

## СУКУПНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доведено, що для компактозначного відображення  $F : X \times Y \rightrightarrows Z$ , визначеного на добутку берівського простору  $X$  і метризовного компакту  $Y$  і зі значеннями у метризовному просторі  $Z$ , яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної, існує всюди щільна  $G_\delta$ -множина  $A \subseteq X$  така, що звуження  $F|_{A \times Y}$  неперервне. Наведено приклад відображення  $F : [0, 1]^2 \rightrightarrows [0, 1]$ , яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної, неперервне відносно другої змінної і сукупно розривне в кожній точці множини  $[0, 1] \times \{0\}$ .

It is proved that for a Baire space  $X$ , a metrizable compact  $Y$ , a metrizable space  $Z$  and a compact-valued mapping  $F : X \times Y \rightrightarrows Z$  which is lower semi-continuous with respect the first variable and continuous with respect to the second variable there exists a dense  $G_\delta$ -set  $A \subseteq X$  such that the restriction  $F|_{A \times Y}$  is continuous. It is constructed an example of a mapping  $F : [0, 1]^2 \rightrightarrows [0, 1]$  which is lower semi-continuous with respect the first variable, continuous with respect to the second variable and jointly discontinuous at every point of the set  $[0, 1] \times \{0\}$ .

## 1 Вступ

Дослідження властивостей множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень двох змінних були розпочаті Р.Бером в [1]. Результати Р.Бера узагальнювались і розвивались у роботах багатьох математиків: Е. ван Влека, Г.Гана, А.Алексєвича і В.Орлича, М.Форта, Р.Фейока, В.Маслюченка та інших. Особливе місце серед результатів даної тематики займає теорема Наміоки [7], яка дістала широке застосування і стала поштовхом до подальшого розвитку даних досліджень для відображень, визначених на добутку берівського і компактного просторів.

Разом із тим, в [4–6] вивчалися сукупні властивості многозначних відображень двох змінних, які відносно кожної змінної зокрема є неперервними або задовольняють певні умови типу неперервності. Зокрема, з роботи Г.Дебса [4] випливає наступний результат.

**Теорема 1.** *Нехай  $X$  – берівський простір,  $Y$  – метризовний компакт,  $Z$  – метризовний простір,  $F : X \times Y \rightrightarrows Z$  – компактозначне відображення, напівнеперервне знизу відносно першої змінної і напівнеперервне зверху відносно другої. Тоді існує  $G_\delta$ -множина  $A$  щільна в  $X$ , така, що від-*

*ображення  $F$  сукупно напівнеперервне зверху в кожній точці множини  $A \times Y$ .*

У зв'язку з цією теоремою природно виникає таке питання.

**Питання 1.** *Нехай  $X$  – берівський простір,  $Y$  – метризовний простір,  $F : X \times Y \rightrightarrows \mathbb{R}$  – компактозначне відображення, напівнеперервне знизу відносно першої змінної і неперервне відносно другої. Чи обов'язково існує щільна в  $X$   $G_\delta$ -множина  $A$  така, що відображення  $F$  сукупно неперервне в кожній точці множини  $A \times Y$ ?*

У даній статті ми покажемо, що це питання має негативну відповідь. Крім того, ми доведемо, що відображення  $F$ , які задовольняють умови питання 1, мають таку дещо слабшу властивість: існує щільна в  $X$  множина  $A$  типу  $G_\delta$  така, що звуження  $F|_{A \times Y}$  неперервне.

## 2 Приклад

Многозначне відображення  $F : X \rightrightarrows Y$ , яке діє з топологічного простору  $X$  у топологічний простір  $Y$ , називається напівнеперервним зверху (знизу) в точці  $x_0 \in X$ , якщо для довільної відкритої в  $Y$  множини  $V$  такої, що  $F(x_0) \subseteq V$  ( $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ ) множина  $\{x \in X : F(x) \subseteq V\}$  ( $\{x \in X : F(x) \subseteq V \neq$

$\emptyset\}$ ) є околom точки  $x_0$  в просторі  $X$ . Многoзначне відображення  $F : X \multimap Y$  напівнеперервне зверху (знизу) в кожній точці  $x \in X$  називається напівнеперервним зверху (знизу), відображення, напівнеперервне зверху і знизу, називається неперервним.

Зауважимо, що неперервність компактозначного відображення  $F : X \multimap Y$  рівносильна наперервності відповідного однозначного відображення  $f : X \rightarrow K(Y)$ , яке діє в простір  $K(Y)$  непорожніх компактних підмножин простору  $Y$  з топологією Віторіса, яка, в свою чергу, є метризовною з допомогою метрики Гаусдорфа, якщо сам простір  $Y$  також метризовний (дивись [9, с. 62]).

Наступні допоміжні твердження легко впливають з означень.

**Лема 1.** *Нехай  $X$  – топологічний простір, функції  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервні і  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  для довільного  $x \in X$ . Тоді компактозначне відображення  $g : X \multimap \mathbb{R}$  таке, що  $g(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$  для кожного  $x \in X$  є неперервним.*

**Лема 2.** *Нехай  $g : [0, 1] \multimap [0, 1]$  – многoзначне відображення,  $A \subseteq [0, 1]$  – скінченна множина і  $g(x) = [0, 1]$  для довільного  $x \in [0, 1] \setminus A$ . Тоді відображення  $g$  – напівнеперервне знизу на відрізку  $[0, 1]$ .*

Наступний приклад дає негативну відповідь на питання 1.

**Теорема 2.** *Існує компактозначне відображення  $F : [0, 1]^2 \multimap [0, 1]$ , яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної, неперервне відносно другої змінної і сукупно розривне в кожній точці множини  $[0, 1] \times \{0\}$ .*

**Доведення.**

Нехай  $X_n = \{\frac{2k-1}{2^n} : k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ ,  $I_n = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$  для довільного  $n \in \mathbb{N}$ .

Розглянемо компактозначне відображення  $F : [0, 1]^2 \multimap [0, 1]$ , що означається так:  $F(x, y) = [0, |3 - 2^{n+1}y|]$ , якщо існує таке  $n \in \mathbb{N}$ , що  $(x, y) \in X_n \times I_n$  і  $F(x, y) = [0, 1]$ , якщо  $(x, y) \notin X_n \times I_n$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$ .

Візьмемо довільну точку  $x \in [0, 1]$  і покажемо, що відображення  $F^x : [0, 1] \multimap [0, 1]$ ,  $F^x(y) = F(x, y)$ , неперервне. Нехай  $x \notin$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , тоді  $F^x(y) = [0, 1]$  для довільного  $y \in [0, 1]$ . Тобто відображення  $F^x$  – стале, а, отже, неперервне. Нехай  $x \in X_n$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді існує таке натуральне число  $k \leq 2^{n-1}$ , що  $x = \frac{2k-1}{2^n}$ . Зауважимо, що  $F^x(y) = [\varphi(y), \psi(y)]$ , де  $\varphi(y) = 0$  для довільного  $y \in [0, 1]$ ,  $\psi(y) = 1$  при  $y \notin I_n$  і  $\psi(y) = |3 - 2^{n+1}y|$ , при  $y \in I_n$ . Оскільки  $\psi(\frac{1}{2^n}) = \psi(\frac{1}{2^{n-1}}) = 1$ , то функція  $\psi$  неперервна. Тому відображення  $F^x$  неперервне згідно з лемою 1.

Покажемо, що для кожного  $y \in [0, 1]$  відображення  $F_y : [0, 1] \multimap [0, 1]$ ,  $F_y(x) = F(x, y)$ , напівнеперервне знизу. Нехай  $y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})$ . Тоді  $F_y(x) = [0, 1]$  для довільного  $x \in [0, 1]$ . Тобто відображення  $F_y$  є сталим, а отже напівнеперервним знизу. Нехай тепер існує таке  $n \in \mathbb{N}$ , що  $y \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})$ . Тоді  $y \notin I_k$  при  $k \neq n$ . Тому  $F_y(x) = [0, 1]$  при  $x \in [0, 1] \setminus X_n$ , а отже,  $F_y$  напівнеперервне знизу згідно з лемою 2.

Покажемо, що відображення  $F$  розривне у кожній точці  $[0, 1] \times \{0\}$ . Нехай  $x_0$  – довільна точка з множини  $X = [0, 1]$ . Зауважимо, що  $F(x_0, 0) = [0, 1]$ . Візьмемо довільний окіл  $W = U \times V$  точки  $(x_0, 0)$ . Оскільки  $V$  є околom точки 0, то існує таке  $k_0 \in \mathbb{N}$ , що  $I_n \subseteq V$  для всіх  $n \geq k_0$ . Оскільки множина  $\bigcup_{n=k_0}^{\infty} X_n$  всюди щільна на  $[0, 1]$ , то існує таке  $k \geq k_0$  і точка  $x_1 \in X_k$ , такі, що  $x_1 \in U$ . Нехай  $y_1$  – середина  $I_k$ . Тоді  $F(x_1, y_1) = [0, |3 - 2^{k+1} \cdot \frac{3}{2^{k+1}}|] = \{0\}$ . Таким чином,  $(x_1, y_1) \in W$  і  $F(x_1, y_1) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$ . Отже,  $F$  не є напівнеперервною знизу в точці  $(x_0, 0)$ .

### 3 Неперервність звуження

**Теорема 3.** *Нехай  $X$  – берівський простір,  $Y$  – метризовний компакт,  $Z$  – метризовний простір і  $F : X \times Y \multimap Z$  – компактозначне відображення напівнеперервне знизу відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної. Тоді існує всюди щільна  $G_\delta$ -множина  $A \subseteq X$  така, що відображення  $F|_{A \times Y}$  неперервне.*

**Доведення.** Оскільки відображення

$F$  напівнеперервне знизу відносно першої змінної і напівнеперервне зверху відносно другої змінної, то за теоремою 1 в просторі  $X$  існує всюди щільна  $G_\delta$ -множина  $X_0$  така, що відображення  $F$  напівнеперервне зверху у кожній точці  $X_0 \times Y$ . Зауважимо, що простір  $X_0$  з індукованою з  $X$  топологією є берівським, адже доповнення  $X \setminus X_0$  до нього є множиною першої категорії у берівському просторі  $X$ .

Розглянемо відображення  $F_0 = F|_{X_0 \times Y}$ . З того, що відображення  $F$  неперервне відносно другої змінної випливає, що й відображення  $F_0$  неперервне відносно другої змінної. З того, що відображення  $F$  в кожній точці множини  $X_0 \times Y$  напівнеперервне зверху за сукупністю змінних і напівнеперервне знизу відносно першої змінної, випливає, що відображення  $F_0$  неперервне відносно першої змінної. Отже, відображення  $F_0$  нарізно неперервне.

Розглянемо тепер відображення  $F_0$  як однозначне відображення зі значеннями у просторі  $K(Z)$  компактних підмножин простору  $Z$  з топологією Віторіса. Відображення  $F_0$  нарізно неперервне на  $X_0 \times Y$  і простір  $K(Z)$  метризовний. Тому за теоремою Дж.Брекнеріджа і Т.Нішіури [2] існує  $G_\delta$ -множина  $A \subseteq X_0$  щільна в  $X_0$  така, що відображення  $F_0$  неперервне в кожній точці  $A \times Y$ . Оскільки  $X_0$  всюди щільний  $G_\delta$ -підпростір простору  $X$ , то множина  $A$  також щільна в  $X$  і є множиною типу  $G_\delta$ . Крім того,  $F|_{A \times Y} = F_0|_{A \times Y}$ , а отже, звуження  $F|_{A \times Y}$  неперервне.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les fonctions des variables reelles // An. Mat. Pura Appl., ser. 3. – 1899. – **3**. – P.1-123.
2. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull.Inst.Acad.Sinica.–1976.– **4**,№2.–191-203.
3. *Colbrix J., Troallic J.P.* Applications separement continues // C.R. Acad. Sc. Paris Sec. A. – 1979. – **288**. – P. 647-648.
4. *Debs G.* Points de continuitt d'une fonction stpartment continue // Proc. Amer Math Soc. – 1986. – **97**, №1. – P.167-176.

5. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теорема Дебса про многозначні відображення // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2004. – В.191-192. – С.61-66.
6. *В.К.Маслюченко, В.В.Михайлюк, О.Г.Фотій.* Зв'язки між нарізними та сукупними властивостями многозначних відображень // Мат. Студії. – 2011. – **35**, №1. – С.106-112.
7. *Namioka I.* Separate contimuty and joint continuity // Pacif.J.Math. – 1974. – **51**, №2. – P.515-531.
8. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. – 752 с.
9. *Shouchan Hu., Papageorgion N.* Handbook of Multivalued Analysis. Theory // Dordrecht / Boston/ London: Kluwer Academic Pablishens. 1997. – 964 p.