c_{r-1}}{c_r}.$$

Оскільки число $\sum\limits_{r=l+2}^{2l}\frac{c_{l+1}c_{l+2}\cdot\ldots\cdot c_{r-1}}{c_r}$ є додатним і $\frac{1}{c_{l+1}}\in(2;+\infty)$, то маємо нерівність $\sum\limits_{r=1}^{l}\frac{1}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_l}>1$. З іншого боку, маємо оцінку

$$\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_l}\leq$$

$$\leq\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{(\min\{c_r,c_{r+1},\ldots,c_l\})^{l-r+1}}\leq$$

$$\leq\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{(\min\{a_1,a_2\})^{l-r+1}}\leq$$

$$\leq\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{(\min\{a_1,a_2\})^{r}}=\frac{1}{\min\{a_1a_2\}-1}.$$

Оскільки числа a_1,a_2 належать інтервалу $(2;+\infty)$, то одержимо нерівність $\frac{1}{\min\{a_1a_2\}-1}<1$, тобто

$$\sum_{r=1}^{l}\frac{1}{c_rc_{r+1}\cdot\ldots\cdot c_l}\leq 1.$$

А це приводить до суперечності.

Таким чином, припущення щодо виконання тотожності (7) є невірним. Цим доведено, що напівгрупа S, породжена перетвореннями f_1 та f_2 є вільною напівгрупою рангу 2 відносно вільної бази $\{f_1,f_2\}$. $\square$

Теорема 3. *Нехай дано* $f_j=az+b_j$, $z\in\mathbb{P}$, $j\in\{1,2\}$, *– лінійні перетворення, де їх дійсні коефіцієнти задовольняють наступні умови: 1)* $a\in(-\infty;-1)$; *2)* $b_1,b_2\in\in(0;+\infty)$, $b_1<b_2$. *Тоді напівгрупа* S, *породжена перетвореннями* f_1 *та* f_2, *є вільною напівгрупою рангу 2 з вільною базою* $\{f_1,f_2\}$.

Доведення. Побудуємо лінійні функції $u(f_1,f_2)$, $v(f_1,f_2)$ так само, як і при доведенні теорем 1 та 2. Покажемо, що із виконання умов 1-2 сформульованого твердження, випливає незвідність напівгрупових слів u та v над множиною функцій $\{f_1,f_2\}$.

Отже, оскільки коефіцієнт при змінній z довільної n-кратної суперпозиції перетворення f_j, $j\in\{1,2\}$, дорівнює a^n і згідно з умовою 1 відмінний від 1, то дані перетворення f_j, $j\in\{1,2\}$, у напівгрупі S мають нескінченний порядок, тобто суперпозиція $f_j^{(n)}$, $j\in\{1,2\}$, не є тотожним перетворенням поля $\mathbb{P}$ для кожного $n\in\mathbb{N}$.

Таким чином, для встановлення незвідності напівгрупових слів u та v над множиною функцій $\{f_1,f_2\}$ слід ще довести, що моногенні напівгрупи $<f_1>$ та $<f_2>$, породжені відповідно перетвореннями f_1 та f_2, не мають спільних елементів. Для цього зафіксуємо довільні числа $n,m\in\mathbb{N}$ і розглянемо відповідні суперпозиції $f_1^{(n)}$, $f_2^{(m)}$ перетворень f_1 та f_2, які не є рівними, бо інакше прирівнявши коефіцієнти при змінній z обох перетворень одержимо, що $a^n=a^m$ або $a^{|n-m|}=1$. А це можливо при $n=m$, бо $a\in(-\infty;-1)$. Тоді, у такому випадку, вільні члени лінійних перетворень $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$ відповідно дорівнюють $b_1\sum\limits_{i=1}^{n}a^{i-1}$ та $b_2\sum\limits_{i=1}^{n}a^{i-1}$, які є різними, оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n}a^{i-1}=\frac{1-a^n}{1-a}\neq 0$ і $b_1\neq b_2$ при $a\in(-\infty;-1)$. Отже, маємо $<f_1>\cap<f_2>=\varnothing$.

Таким чином, для доведення теореми слід показати, що із нерівності незвідних напівгрупових слів $u(f_1,f_2)$, $v(f_1,f_2)$ над множиною двох літер $\{f_1,f_2\}$ у розумінні їх графічного порівняння випливає хибність тотожності

$$u(f_1(z), f_2(z)) \equiv v(f_1(z), f_2(z)),\ z \in \mathbb{P}. \quad (11)$$

Припустимо навпаки, що тотожність (11) є правильною. Покажемо далі, що тоді напівгрупові слова u та v мають однакову довжину. Справді, зважаючи на вигляд лінійних перетворень $f_j^{(n)}$, $j \in \{1,2\}$ обчислюємо коефіцієнт при змінній z лінійного перетворення $u(f_1, f_2)$, який дорівнює $a^{l(u)}$, де $l(u)$ – довжина слова $u(f_1, f_2)$, тобто кількість входжень до його запису літер $\{f_1, f_2\}$; аналогічно відповідний коефіцієнт при змінній z лінійного перетворення $v(f_1, f_2)$ дорівнює $a^{l(v)}$, де $l(v)$ – довжина слова $v(f_1, f_2)$ відповідно до входження у його запис літер відносно літер $\{f_1, f_2\}$. Тоді прирівнявши коефіцієнти при однаковій змінній, прийдемо до числової рівності $a^{l(u)} = a^{l(v)}$. Оскільки $a \in (-\infty; -1)$, то одержимо $l(u) = l(v) \equiv l$.

Вважатимемо, що число l є парним, бо в іншому випадку замість рівності $u = v$ скрізь у подальшому доведенні розглядатимемо рівність $u^2 = v^2$, для якої маємо $l(u^2) = l(v^2) = 2l$.

Тотожність (11) запишемо у рівносильній формі

$$w(f_1, f_2)(z) \overset{def}{\equiv} (u(f_1, f_2) \circ v^{-1}(f_1, f_2))(z) \equiv z,$$

при кожному $z \in \mathbb{P}$. Тут слово $v^{-1}(f_1, f_2)$ подається у вигляді суперпозиції таких лінійних перетворень:

$$f_j^{-1} = \frac{1}{a}(z - b_j),\ z \in \mathbb{P},\ j \in \{1,2\}.$$

Нехай слово $w(f_1, f_2)$ над множиною функцій $\{f_1^{\pm 1}, f_2^{\pm 1}\}$ у загальному вигляді подається так:

$$w(f_1, f_2) = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{2l},\ l \in \mathbb{N},$$

де перші l функцій визначають формальний запис слова $u(f_1, f_2)$, а наступні l функцій відповідно визначають формальний запис слова $v^{-1}(f_1, f_2)$, при цьому

$$g_1, g_2, \ldots, g_l \in \{f_1, f_2\},$$

$$g_{l+1}, g_{l+2}, \ldots, g_{2l} \in \{f_1^{-1}, f_2^{-1}\}.$$

Нехай

$$g_r \equiv c_r z + d_r,\ z \in \mathbb{P},$$
$$c_r \neq 0,\ c_r, d_r \in \mathbb{R},\ r = \overline{1, 2l}.$$

Тоді врахувавши зроблені формальні позначення, над тотожністю $w(f_1, f_2)(z) \equiv z$, $z \in \mathbb{P}$, здійснимо всі перетворення, що й при доведенні теореми 2. У результаті, прийдемо до числових рівностей

$$c_1 c_2 \cdot \ldots \cdot c_{2l} = 1,\quad \sigma \equiv \sum_{r=1}^{2l} \frac{d_r}{c_r c_{r+1} \cdot \ldots \cdot c_{2l}} = 0.$$

Покажемо, що остання рівність є носієм протиріччя, тому розглянемо її детальніше.

Отже, маємо такі перетворення:

$$\sigma = \sum_{r=1}^{l} \frac{d_r}{c_r c_{r+1} \cdot \ldots \cdot c_{2l}} + \sum_{r=l+1}^{2l} \frac{d_r}{c_r c_{r+1} \cdot \ldots \cdot c_{2l}} =$$
$$= \sum_{r=1}^{l} d_r a^{r-1} + \sum_{r=l+1}^{2l} d_r a^{m-r+1}.$$

Нагадаємо, що

$$d_r \in \{b_1, b_2\},\ r = \overline{1, l},$$
$$d_r \in \left\{ -\frac{b_1}{a}, -\frac{b_2}{a} \right\},\ r = \overline{l+1, 2l}.$$

Тому врахувавши нерівності $0 < b_1 < b_2$, для числа σ матимемо такі нижню та верхню оцінки:

$$b_1 \sum_{r=1}^{l} a^{r-1} - b_2 \sum_{r=l+1}^{2l} a^{l-r} \leq \sigma \leq$$
$$\leq b_2 \sum_{r=1}^{l} a^{r-1} - b_1 \sum_{r=l+1}^{2l} a^{l-r},$$

звідки випливає, що

$$(b_1 - b_2) \left(\sum_{r=1}^{l} a^{r-1} + \sum_{r=l+1}^{2l} a^{l-r} \right) \leq 0.$$

Оскільки $b_1 - b_2 < 0$, то обчисливши відповідні суми геометричних прогресій в останній нерівності, матимемо

$$\frac{1 - a^l}{1 - a} + \frac{1 - a^{-l}}{a - 1} \geq 0 \text{ або } (a^l - a^{-l})(a - 1) \geq 0.$$

Проаналізуємо останню нерівність. Оскільки за умовою 1 сформульованої теореми $a \in (-\infty; -1)$, то $(a-1) \in (-\infty; -1)$; число l є парним згідно із домовленістю, тому $a^l \in (1; +\infty)$ та $a^{-l} \in (0; 1)$. Звідси випливає, що різниця $a^l - a^{-l}$ належить проміжку $(0; +\infty)$, а отже $(a^l - a^{-l})(a-1) < 0$. Отримали суперечність.

Таким чином, припущення щодо виконання тотожності (11) є невірним. Цим доведено, що напівгрупа S, породжена перетвореннями f_1 та f_2, є вільною напівгрупою рангу 2 відносно вільної бази $\{f_1, f_2\}$. $\square$

Наведемо тепер конкретні приклади вільних напівгруп рангу 2, що породжуються лінійними перетвореннями дійсного поля $\mathbb{R}$ та комплексного поля $\mathbb{C}$. Отже, має місце твердження.

Лема 2. *Наступні системи лінійних перетворень породжують вільні напівгрупи рангу 2:*

1) $f_1 = 3iz + 2i, \quad f_2 = 2z + 3 - i, \quad z \in \mathbb{C}$*;*

2) $f_1 = 5z + 2i, \quad f_2 = 4z - 2i, \quad z \in \mathbb{C}$*;*

3) $f_1 = 3z + 2 - i, \quad f_2 = 4z + 2 - i, \quad z \in \mathbb{C}$*;*

4) $f_1 = \sqrt{5}z - \sqrt{2}, \quad f_2 = \sqrt{6}z - \sqrt{2}, \quad z \in \mathbb{R}$*;*

5) $f_1 = -2z + 1, \quad f_2 = -2z + 3, \quad z \in \mathbb{R}$ *(або* $z \in \mathbb{C}$*);*

6) $f_1 = -\frac{3}{2}z + \frac{4}{5}, \quad f_2 = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{3}, \quad z \in \mathbb{R}$ *(або* $z \in \mathbb{C}$*)*.

Правильність наведеної леми випливає безпосередньо із теорем 1-3, якщо взяти до уваги те, що системи перетворень 1), 2) задовольняють умови теореми 1; системи перетворень 3), 4) задовольняють умови теореми 2; системи перетворень 5), 6) задовольняють умови теореми 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 456 с.

2. *Олийнык А.С., Сущанский В.И.* Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц // Мат. заметки. – 2000. – **67**, №3, – С. 386-391.

3. *Олійник А.С.* Вільні групи автоматних підстановок // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 40-44.

4. *Олийник А.С.* О свободных полугруппах автоматных преобразований // Матем. заметки. – 1998. – 63. – С. 248-259.

5. *Санов И.Н.* Свойство одного представления свободной группы. – Докл. АН СССР. – 1947. – 57. – С. 657-659.